

Abhandlungen

der

physikalischen Klasse

der

Königlich-Preufsischen

Akademie der Wissenschaften

aus

den Jahren 1816—1817.



Berlin

in der Realschul-Buchhandlung.

1819.

I n h a l t.

Ueber

die Bildungsart der zusammengekitteten und conglomerirten Steinarten.

Von Herrn Gerhard *).

Ueber den Begriff einer conglomerirten Steinart ist man allgemein einverstanden. Man bezeichnet nämlich mit diesem Worte eine gemengte Steinart, welche aus grofsen oder aus kleinen Stücken einer und derselben oder mehrerer einfachen Steinarten, öfters aus anderen bereits gemengten Steinarten besteht, welche durch ein sichtbares Bindemittel zu einem Ganzen miteinander gemengt sind, und wobei das Bindemittel in weit geringerer Menge als die aggregirten Steinarten vorhanden ist. Dieser Begriff stimmt nicht allein mit der Natur dieser Steinarten, sondern er ist auch im Stande, sie von andern ebenfalls gemengten Steinarten abzusondern. So bestehen Granit, Gneus, Sienit, Gabro, Grünstein, Glimmerschiefer auch aus mehrern oryctognostisch verschiedenen Steinarten, allein es befindet sich bei denselben kein Bindemittel, welches sie zusammenhält. Bei den Porphyren und bei den porphyrartigen Steinen ist eine dichte Grundmasse vorhanden, in welcher sich ausgebildete Krystalle oder Krystallkörner befinden, und die Grundmasse ist viel häufiger als die eingesprengten Körner. Man hat also bei diesen Steinarten auf zweierlei zu sehen, einmal auf die Beschaffenheit der zusammengekitteten Steine, und auf das Cement, welches sie unter ein-

*) Vorgelesen den 23. November 1815 und 11. Januar 1816.

ander verbindet. Erstere sind sehr verschieden, gemeiniglich oryctognostisch einfache Steinarten, als Quarz, Kieselarten, Speckstein, Schieferbrocken und andere, und eben so finden sich auch schon bereits gemengte Steinarten, als Granit, Gneus und dergleichen, in ihnen. Die Gröfse dieser mit einander gemengten Stücke ist eben so verschieden. Zuweilen sind sie so klein, dafs man eine Vergröfserung bedarf, um sie zu unterscheiden; zuweilen erreichen sie die Ausdehnung von Zollen, ja von Fufsen, wovon das Urfels-Conglomerat des Steinkohlengebirges und die Nagelfluhe den Beweis geben. Eben so ist das Bindemittel von verschiedener Natur. Bisweilen ist es kalkartig, so dafs dergleichen Conglomerate im Feuer mürbe werden, ja mehr oder weniger in Flufs kommen, in welchem Falle sie öfters mit Säuren brausen und ein Theil von ihnen darin aufgelöset wird. Der bekannte Sandstein von Fontainebleau beweiset dies, und eben so finden sich im Magdeburgschen und Halberstädtschen ähnliche Sandsteine. Ein andermal scheint das Bindemittel thonartig zu seyn, weshalb man bei solchen eine Erhärtung im Feuer wahrnimmt. Ein andermal mufs man aus der braunen, dunkelrothen, gelben, schwärzlichen Farbe schliefsen, dafs der Kitt ein Eisenoxyd sei, und bei dem so weit verbreiteten Rothen-Liegenden wird man einen sehr eisenschüssigen Thon zum Bindemittel annehmen können. Endlich scheint das Bindemittel bei einigen, wie bei dem Puddingstein, jaspisartiger Natur zu seyn, so dafs es daher auch bei dem Schleifen eine gute Politur annimmt.

Diese conglomerirten Gebirgsarten sind auf der Oberfläche der Erde sehr weit verbreitet, und sie zeigen sich in dem Urgebirge obwohl sparsam, wogegen sie in den Uebergangs- und in den Flötzgebirgen sehr häufig vorkommen, wovon man sich völlig überzeugen kann, wenn man auf die grofsen und häufigen Lager von Sandsteinen, Grauwacke, Nagelfluhe, auf die aus ihnen bestehenden ganzen Gebirgszüge, auf die grofse ausgedehnte Verbreitung des Steinkohlen-Conglomerats und des Todten-Liegenden Rücksicht nimmt. Eben so steigen die Conglomeratgebirge öfters auf eine beträchtliche Höhe, so dafs sie sich hin und wieder mehrere tausend Fufs über den Spiegel des Meeres erheben. Man kann diese Steinarten unter drei Arten bringen, nämlich die Grauwacke, der Sandstein und die Nagelfluhe, indem das Sandstein-Conglomerat zu den Sandsteinen, und die genannten und bekannten Puddingsteine zu der Nagelfluhe gehören. Von jeher hat man ihre Gemengtheile als Ueberreste anderer zerstörter Gebirge betrach-

tet, zumal man an en einzelnen Körnern eine abgerundete Gestalt wahrnahm. Man glaubte erner beobachtet zu haben, daſs die in den Conglomeraten befindlichen Kner und Stücke mit den Steinarten der nächst belegenen Gebirge übereinämen, und endlich wollte man beobachtet haben, daſs, je näher die Conglmerate den hohen Gebirgen lägen, desto gröſser und desto weniger abgerndet wären die Stücke, aus denen sie bestehen, und aus allen diesen Utänden machte man den Schluſs, alle dergleichen conglomerirte Gebirgsaten wären aus abgeriebenen Stücken oder Körnern anderer Gebirgsarten ntstanden und durch ein Cement wieder zu einem Ganzen mit einander vrbunden worden.

Man schloſs daher, bei der Bildung dieser Steinarten habe bloſs der Mechanismus gewirt, und der Chemismus daran keinen Theil gehabt. Es haben zwar einige neuere Schriftsteller, als die Herren Voigt und Ebel, einige Zweifel daggen erhoben. Indeſs scheint die ältere Meinung doch noch die vorherrschende zu seyn. Ich habe daher die Untersuchung der Aufgabe zum Inhalt der gegenwärtigen Vorlesung erwählt, und werde mich bemühen, in derselben zu zeigen, daſs bei der Bildung dieser Steinarten der Chemismus ganz vorzüglich gewirkt habe. Um dieses desto überzeugender zu thun, will ich einige allgemeine Gründe für diese Meinung anführen, und dann jede der oben genannten drei Steinarten besonders durchgehen und aus ihrer Natur ein Gleiches herzuleiten mich bemühen. Wenn man also die Bildungsart der conglomerirten Steine allein dem bloſsen Mechanismus zuschreiben will, so ist man genöthigt:

1) das neptunische System in all seiner Ausdehnung und Stärke anzunehmen, und zu behaupten, daſs nicht allein das Wasser die höchsten Berge (also einen Mont-blanc von 16000 Fuſs Höhe, einen Chimborasso von 19000 Fuſs Höhe) bedeckt habe, sondern daſs es nach dem ersten ungemein ruhigen Abfallen in verschiedenen Zeiten mit Sturm und Toben mehreremale wieder gestiegen, schnell mit Unruhe und Schwanken dann abgefallen sey, dadurch die alten Gebirge zerstört, Körner und mehr oder weniger groſse Stücke von ihnen abgerissen und an ihrem Fuſse wieder abgesetzt habe. Wie ungegründet diese ganze Theorie sey, in welche groſse unauflösbare Schwierigkeiten man sich bei derselben verwickele, die man durch nichts anders als durch beständig gehäufte Wunderwerke lösen kann, hat der scharfsinnige Breislack in seiner herrlichen Geologie fast mathematisch bewiesen. In meiner der Königlichen Akademie den 3. August 1812 vor-

gelesenen Abhandlung habe ich aus einem andern Gechtspunkte, nämlich aus der so schweren Auflösbarkeit der sogenannten einfachen Erden in Wasser, eben dieses darzuthun mich bemüht, und gezeigt dafs, um einen Kubikfufs Granit oder, deutlicher zu reden, um die in einem Kubikfufs Granit steckenden einfachen Erden aufzulösen, 151500 Pfund oder 2295 Kubikfufs Wasser erforderlich gewesen wären. Wo ist das Wasser hergekommen? wo ist es nach erfolgter Krystallisation geblieben? Welche Kräfte haben die neuen Ansteigungen des Wassers bis auf so grofse Höhen bewirkt? Durch welche Ursachen ist es zum abermaligen Fallen gebracht? Warum ist es einmal mit Ruhe, ein andermal mit Sturm, wie sich die Neptunisten ausdrücken, gefallen? Will man meteorische Wasser und deren reifsenden Abfall von ältern und höhern Bergen in Rechnung bringen, so stöfst man auf ähnliche unauflösbare Schwierigkeiten, weil hier immer dieselben Fragen eintreten, woher die ungeheure Menge Wasser in den Luftkreis gekommen und wo es nach gethaner Wirkung geblieben. Ueberdem finden wir zwar, dafs meteorisches Wasser grofse Zerrüttungen in Gebirgen nach sich ziehe, und dafs an dem Fufse derselben und in ihren Thälern grofse Schutthalden entstehen, allein es ist keine Beobachtung vorhanden, dafs auch nur eine kleine Schicht Grauwacke oder Sandstein in diesen Schutthalden sich gebildet habe.

2) Hätten die Conglomerate ihre Entstehung den abgeriebenen Theilen alter Gebirge und nur einer Verkittung derselben zu verdanken, so müfsten diese älteren Gebirge von einer fast unbeschreiblichen Höhe gewesen seyn, weil die an dem Fufse derselben befindlichen Conglomerat-Gebirge in ihrer Ausdehnung und selbst in ihrer Mächtigkeit und Höhe so sehr beträchtlich sind. Man betrachte einmal das kleine fast isolirte Harzgebirge: bereits in den Theilen desselben, welche man zu den Wernerschen Uebergangsgebirgen rechnet, finden sich rund um das ältere Urgebirge ungeheure Massen von Grauwacke und wirklichen Sandsteinen, so dafs der in der Grauwacke geführte Bergbau in der Tiefe bereits nahe an 300 Lachter oder 1800 Fufs beträgt. Nimmt man gar noch die ungeheure Masse von Urfels-Conglomeraten, von dem Roth-Liegenden und von den mancherlei Arten von Sandsteinen, welche in den Flötzgebirgen vorkommen, die sich an dem ganzen Fufse des Harzes rund um denselben ausbreiten, so müfste, wenn alle diese Lagen, Berge, ja kleine Gebirgszüge dieser Conglomerate abgeriebene Theile des eigentlichen Urgebirges wären, die Höhe des letztern ungeheuer gewe-

sen seyn. Dies läſst sich wohl schwerlich annehmen, und die von Hutton angeführte Beobachtung, daſs man auf den Schottischen Bergen Ueberreste von alten Römischen vor 2000 Jahren erbauten Kunstwegen fand, beweiset deutlich, daſs die Abnahme der Gebirge in ihrer Höhe unmöglich so beträchtlich seyn könne, um aus den abgeriebenen Theilen neue Gebirge von so groſsem Umfange zu bilden.

3) Die Conglomerate erscheinen überall in mehr oder minder deutlichen Schichten, wie wir dies an der Grauwacke, fast an allen Arten von Sandsteinen, ja sogar an dem Ur-Conglomerat, an dem Rothen-Liegenden und an der Nagelfluhe sehen. Dies beweiset, daſs der Niederschlag nach und nach und mit ziemlicher Ruhe geschehen seyn müsse. Nun behauptet man aber, daſs eben durch den stürmischen Wellenschlag die Gewässer die Theile der alten Gebirge abgerieben, und durch den Niederfall der abgeriebenen Theile und ihre neue Verbindung unter sich die Conglomerate den Anfang genommen hätten; welches mit einer regulären Schichtung, in welcher wir die Conglomerate finden, sich nicht zusammen reimen läſst.

4) Wären die Conglomerate durch Abreiſsung und durch Abschwemmung alter Gebirge entstanden, so müſsten überall die groben Theile an den untern, die feinen an den obern Punkten liegen. Allein dies ist nicht allezeit, ja nicht einmal gewöhnlich der Fall. Die Harzer Grauwacke, besonders die schiefrige, besteht aus viel feinern und kleinern Theilen, als der mit abfallendem Niveau über ihr liegende Sandstein.

5) Das Fallen der Conglomerat-Schichten wird häufig unter groſsen, öfters sich den rechten nahenden Winkeln beobachtet, so daſs auf solchen ungemein steilen Flächen groſse, besonders rundliche Stücke nicht hätten liegen bleiben können, welches man doch an dem Urfels-Conglomerat und an der Nagelfluhe besonders so häufig beobachtet. Diesem Einwurf will man dadurch begegnen, daſs man behauptet, anfänglich wären diese Conglomerat-Schichten horizontal gewesen und in der Folge durch innere Explosionen gehoben worden. Nun gebe ich gern zu, daſs es unmöglich ist, die Gewalt eingeschlossener und sich ausdehnender Dämpfe und Gasarten zu berechnen, und die Domithügel, welche Herr von Buch in Auvergne beobachtet, noch mehr aber die aus dem Grunde des Meeres bis über seine Fläche gehobenen vulkanischen Inseln, sind redende Beweise dieser fast unbegreiflich groſsen Kraft. Allein daſs eine solche Kraft die horizon-

talen Schichten der Conglomerate überhaupt und öfters bis zu einem Winkel von 70 bis 80 Graden gehoben habe, dies widerlegt ihre reguläre Schichtung vollkommen. Denn die horizontalen Schichten waren entweder noch weich, wie die Explosion erfolgte, oder sie waren alsdann schon erhärtet. Im erstern Falle würden die elastischen Dämpfe ohne eine grofse Wirkung durchgegangen seyn, im letztern aber die Schichten zerbrochen haben. Der Herr Geh. Rath Heim hat ähnliche Zerstörungen von Kalkschichten, welche durch innere Explosionen entstanden, an mehrern Orten in dem Thüringschen Gebirge beobachtet, und die gemachten Beobachtungen durch deutliche nach der Natur entworfene Zeichnungen erläutert, aber überall gefunden, dafs die Schichten zerbrochen waren. Endlich hat man auf den mittelst solcher Explosionen aus dem Meere gehobenen Inseln noch nie Schichten beobachtet, vielmehr sind sie aus rohen unordentlich mit einander gemengten Stücken von Bimstein, Laven, Obsidian, auch nur durch das Feuer veränderten Steinarten, welche ohne alle Ordnung unter einander liegen, zusammengesetzt, durch welches Alles dieser Einwurf entkräftet wird.

6) Ein anderer Umstand, welcher auch der mechanischen Entstehungsart der conglomerirten Felsarten nicht günstig ist, bestehet darin, dafs man in ihnen Stücke von solchen Gebirgsarten antrifft, welche in den Gebirgen, von denen sie können abgeführt worden seyn, nicht befindlich sind. So findet man in der an der Nordseite der Alpen verbreiteten Nagelfluhkette Geschiebe von Porphyr und Serpentin, welche in den an der Nagelfluhkette angränzenden Ur-Alpen gar nicht vorkommen, sondern welche nur an der mittäglichen Seite derselben brechen. Man müfste also annehmen, dafs diese Geschiebe über den hohen Kamm der Uralpen weggeführt worden, und dafs auf diesem Wege kein Stück davon liegen geblieben, welches wohl niemand behaupten wird. Ja, der genaue Beobachter Herr Escher bemerkt in seiner gründlichen Kritik über Ebel's Bau der Erde in dem 4ten Theil der *Alpina*, dafs sogar die in der Nagelfluhe befindlichen Granit- und Gneus-Kugeln von diesen in den Hochgebirgen anstehenden Steinarten an Farbe und Korn sehr verschieden wären. Eben so befinden sich in dem Urfels-Conglomerat des Kohlengebirges im Fürstenthum Schweidnitz viele Geschiebe von Kieselarten, welche man in den vorliegenden Ganggebirgen gar nicht beobachtet, wogegen sich von dem dort so häufig befindlichen Porphyr nichts darinnen befindet.

7) Endlich kommen in den Conglomerat-Schichten Erscheinungen vor, welche offenbare Wirkungen des Chemismus vor Augen legen. Hieher gehören die Krystallmassen, ja sogar ausgebildete Krystalle, welche öfters in den Conglomeraten vorkommen. So ist die Grauwacke häufig mit Quarztrümmern durchsetzt, und man trifft in ihr öfters Krystalle von Kalkspath, von Braunspath an. In dem öfters schon genannten Rothen-Liegenden, welches auf den ersten Blick eine unordentlich zusammengeschobene Masse zu seyn scheint, entdeckt man häufig nicht unbedeutende Trümmer von Kalkspath, auch Gypskrystalle, und mitten in der compacten Masse desselben findet sich häufig die krystalline Schaumerde, so wie Schwefelkies selbst in Krystallform in den Conglomeraten eben nicht selten ist. Besonders muſs man hieher auch die Glimmerblätter rechnen, welche nicht allein in ältern, sondern auch in jüngern Conglomeraten, besonders in den jüngern Sandsteinen sehr häufig sind, welche wegen ihrer Weichheit bei den stürmischen Bewegungen, denen man die Bildung der Conglomerate zuschreiben will, unmöglich unverletzt bleiben können, und welche also in dem Conglomerat, in welchem sie sich befinden, gebildet seyn müssen. Eben so beweiset dies ganz klar der sogenannte krystalline Sandstein von Fontainebleau, bei welchem sogar die Kraft der Kristallisation die Quarzkörner gezwungen hat, sich in die Rhomboïdal-Figur des Kalkspaths völlig zu fügen.

Wenn man diese bisher angeführten Umstände mit ihren unmittelbaren Folgerungen gehörig erwägt, so wird man sich schwerlich überzeugen können, daſs bei der Bildung der Conglomerate ein bloſser Mechanismus vorgewaltet habe, sondern man wird zugestehen müssen, daſs auch hiebei, so wie bei den ältern Gebirgen, der Chemismus vollkommen thätig gewesen ist. Denn wenn man die Sache genau nehmen will, so kann man bei der Bildung der Steinarten nur vier Wege annehmen. Entweder sind sie im Wasser aufgelöset gewesen und haben sich aus demselben niedergeschlagen: dies ist der eigentliche Neptunismus. Oder sie sind von dem Wasser bloſs zusammengeschwemmt und durch einen Kitt vereinigt: der Mechanismus; oder das Feuer hat sie hervorgebracht: der Vulkanismus; oder sie sind bloſs nach den Gesetzen der Mischung und Aneignung entstanden: dies ist der wahre Chemismus. Nach den wichtigen und überzeugenden Gründen eines Breislack, Hutton, Playfair und andrer kann man auf den Neptunismus hier nicht denken. Auſser mehreren andern Gründen, welche hier anzuführen zu weitläuftig wäre, beweisen schon die in den conglo-

merirten Gebirgen vorkommenden Versteinerungen, dafs man den Vulkanismus bei ihrer Bildung ausschliefsen mufs. Die zuvor angeführten Beobachtungen widersprechen dem Mechanismus, und es bleibt also nichts als der Chemismus für ihre Bildung übrig. Man wird sich aber von der Wahrheit dieses Satzes um so mehr überzeugen können, wenn man die Hauptarten der Conglomerate näher betrachtet.

Ich habe oben drei Hauptarten der Conglomerate angeführt: die Grauwacke, den Sandstein und die Nagelfluhe. Was also

1) die Grauwacke anbetrifft, so wird diese Steinart fast von allen Geognosten als eine Sandsteinart angenommen, und der einzige Herr Berghauptmann von Trebra will sie zu den Porphyrarten rechnen, welches man aber um so weniger annehmen kann, da aller Porphyr im Feuer schmelzt, die Grauwacke aber unschmelzbar ist, so wie sich auch die Gemengtheile beider Steinarten von einander sichtbar unterscheiden. Ich übergehe bei dieser Gebirgsart mehrere bei ihr vorkommende geognostische Umstände, welche von den Herren von Trebra und Lasius in ihren schätzbaren Abhandlungen über diese Gebirgsart weitläuftig angeführt sind, und will mich nur auf diejenigen beschränken, welche offenbar darthun, dafs sie nicht mechanisch, sondern chemisch entstanden sey. Betrachtet man diese Grauwacke theils mit blofsen, theils mit bewaffneten Augen, so wird man finden, dafs sie meist aus grofsen oder kleinen Quarzkörnern besteht, welche durch ein thonartiges Bindemittel mit einander sehr fest und innig, aber dergestalt vermengt sind, dafs das Bindemittel nur einen geringen Theil des Ganzen ausmacht, weshalb auch nach den Untersuchungen des Herrn Westrumb 67 bis 73 Prct. Kieselerde und nur 11 — 16 Prct. Alaunerde in ihr enthalten sind. Die eingemengten Quarzkörner haben zuweilen die Gröfse von Erbsen und Bohnen, weit öfter aber sind sie kleiner, so dafs man sie nur mit dem Mikroskop entdecken kann. In beiden Fällen sind die Körner nicht abgerundet, sondern scharf und eckig, so dafs die ganz feinkörnige Art ein feindrusiges Ansehn unter dem Vergröfserungsglase zeigt, in welchem Falle man auch eine schiefrige Textur bei ihr wahrnimmt, weshalb sie auch dann den Namen Grauwackenschiefer erhält. Beide Abarten der Grauwacke, die grob- und die feinkörnige, wechseln aber nicht schichtenweise mit einander ab, sondern in einer und derselben Schicht kommen beide stellenweise und sich in einander verflöfsend vor. Herr von Trebra behauptet, dafs der Quarz öfters aufgelöset und thonartig werde, und

und vielleicht könnte aus dieser Auflösung das in der Grauwacke eben nicht seltene phosphorescirende Steinmark entstanden seyn. Aufserdem kommen in der Grauwacke auch häufig Bruchstücke von Thon- und Kieselschiefer vor. Allein auch diese sind nicht abgerundet, vielmehr scharfkantig; sie erscheinen auch nicht in ganzen Lagern, sondern stellenweise, und kommen hauptsächlich in der Nachbarschaft des Thonschiefers zum Vorschein. Auf den höher liegenden Punkten bemerkt man in der Grauwacke fast gar keinen Glimmer, welcher aber da, wo sie dem Flözgebirge sich nähert, häufiger erscheint. Diese Grauwackenlager wechseln nun häufig mit Thonschieferschichten ab, wovon der vom Herrn von Trebra deutlich abgezeichnete Steinbruch hinter dem Zellbache bei Clausthal einen redenden Beweis abgiebt. Ja, diese Abwechslungen beider Steinarten sind bisweilen so fein, als wenn schwarze Pinselstriche von Schiefer in der Grauwacke gemacht wären. Eben so findet man mitten in der Grauwacke Nester von Thonschiefer, und umgekehrt in diesem Nester von jener, wie dies nicht selten bei dem Granit und bei dem Gneus vorkommt. Endlich so ist bekannt, dafs Schichten von Uebergangskalk in der Grauwacke vorkommen, und dafs umgekehrt Schichten von Grauwacke im Kalkstein erscheinen. Man glaubte ehedem, dafs die Grauwacke blofs dem Harze eigen sey. Allein man hat seit der Zeit gefunden, dafs sie fast in allen Gebirgen vorkommt, und will daher behaupten, dafs sie das älteste Uebergangslager ausmache. An den meisten Orten macht sie mächtige Lager, welche durch den Bergbau an manchen Orten auf mehrere Hundert Lachter durchsunken sind, wie sie auch auf beträchtliche Höhen, die mehrere Tausend Fufs über die Meeresfläche erhöht sind, ansteigt.

Wenn man alle diese hier kürzlich bemerkten Erscheinungen gehörig erwägt, so wird man nicht behaupten können, dafs die Grauwacke aus abgeriebenen und wieder zusammengekitteten Theilen älterer Gebirge entstanden sey. Denn einmal erlaubet das scharfeckige Korn dieser Steinart nicht, dies anzunehmen. Man müfste ferner die grobkörnige Grauwacke nur unter der feinkörnigen finden, und doch äufsert sich häufig das Gegentheil, ja man trifft beide Gattungen in einer und derselben Schicht an. Ist es ferner irgend wahrscheinlich, dafs bei solchem Abreiben und Abschwemmen so viel Schichten von andern Steinarten mit der Grauwacke abwechseln könnten? Unter dieser so sehr merkwürdigen Schichtenwechslung kommen besonders auch Schichten vor, welche offenbar einen krystallinischen Ur-

sprung verrathen, welches auch die Beobachtungen des Herrn **Ebel** über die Grauwackenschichten in den Kalklagern der Alpen beweisen, wobei besonders merkwürdig ist, dafs in dem Canton Glarus, zwischen dem Sernftthale und dem Wallenstädter See, in den dort befindlichen Thonsteinschichten ganze Nester von rother Grauwacke inne liegen. Auch die grofse Härte der Grauwacke, da sie nicht anders als durch Bohren und Sprengen gewonnen werden kann, läfst den mechanischen Ursprung derselben nicht annehmen. Will man diesen auf das thonartige Bindemittel schieben, so ist es überall in sehr geringer Menge vorhanden, und wenn selbiges mit den Quarzkörnern zugleich abgerieben worden, so müfste es, seiner Natur nach, viel weiter fortgeschwemmt seyn, und man würde die Quarzkörner nicht mit ihm verbunden antreffen. Es liegt also der wahre Grund der Härte unstreitig in dem engen Zusammenwachsen der kleinen Theile selbst, und beweiset, dafs eine innige Berührung unter ihnen Statt finde. Man bedenke ferner die ungeheure Menge dieser Steinart, welche an manchen Orten, z. B. im Harz, so grofs ist, dafs die jetzt dort vorhandenen Urgebirge kaum im Stande wären, alles zu ihrer Bildung nöthige Material zu liefern, und man wird auch hierin einen Beweis gegen ihre mechanische Bildung entdecken. Man erwäge ferner den sehr gewöhnlichen, deutlichen und auffallenden Uebergang der Grauwacke in die andern mit ihr in der Schichtung wechselnden Steinarten, und man wird sich hinlänglich überzeugen, dafs ihr kein mechanischer Ursprung zukomme. Endlich so finden sich in der Grauwacke völlig deutliche Spuren, dafs chemische Processe in ihr vorgegangen sind, denn sie ist öfters mit Quarztrümmern durchsetzt. Man entdeckt in ihr Nester von Quarz, Kalkspath und Erzkrystallen, besonders kommt Schwefelkies nicht selten in ihr vor. Dies sind neue Erzeugungen, welche ohne chemischen Procefs nicht entstehen konnten.

Man könnte hiergegen vielleicht noch zwei Einwendungen machen, welche von den in der Grauwacke öfters vorkommenden Schieferbruchstücken und von den darin zuweilen anzutreffenden Versteinerungen hergenommen sind. Allein wenn man die Sache genau erwägt, so scheint mir dieses doppelte Vorkommen mehr für als gegen meine Meinung zu sprechen. Denn die in der Grauwacke vorkommenden Brocken von Thon- und Kieselschiefer sind nicht rund, sondern eckig; sie sind ferner mit der eigentlichen Substanz der Grauwacke so innig und genau verflöfst, dafs eine Steinart in die andre unmittelbar übergeht: welches also beweiset, dafs sie

in der Grauwacke gebildet worden, indem, nach den Gesetzen der Verwandtschaft, ähnliche Theile sich mit einander verbunden haben. So sehen wir ja, dafs in den Lagern des Dolomit auf ähnliche Art ganze Nester von Speckstein, Amiant und andern Steinarten vorkommen. Was die Versteinenerungen in der Grauwacke anbetrifft, so kommen diese in keiner Steinart so selten vor als in dieser, und eben so finden sie sich nur stellenweise in ihr vor. Hieraus folgt weiter nichts, als dafs hin und wieder auch unter einer Wasserbedeckung Grauwacke sich formirt habe, und dies können einzelne Wasserbehälter gewesen seyn, welche durch Vertiefungen bei der Krystallisirung der Urgebirge eingeschlossen worden, und welche in der Folge der Jahre ihre Dämme durchbrachen und abliefen, und wovon wir in allen Gebirgen die überzeugendsten Beweise finden. Allein hätte selbst bei diesen zu Grauwacke gewordenen Ueberresten organischer Körper kein chemischer Procefs obgewaltet, so möchte ich wohl wissen, wie dergleichen Versteinerungen möglich gewesen, da sich gar nicht denken läfst, dafs Quarzkörner als solche, in die vegetabilische oder animalische Substanz eindringen und dabei die vollkommenste Uebereinstimmung mit der Gestalt des Urbildes behalten können. Aus diesen Ursachen scheinen also diese beiden Einwendungen mehr für den Chemismus als für den Mechanismus bei der Bildung unsrer Grauwacke zu sprechen.

Wenn man also bei Bildung dieser Steinart den Neptunismus und den Mechanismus verwirft, welchen Begriff kann man sich wohl von den hiebei obwaltenden Chemismus machen? Ich bin in einer der Königlichen Akademie am 3. August 1812 vorgelesenen Abhandlung zu erweisen bemüht gewesen, dafs die Steinarten aller Gebirge durch Verwandlung von Gasarten in einen concreten erdigen Zustand ihren Anfang genommen hätten, und es würde unnöthig seyn, die damals zum Beweise dieses Satzes bemerkten Gründe zu wiederholen. Vergleicht man nun den Granit, Gneus und Glimmerschiefer jener Gebirge mit der Grauwacke, so wird man einen doppelt auffallenden Unterschied bei denselben wahrnehmen. Einmal ist in jenen die Krystallisation vollkommner und erscheint in gröfserm Korn, und dann haben sich auch, wie dieses die Zerlegung des Feldspaths und Glimmers beweiset, die Kiesel- und Alaunerde gleich mit einander verbunden und neue Körper gebildet. Hieraus ist also zu schliefsen, dafs die Coagulirung der Gasarten langsamer erfolgt, auch dafs wahrscheinlich zu gleicher Zeit mehr Wasser gebildet worden, welches die vollständigere Krystallisi-

rung dadurch bewirkt hat, daſs die kleinen Krystallblätter in dieser halb flüssigen und verschiebbaren Masse sich einander leichter nähern und auch unter sich verbinden können. Bei der Grauwacke im Gegentheil beweiset das meist sehr kleine Korn, daſs die Coagulirung sehr schnell und ohne merklichen Beitritt von Wasser geschehen, und daſs auch deshalb keine Verbindung der Kiesel- und Alaunerde vor sich gegangen, folglich diese letztere zum Bindungsmittel dienen können, daſs überhaupt bei dieser Coagulirung der Gasarten eine gröſsere Menge von solchen, welche zum Hervorbringen der Kiesel- als zur Darstellung der Alaunerde nöthig waren, vorhanden gewesen ist. Nimmt man diese Theorie an, so wird man durch sie einen möglichen Begriff über die chemische Bildung dieser Steinart erhalten.

Ich komme nunmehr *)

2) zu dem Sandstein, und rechne dahin nicht allein die gewöhnlichen eigentlichen Sandsteinarten, sondern auch das Rothe-Liegende und die Sandstein-Conglomerate, welche hauptsächlich die Lagerstätte der Steinkohlen oder der eigentlichen Steinkohlengebirge ausmachen. Der Hauptgemengtheil dieser Steinart besteht in Quarzkörnern von sehr verschiedner Gröſse, welche zuweilen so geringe ist, daſs man eine Luppe zu ihrer Darstellung nöthig hat, ein andermal aber auch zu der Gröſse von kleinen Bohnen anwächst. Diese Körner sind nun durch ein Bindemittel von Thon, Kalkerde, auch Eisenoxyd verbunden, in welchem letztern Falle das Oxyd fast immer mit Thon vielleicht gemischt, vielleicht aber auch gemengt ist, welches besonders bei dem Röthliegenden und auch bei dem bunten Sandstein der Fall ist. Wenn man alle bei dieser Gebirgsart vorkommende Umstände erwägt, so wird man der Meinung des Herrn Bergraths Voigt beitreten müssen, daſs dieselbe keine aus abgeriebenen Quarztheilen und einem dazu gekommenen Cement gemengte Bergart sey, vielmehr daſs die Quarzkörner durch eine Art unregelmäſsiger Krystallisation entstanden und mit einer rein thonartigen oder eisenschiefrig-thonigen oder mit einer kalkartigen Materie genauer verbunden worden, und daſs man sich also ihre Bildung eben so wie die der Grauwacke vorstellen müsse. Dies wird aus folgenden Gründen noch deutlicher erhellen.

a) Der Gang auf der Luise Christiane zu Lauterberg am Harz ist ganz mit Sand ausgefüllt, welcher durchaus aus eckigen Körnern besteht, in

*) Vorgelesen den 11. Januar 1816.

welchen kein fremdartiges Geschiebe vorkommt, und in diesem Sande liegen verschiedene Arten von Kupfererzen in rundlicher knolliger Form auf eine gleiche Art wie die Feuersteinknollen in den Kreideschichten. Diese Beschaffenheit des Ganges beweiset deutlich, daſs derselbe nicht von auſsen kann seyn angefüllt worden, indem sich gar nicht begreifen läſst, warum bloſs in diesem einzigen Gange Sand eingespült worden, und die übrigen noch weit wichtigern und in geringer Entfernung von diesem streichenden Gänge davon frei geblieben. Es muſs also dieser Quarzsand sich in dem Gange selbst gebildet haben, und dies beweiset also, daſs die Natur dergleichen Bildung hervorbringen kann.

b) Man findet häufig, daſs eckige, ja rein krystallisirte Quarzkörner nicht allein in Urkalkschichten vorkommen, und dies so häufig, daſs Stücke von denselben an einzelnen Stellen mit dem Stahl Funken geben, sondern auch daſs ganze Schichten von Sandstein, welche mit Kalkschichten abwechseln, in den groſsen Kalklagern vorkommen. Dieser Sandstein, welchen Herr Ebel besonders auch Alpensandstein nennt, besteht fast bloſs aus grünlich- und gelblich-weiſsen, nicht abgerundeten, sondern eckigen Quarzkörnern, bei denen man fast kein Bindemittel erkennen kann. Die Schichten desselben halten die Mächtigkeit von einigen Linien bis 6 Fuſs; es liegen derselben mehrere über einander, und sie streichen bald zwischen dem Urfels und dem darauf befindlichen ersten Kalksteinlager, als auch zwischen den Kalkflötzen selbst. Wenn also in einer offenbar krystallinischen Gebirgsart, wie der Urkalk, krystallartige Quarzkörner nicht allein häufig eingeknetet, sondern in ganzen Schichten vorkommen, so müſsen dieselben wohl ebenfalls durch die Krystallisation ihre Bildung erhalten haben, und man wird wohl um so weniger auf eine Zusammenschwemmung denken, da diese Körner öfters Schichten von einer nur einige Linien starken Dicke bilden. Hieher gehören auch die schönen Quarzkrystalle, ja ganze Drusen davon, welche in den Schichten des Carrara-Marmors häufig genug vorkommen.

c) Wenn man grob- und feinkörnigen Sandstein unter einer starken Vergröſserung ansieht, so wird man weit mehr eckige als abgerundete Körner darin entdecken, welches sogar bei dem laufenden Sande der Fall ist. Man wird bei dieser Untersuchung ferner finden, daſs fast alle Quarzkörner wasserhell und durchsichtig sind, welches man bei dem Quarz des Granites fast nie oder doch nur höchst selten beobachtet.

d) Vergleicht man den in Grus auf hohen Gebirgen zerfallenen Granit mit losem Sande, so ist der Unterschied sehr auffallend, indem man in letzterm so wenig wie im Sandstein Ueberreste von Feldspath findet, welcher in dem zerfallenen Granit-Gruse so deutlich, so häufig ist. Wollte man sagen, der Feldspath habe sich in der Folge in Thon aufgelöset: warum findet man denn so wenig Ueberreste von Thon in dem Sandstein und in dem Sande? Und doch überwiegt die Menge des Feldspaths in dem Granit den Quarz ansehnlich.

e) Ist es bekannt, daſs besonders der jüngere Sandstein in der Reihe der rein chemischen Niederschläge zwischen dem alten Gypse, dem Stinkstein, dem bituminösen Mergelschiefer, dem jüngern Gyps sich befindet, weshalb man also auf einen ähnlichen Bildungs-Proceſs schlieſsen muſs.

f) In dem in Sandstein versteinerten Holze kann man die Jahrringe mit bloſsem Auge noch erkennen, welches nicht möglich seyn würde, wenn die Körner, aus denen der Sandstein besteht, als solche bereits erst wären zusammengeschwemmt worden.

g) Löset man sehr kalkartigen Sandstein, z. B. den von Fontainebleau, in Säuren auf, und beobachtet den an 60 Prct. betragenden Bestand von Quarzkörnern, so findet man dieselben wasserklar, durchsichtig und zum Theil völlig krystallisirt. Etwas Aehnliches zeigt sich bei dem Sandstein zu Wallsee. Hier kann man mit bloſsen Augen die Kalkspathblätter bemerken, welche die Quarzkörner verbunden haben, und wenn man diese durch Auflösung in Säuren wegnimmt, so besteht der Ueberrest in durchsichtigen eckigen Quarzkörnern.

Endlich so übertrifft in der Quantität bei dem Granit, dem Gneus und Glimmerschiefer der Feldspath uud der Glimmer allezeit den Quarz. Da nun der Sandstein hauptsächlich aus Quarzkörnern besteht, so wird man bei der ungeheuren Ausdehnung und Mächtigkeit der Sandsteingebilde nicht Materie genug haben, sie hervorzubringen, wenn sie durch Zerstörung älterer ihren Anfang genommen hätten. Nach diesen jetzt angeführten Umständen wird man nun wohl zugeben, daſs eine Zusammenschwemmung und Verkittung abgeriebener Quarzkörner diese Steinart nicht kann hervorgebracht haben. Man wird vielleicht mehr Schwierigkeiten finden, eben dies auch bei den Sandstein-Conglomeraten anzunehmen. Allein auch dies läſst sich mit groſser Wahrscheinlichkeit darthun. Es ist wahr, die gröſsern

Stücke, welche in diesen Conglomeraten liegen, sind mehr oder weniger abgerundet, und haben öfters mit den Steinarten der ihnen vorliegenden Gebirge Aehnlichkeit, auch finden sich dieselben gewöhnlich in den tiefsten Punkten. Allein einmal findet man auch eckige Stücke in diesem Conglomerat, und überdem ist es ja eine bekannte Sache, daſs alles, von dem Wassertropfen bis zum Weltkörper, Neigung hat sich in Kugeln zu bilden. Wir sehen ja, daſs der Granit auf dem Kynast im Jauerschen in Kugeln erscheint; Basalt, Porphyr kommen öfters, und der bekannte Kugelfels immer in dieser Gestalt vor, ja Herr Stüz sahe bei Neſsmühl in Ungarn kuglich abgesonderte Stücke von Sandstein von 1—3 Fuſs Durchmesser, und Herr Esmark beobachtete dergleichen bei Clausenburg. Es liegt ferner das Sandstein-Conglomerat auch öfters auf kleinkörnigem Sandstein, und nimmt also nicht immer den untersten Punkt ein. Es scheinen zwar die eingeschlossenen gröſsern Stücke öfters Aehnlichkeit mit den Steinarten der vorliegenden Gebirge zu haben, allein öfters ist dies auch nicht der Fall, und endlich so finden sich diese gröſsern Stücke alle im wahren Sandstein eingeschlossen, welches also höchst wahrscheinlich macht, daſs sie mit ihnen einerlei Entstehungsart gehabt haben. Der bekannte Englische Puddingstein, welcher aus lauter rundlichen gelben oder schwarzen Feuersteinen besteht, welche durch eine jaspisartige Masse, die eine schöne Politur annimmt, verbunden sind, scheint mir besonders dieser Meinung günstig zu seyn, da es sich kaum denken läſst, daſs mechanisch abgeriebene Theile eine solche Härte und Festigkeit wieder annehmen und ein so gleichförmiges Gewebe mit muschlichem Bruche hätten bilden können. Alles dieses läſst sich auch sehr gut denken, wenn man die oben angeführte Bildungsart der Grauwacke sich deutlich vorstellt. Waren die coagulirten Gasarten von der Art, daſs aus ihnen nur hauptsächlich Kieselerde entstehen konnte, und nur wenig Alaun- und Kalkerde, so brachte dies gewöhnlichen Sandstein hervor. War etwas mehr Alaunerde dabei, so konnten sich Feldspath und Glimmertheile bilden, und in der Verbindung mit Kieselerde durch die wechselseitige Anziehung homogener Theile Massen hervorbringen, welche mit Granit, Gneus, Glimmerschiefer groſse Aehnlichkeit hatten. Und nach allen diesen Umständen glaube ich auch die Entstehung der Sandstein-Conglomerate zu den Wirkungen des Chemismus rechnen zu müssen.

Nach diesen hier aufgestellten Ansichten wird es sehr wahrscheinlich, daſs auch die so weit ausgedehnten Nagelfluhgebirge keiner Verbindung

von zerrissenen Theilen andrer Gebirge, sondern ebenfalls dem Chemismus ihr Daseyn schuldig sind. Ich bedaure hierbei herzlich, dafs ich selbst noch nicht Gelegenheit gehabt habe, diese Gebirge zu bereisen, und selbst die wenigen Stücke, die ich von dieser Steinart gesehen, waren nicht so weit in meiner Gewalt, dafs ich hinlängliche Versuche mit ihnen vornehmen konnte. Da indefs die Herren von Saussure, Ebel, Escher und auch Bernoulli als Augenzeugen über diese Gebirge und über die Steinart, aus der sie bestehen, an Ort und Stelle genaue Beobachtungen angestellt haben, so setzt mich eine aufmerksame Erwägung dieser Beobachtungen in den Stand, den obigen Satz aus ihnen herzuleiten. Nach den Beobachtungen jener sehr berühmten Geognosten hat nun die Nagelfluh

a) eine ungeheure Ausdehnung, indem sie sich an der Nordseite der Alpen auf einer Weite von 7—8 Längen-Graden und auf einer Breite von 1—$5\frac{1}{2}$ Stunden erstreckt, und in der Schweiz sich zu einer Höhe von 5000 bis 5400 Fufs, so wie bei dem Rigi zu 5725 Fufs, in Deutschland aber nur 3—4500 Fufs über die See erhebt. Die Mächtigkeit dieser Steinlager ist auch sehr beträchtlich, und Ebel führt steile Wände derselben an, welche eine Höhe von 2—4000 Fufs haben, wovon besonders der Rigi gegen den Zuger See im Canton Schwyz ein Beispiel giebt.

b) Diese grofse Gebirgskette besteht aus abgerundeten, sehr verschiedenen Steinarten, welche mit einem mergelartigen Kitt unter einander so fest verbunden sind, dafs bei dem Zerschlagen die einzelnen Kugeln eher oft zerspringen, als der Kitt nachläfst. Die Gröfse dieser Kugeln ist sehr verschieden, indem sie vom groben Sandkorn oft bis zum Inhalt von 50 und mehreren Kubikfufsen steigt, und Herr Ebel bemerkt, dafs die in mehrerer Tiefe liegenden Kugeln abgeplattet wären. Eben so verschieden ist die Steinart dieser Kugeln, indem man unter ihnen mancherlei Arten von Granit, Gneus, Porphyr, Mandelstein, von Serpentin, Kieselschiefer, Hornstein, von Feuerstein, Thonstein, Alpen-Sandstein und andern Arten antrifft.

Der Kitt dieser Trümmer ist feinkörniger, ungemein kalkartiger Mergel. Dieses Bindemittel brauset in Salpetersäure und löset sich mehr als zur Hälfte darin auf, und der Rest besteht aus kleinen durchsichtigen eckigen Quarzkörnern mit etwas grauem Thon gemengt.

c) Das Nagelfluhgebirge ist regulär geschichtet. Die Mächtigkeit dieser Schichten erstreckt sich von 4, 10, 30, ja in mehrerer Tiefe bis 50 und

und 60 Fuſs. Das Fallen dieser Schichten ist von 30, 50, 70, selten nur 15 Grad.

In der Gröſse der Stücke findet sich in diesen Schichten ebenfalls ein Unterschied, so daſs manchmal eine Schicht aus groſsen, die darauf folgende aus kleinen, die darauf folgende aus noch kleinern besteht, auf welcher wieder eine Schicht von gröſsern Stücken folgt, doch sollen in derselben Schicht die einzelnen Stücke meist nur einerlei Gröſse haben. Häufig wechseln auch die Schichten von Geschieben mit Schichten von Mergel und Sandstein ab, und es finden sich in ihnen auch Kalkspathtrümmer, welche die einzelnen Geschiebe umgeben.

d) Das Nagelfluh-Gebirge ruht auf altem Sandstein.

Wenn man diese hier angeführten Umstände erwägt, so wird man sich wohl schwerlich überreden können, daſs bei Entstehung dieser Gebirge der Mechanismus obgewaltet habe; denn

a) ist die Ausdehnung und Mächtigkeit der Nagelfluhe zu groſs, als daſs die Urfels-Gebirge die nöthige Materie dazu hergeben können.

b) Auf der Südseite der Alpen finden sich fast keine Nagelfluh-Gebirge, und doch sind die groſsen Ebenen der Lombardei mit einer ungeheuren Menge von losen Geschieben des Urfels-Gebirges bedeckt.

c) Unter diesen sogenannten Geschieben befinden sich Steinarten, welche auf dem nördlichen Urfels-Gebirge nicht vorkommen, die man aber auf der Südseite antrifft, wohin der Porphyr, Variolit, Feuerstein gehören. Ja, Herr Escher bemerkt, wie ich schon oben angeführt, in seiner Kritik über Ebel's Abhandlung über den Bau der Erde, daſs sogar die in der Nagelfluh befindlichen Kugeln von Granit und Gneus mit diesen in dem Urfels-Gebirge befindlichen Steinarten wenig übereinkommen.

d) Die reguläre Schichtung dieser Gebirge, ihre Abwechslung mit Mergel- und Sandsteinschichten, die egale Gröſse der Kugeln in derselben Schicht, die Abwechslung der Schichten mit gröſsern und kleinern Kugeln, machen das Mechanische bei dem Entstehen dieser Gebirge auch sehr zweifelhaft.

e) Ist es ferner möglich, daſs auf so steilen Flächen von 30 und mehreren Graden runde Körper hätten liegen bleiben können?

f) Wenn die tiefer liegenden Kugeln abgeplattet sind, so ist es ein Beweis, daſs sie einige Weiche gehabt haben müssen, welches man wohl von keinem gerollten Geschiebe denken kann.

Zu allem diesen setze man hinzu, daſs die Quarzkörner des Bindemittels scharf und meist durchsichtig sind, daſs die Kalkspathadern, welche häufig in der Nagelfluh vorkommen, durch einen chemischen Proceſs entstehen müssen, und ich glaube ohne Bedenken annehmen zu können, daſs auch hier nicht Mechanismus, sondern Chemismus gewirkt habe.

Freilich ist es nach unsern jetzigen Kenntnissen beinahe unmöglich, den Gang der allwirkenden Natur bei Bildung dieser Gebirge deutlich anzugeben. Allein wie viel Thatsachen bietet uns die Natur dar, welche wir deutlich erkennen, von denen wir aber leider die Art des Processes gar nicht oder nicht deutlich einsehen können. Indeſs läſst sich auch hierbei mancher muthmaſsliche Gedanke anführen. Bei dem Sandstein scheint das Gemenge der coagulirten Gasarten so beschaffen gewesen zu seyn, daſs dadurch hauptsächlich Kieselerde, wenig Alaun, Kalkerde und Wasser sich gebildet, weshalb also sich gleich krystalline Körner bilden können, so wie man sieht, daſs bei Mischung einer concentrirten Auflösung des schwefelsauren Kali in Wasser mit einer gesättigten Auflösung der Kalkerde in Salpetersäure gleich ein krystalliner Niederschlag erfolgt. Wenn sich also in diesem weichen Breie mehrere einfache Erden befanden, so konnten diese, unterstützt durch die ansehnliche Wärme, welche bei der Coagulirung der Gasarten unausbleiblich war, sich unter einander verbinden und Feldspath, Glimmer und ähnliche Steinarten bilden, welche hier wieder nach den Gesetzen der Affinität sich unter einander anziehn und gröſsere oder kleinere Massen hervorbringen konnten. Dergleichen Bildungsarten kommen im Mineralreiche häufig vor. Alle Krystalle und krystalline Körner, welche sich in dem Porphyr befinden, sind auf diese Art entstanden.

In einem grünen Porphyr unweit Rohnau im Fürstenthum Jauer finden sich Nester und Adern von Carniol. Bei den Trümmer-Porphyren erscheinen in ihrer Mitte häufig Nester von einer gelblich-drüsigen Masse, in welcher sich Glimmerblätter befinden, so wie man ein andermal in ihnen einen wahren Kieselsinter antrifft.

Eben so gehört hierher die merkwürdige Gangart von der Grube Ring und Silberschnur auf dem Harze, in welcher sich in einem wahren, ja öfters völlig krystallisirtem Quarze einzelne Stücke von Thonschiefer befinden, welche öfters mit Bleiglanz ganz umzogen sind, und die sich nach und nach aus der Mengung mit Quarz abgesondert haben. Man kann nicht glauben, daſs diese Brocken von Schiefer in die Quarzmasse hineingefallen wären,

weil sie sich überall auf dem Streichen und Fallen des Ganges in den tiefsten und auf den höchsten Punkten befinden. Ein Lager in dem Schneeberger Bergamts-Revier besteht fast ganz aus Quarz und feinen Krystallkörnern, und in diesen kommen Adern und Nester von rothem Jaspis vor, welche Umstände alle beweisen, dafs gleichartige Theile sich einander anziehn und mit einander verbinden können. Dies findet sogar bei Erzen statt. Auf dem Felix zu Kupferberg im Fürstenthum Jauer kommen mitten im derben Gelbkupfererz Kugeln von krystallinischem Schwefelkiese mit Kalkspath überzogen vor, und beweisen deutlich, dafs gleichartige Theile, welche mit einer fremden Materie gemengt, sich durch ihre Affinität gegen einander ausscheiden und in Kugeln vereinigen können. Alles, was ich bisher über die Art der Bildung der Nagelfluhe angeführt, besteht nur erst in Muthmafsungen, welche die künftige Zeit entweder noch bestätigen oder ganz verwerfen wird. Indefs steht nach meiner Ueberzeugung die Thatsache fest, dafs die Nagelfluhe ein Werk des Chemismus ist, und dafs man bei derselben an einen Mechanismus auf keine Weise denken kann, obgleich der Procefs, nach welchem die Natur hier so sehr und im Grofsen wirksam gewesen, noch im Dunkeln liegt.

Es sey mir erlaubt, zum Schlufs dieser Abhandlung noch eine Bemerkung anzuführen. Unter allen Conglomeraten ist die Grauwacke fast einzig erzführend, und zeigt uns überall, am Harz, in Siebenbürgen, am Rhein, ansehnliche Erzniederlagen von Gold, Silber, Blei, Kupfer und Eisen, so wie der Sandstein nebst der Nagelfluhe von Erzen fast ganz entblöfst sind. Der Granit kommt in diesem Betracht mit dem Sandstein und der Nagelfluhe sehr überein, wogegen die Hauptniederlagen der Erze sich in dem Gneus, dem Glimmer- und Thonschiefer, dem Porphyr, wovon das erzreiche *Saxum metalliferum* in Ungarn den klarsten Beweis abgiebt, befinden. Da es mehr als wahrscheinlich ist, dafs alle Gänge durch Spaltungen der Gebirgslager ihren Anfang genommen, so könnte man anfänglich glauben, dafs die Natur jener metallreichen Gebirgsarten zu Entstehung solcher Risse mehr geschickt waren, als Sandstein und Nagelfluh, wenn man in diesen nicht auch genug Klüfte anträfe, und wenn sich in der Grauwacke nicht so viele und reichhaltige Erzgänge befänden. Allein im Gneuse und Glimmerschiefer, im Porphyr, findet sich in erstern beiden viel Kali und im letztern viel Natrum, deren Gegenwart im Sandstein und in der Nagelfluh schwerlich vorhanden seyn möchte. Es wäre also sehr der Mühe

werth, dass einer unserer geschickten Analytiker sich die Mühe gäbe, den Thon- und Uebergangsschiefer, auch die Grauwacke, auf Kali und Natrum zu untersuchen; und fänden sich diese Substanzen auch in dem Thonschiefer und in der Grauwacke, so würde es sehr wahrscheinlich werden, dass Kali und Natrum, deren Basis metallisch ist, zur Bildung der Metalle viel beitragen möchten, zumal die Gänge auf den Punkten der zufallenden Klüfte an Erzen den reichsten Vorrath zeigen.

Ueber

die Kreide- und Feuersteinlager auf der Insel Rügen, nebst allgemeinen Bemerkungen über die Bildung der Kreide und Feuersteine.

Von Herrn Gerhard *).

Die Insel Rügen ist für den Staatshaushalter, für den Geschichts- und Alterthumsforscher und für den Geognosten gleich merkwürdig. Wenn man die vielen Buchten und Einschnitte, welche das Meer in dies Land macht, abrechnet, so wird ihre Quadratfläche ungefähr 18 □ Meilen nach der Schmettauschen Charte betragen. Auf dieser Fläche wohnen nach der neusten Zählung 27,430 Menschen, welches auf die Quadratmeile 1524 Köpfe beträgt, und sie gehört also zu den stark bevölkerten Ländern. Der Boden ist sehr fruchtbar, so daſs der Weizen 8, der Roggen 9, die Gerste 11, der Hafer 12 Körner bringt. Ihr Handel, welcher durch den Fisch-, besonders den Heringsfang sehr befördert wird, ist blühend, und man findet aus diesen Ursachen unter den Einwohnern vielen Wohlstand. Auch für die alte Geschichte ist dies kleine Land merkwürdig, und die häufigen Ueberreste von uralten Begräbnissen, die vielen dort vorgefundenen Urnen, die mancherlei entdeckten Waffen und andre Geräthschaften von Metall und Feuersteinen geben auch dem Alterthumsforscher Anlaſs zu wichtigen und lehrreichen Betrachtungen. Besonders aber öffnet diese Insel durch ihre mächtigen

*) Vorgelesen den 24. October 1816.

Kreidelager und durch die ungeheure Menge und besondere Beschaffenheit der darin vorkommenden Feuersteine auch dem Geognosten ein weites und reiches Feld zu Untersuchungen. Diese beiden letztern werden den Gegenstand dieser Abhandlung ausmachen, in welcher ich die Lage und Beschaffenheit dieser Mineralien entwickeln, hiernächst ihre Bestandtheile bemerken, und dann einige Muthmafsungen über ihre Bildung und Entstehung anführen will. Ich habe selbst nicht das Glück gehabt, diese Insel zu besuchen; allein der Herr Geheime Ober-Bergrath von la Roche hat sie in geognostischer Rücksicht vorigen Sommer auf Veranlassung der General-Bergwerks-Verwaltung bereiset und mir seine gemachte Beobachtungen mitgetheilt, über welche ich mit dem sehr fleifsigen und geschickten Beobachter derselben, dem würdigen Herrn Pastor Franck zu Bobbin, correspondirt, und aus diesen beiden Quellen kann ich über die Lage der Kreide folgende Nachrichten ertheilen. Dieses Fossil bricht hauptsächlich in Osten der Halbinsel Jasmund, von dem Dorfe Jasseniz bis zur höchsten Höhe der Stubbenkammer, eine kleine Meile weit, in schönen und öfters abwechselnden Hervorschiefsungen. Dann wird sie erst wieder sichtbar am nördlichen Ufer zu Lohm, doch nur auf eine kurze Strecke. Von Korsdorp bis zu der Schaber Erdzunge zeigen sich ganze Schichten von unreiner, mit vieler Erde gemengter Kreide. Dann kommt sie wieder bei Arkona, aber auch dort nicht rein, zum Vorschein. Das Lager auf Jasmund hat an der Stubbenkammer eine Mächtigkeit von 500 Fufs, ist von den Meeresfluthen stark ausgewaschen und in einzelne Pfeiler von 109 und mehr Fufs Höhe getheilt. Dieses Kreideufer erstreckt sich mit weniger Unterbrechung an $\frac{3}{4}$ Meilen. Das ganze Lager besteht aus Schichten, welche südlich streichen und westlich einfallen. Diese Schichten machen oft Wellen, und am Königsstuhl, der höchsten Spitze von Jasmund, stehen sie auf dem Kopfe. Man findet nur selten etwas Eisenstein unter der Kreide, welcher vermuthlich von aufgelösten Kiesen entstanden, welche man in der Kreide fast gar nicht frisch, aber häufig in dem Feuerstein findet. Auf der Hälfte der Höhe kommt eine schwache eisenhaltige Quelle zum Vorschein. Eine Meile landeinwärts von der Stubbenkammer findet sich Mergel, welcher sehr thonartig ist, und aus welchem ein schlechter Kalk gebrannt wird. Zu Sagard in dem Garten des dortigen Predigers, bricht eine schwache, mit Schwefelleberluft angefüllte Eisenquelle hervor, so wie sich auch dort ein anhaltendes Lager von Wiesenerz befindet. Auf Arcona sieht man die Kreide

überaus schön und deutlich in Lehm und Thon eingelagert, welche die Landzunge bilden. Obgleich diese Landzunge über eine Meile lang ist und eine Höhe von 2—500 Fuſs über die Meeresfläche hat, so zeigt sich die Kreide doch nur auf eine Länge von 3—4000 Fuſs, und zwar von der äuſsersten Spitze, indem das steile Ufer und groſse Wasserrisse auf der übrigen Länge nur Sand, Lehm und Geschiebe zu erkennen geben. Unter dem Wall der ehemaligen Burg Arcona sieht man zum erstenmale die Kreide sehr deutlich als Stock oder Putzenwerk eingelagert, vom Rasen an ungefähr 80 Fuſs in der Tiefe und eben so viel in der Breite. Dann folgen mit Unterbrechungen von Thon und Lehm noch zwei Kreidelager in der Mächtigkeit von 100 Fuſs und drüber, und also stärker als das obere. In diesen Lagern ist die Kreide unrein, mergelartig und eisenschüssig. Feuersteine liegen in ihnen nicht so häufig, wie auf der Stubbenkammer. An den meisten Orten ist die Kreide mit vegetabilischer Erde 2—3 Fuſs hoch bedeckt.

In diesen Kreideschichten sind Versteinerungen von Meergeschöpfen sehr häufig, wogegen aber Ueberreste von Einwohnern des süſsen Wassers gar nicht vorkommen. Von Muscheln kommen vor hauptsächlich Gryphiten, Terebratuliten, Ostraciten, Chamiten, Mytuliten; von Schnecken: Penniten, Strombiten, Heliciten häufig, Orthoceratiten selten, und von Ammoniten hat Herr Pastor Franck nur ein Stück bei Arcona gefunden. Desto häufiger und am häufigsten, kann man sagen, sind Echiniten und Belemniten, Keratorbiten, Milleporiten, Reteporiten, Tubiporiten, Vermiculiten und Madreporiten, Trümmer von Encriniten und Pentacriniten, auch versteinert Büchenholz. Fische sind gar noch nicht gefunden. Alle diese Ueberreste sind vollkommen kreideartig, und daher auch sehr zerbrechlich. Sie liegen nicht familienartig, noch weniger in einer bestimmten Ordnung, sondern irregulär und mit einander gemengt. Je reiner die Kreide ist, desto häufiger sind die Versteinerungen, und in den oben angeführten Mergelschichten fehlen sie, eben so wie die Feuersteine, ganz.

Die Belemniten zeigen eine sehr merkwürdige Erscheinung. Wenn man sie von der anklebenden Kreide rein abwäscht, so brausen sie mit Säuren nicht, sie geben sogar am Stahl Funken. Bricht man sie durch, so haben sie ein strahliges krystallines Gewebe von brauner Farbe, welches vollkommen wie ein ächter strahliger Kalkspath aussieht und auch mit Säuren stark brauset. Legt man einen solchen Belemniten in Scheidewasser, so

löst sich der Kalkspath mit starkem Brausen auf, und es bleibt ein weiſser hohler Cylinder übrig, der kaum die Dicke eines Bogen Papiers hat, und, unter dem Microscop betrachtet, als Quarz erscheint. Vor dem Löthrohr wird er weiſslich und etwas undurchsichtig, und mit kohlensauren Kali versetzt, blähet er sich auf und giebt eine wasserklare Perle. In diesem Cylinder bleibt die Markröhre stehen und ist mit Krystallen besetzt, welche sich vor dem Löthrohr allein, oder mit Kali versetzt, eben so wie die äuſsere Rinde verhalten, auch unter dem Microscop eine 6seitige Säule mit Zuspitzungen zeigen, also wirklich Quarzkrystalle sind. Durch die Güte des Herrn Pastor Franck habe ich einen groſsen Feuerstein erhalten, an welchem äuſserlich ein Echinitstachel befindlich ist, und welcher auch aus weiſsem, aber undurchsichtigen Quarz besteht, zum Beweise, daſs auch in dieser Steinart, obzwar äuſserst selten, Versteinerungen vorkommen.

Die Kreide selbst besitzt die gewöhnlichen und bekannten äuſsern Kennzeichen dieses Fossils, nur ist sie weicher und mürber als die Englische und Französische Kreide. Unter einem achromatischen Microscop, das 100mal im Diameter vergröſsert, zeigt sie nicht das geringste von einem blättrigen oder sonstigen regulären Gewebe, und sie ist aller Durchsichtigkeit beraubt. Ihr eigenes Gewicht ist etwas geringer als bei der Französischen, indem es nur 2,240 beträgt, statt es bei dieser 2,249 ausmacht.

In diesem jetzt beschriebenen Kreidelager findet sich nun eine ungeheure Menge äuſserst verschieden gestalteter Feuersteine. Diese Steine kommen theils in Schichten, theils in einzelnen Nestern zum Vorschein, doch bilden sie keine zusammenhängende Schichten, sondern liegen in einzelnen Stücken. Diese scheinbaren Schichten sind einige Zoll bis 1 Fuſs mächtig, streichen zwischen den Schichten der Kreide bald parallel, bald bogenförmig, bald mehr perpendiculär, und die Kreidepfeiler der Stubbenkammer sind mit einer Schicht dieses Steins wie mit einer Krone bedeckt. Die Gestalt derselben nähert sich meist der runden Form, so daſs man oft kugelrunde Stücke findet. Allein diese Form ist auch auf unendliche Art abgeändert, ist sehr oft zackig und nähert sich dadurch der Form eines Corallengewächses, auch gehen öfters hohle oder mit Kreide angefüllte Röhren hindurch. Eben so zeigt sie sich in hohlen inwendig mit Kreide ausgefüllten Röhren und nimmt dadurch eine knochenartige Figur an. Die Gröſse ist eben so verschieden, und man findet sie von dem Gewichte einiger Lothe bis zu 10, 20, 30 Pfund. Ja Herr Franck hat ein Stück gefunden,

funden, welches so schwer war, daſs er es nicht aufheben konnte. Die Farbe geht von dunkelschwarzgrau bis ganz hell- oder weiſsgrau über. Der dunkle ist an den Kanten durchscheinend, welches sich aber verändert oder ganz verliert, je heller die Farbe wird. Bei dem Zerschlagen giebt der dunkelgefärbte einen hellen, der hellgefärbte aber einen dumpfen Klang, und beide springen in unbestimmte sehr scharfkantige Stücke. Herr **Franck** versichert indeſs, daſs sich bisweilen, aber sehr selten, Stücke finden, welche bei dem Zerschlagen, so wie die bekannten Glastropfen, bei einem Schlage ganz in Grus zerfallen. Ich habe bis jetzt noch kein Stück von dieser Abänderung des Feuersteins erhalten, allein Herr **Franck** hat mir eine Beschreibung desselben zugestellt, welche ich mit seinen eigenen Worten hersetzen will.

„Zu den seltenen Arten des Feuersteins gehört dieser. In dem frischen „Bruch der Kreide erinnere ich mich nicht ihn gefunden zu haben, allein in den Torfmooren und in dem ausgefahrnen Teichschlamm und „im verwitterten Steinsande kommt er zwar selten, doch bisweilen vor, „und er zerspringt mit einem Schlage in viel kleine Stücke, Körner „und Splitter, welches auch die in ihm eingeschlossenen Versteinerungen thun. Auf seiner Oberfläche ist er rissig und mit weiſsen Linien „besäet, welche sich öfters kreuzen. Inwendig hat er nicht den Glanz „des Feuersteins, sondern ist matt, und ich glaube daher, daſs es eine „anfangende Verwitterung des Feuersteins ist."

So weit Herr **Franck**. Der Bruch des Feuersteins ist muschlich, und dies am deutlichsten bei den dunkel gefärbten Stücken, so wie er sich bei den heller gefärbten in das Kleinsplittrige und Ebene zieht. Bei dem Zerschlagen, besonders einiger gröſsern Stücke, läſst sich Folgendes bemerken. Im Allgemeinen wird man selten Stücke finden, welche durchaus einerlei Substanz und Farbe hätten, sondern man entdeckt helle Flecke und Stellen von verschiedener Art. Zuweilen sind es offenbare Ueberreste von Corallen. Mehrmal brausen dieselben auch schwach mit Scheidewasser. Man entdeckt ferner kleine Nester von noch wahrer Kreide, welche öfters nur in der Mitte noch weich sind und mit Säuren brausen, so wie sie sich aber der Feuersteinmasse nähern, dies nicht weiter thun und härter wer-

den. Zuweilen liegen mandelförmig hellgraue Stücke darin, welche bald mit der Feuersteinmasse unmittelbar, bald durch einen weiſsen sie umgebenden Ring mit ihr verbunden sind. Diese Mandeln haben einen feinsplittrigen Bruch und entdecken unter der Luppe das ganze Gefüge vom grauen Quarze. In einigen Stücken kommt dieser Quarz sehr deutlich in kleinen Krystallen vor, und ist durch eine dichte weiſse Masse mit der Substanz des Feuersteins verbunden. Endlich trifft man Nester von derbem Schwefelkiese in denselben an, von dessen Verwitterung wahrscheinlich die Rostflecke entstehen, welche man zuweilen in den Feuersteinen wahrnimmt.

In diesen jetzt beschriebenen Feuersteinen kommen häufige Versteinerungen vor, und zwar dieselben, welche in der Kreide erscheinen; doch sind die Belemniten, die Echiniten, die Corallen und Muscheln die häufigsten. Zuweilen sitzen diese Versteinerungen inwendig und fallen bei dem Zerschlagen entweder ganz heraus oder sie zerspringen, manchmal aber hängen sie von auſsen an und sind in den Stein eingewachsen. Ja man findet Belemniten, welche durch einen Feuerstein durchgewachsen sind, und woraus man schlieſsen muſs, daſs die Masse ehedem weich gewesen ist. Die merkwürdigste Erscheinung bieten die Muscheln dar, indem sie öfters aus Lagen bestehen, von denen die äuſsere mit Säuren nicht brauset, sondern Feuer schlägt, die folgende brauset und sich mit dem Messer schaben läſst, und die darauf folgende wieder Feuerstein ist. Eben so auffallend ist es, daſs man auſser den Feuersteinschichten mitten in der Kreide Versteinerungen findet, welche ganz in Feuerstein verwandelt sind. Man hat bisher nirgends den Feuerstein krystallisirt bemerkt, so daſs er ächte Krystalle bildete. Wenn man diesen Umstand mit andern Erscheinungen vergleicht, so muſs man fast auf den Gedanken kommen, daſs die Kieselerde in der Verbindung mit Wasser sich nicht krystallisire, und daſs also bei der Krystallisirung des Quarzes nicht das Wasser, sondern eine andere Substanz die Krystallisation bewirkt habe, besonders da der Quarz auch weniger Wasser enthält als der Feuerstein. Denn einmal hat man in dem Geiser Tuff noch keine Krystallisation wahrgenommen. Ferner kommen in den Agathkugeln die Quarzkrystalle an dem sie umgebenden Kiesel, sodann in der Mitte derselben vor, und endlich sind die aus Kieselerde und Wasser bestehenden Steinarten, als der Opal und andere in diese Abtheilung der Kieselordnung

gehörige, noch nicht krystallisirt gefunden worden. Nun verlieren zwar die Feuersteine, so wie man sie gemeinlich im trockenen Zustande erhält, um 2½ Prct. im Glühfeuer. Allein nach den Beobachtungen von Dolomieu ist der frische Feuerstein, so wie er von seiner Lagerstätte kommt, durch und durch feucht, und verliert diese Feuchtigkeit an der Luft. Da mir Herr von la Roche einige ganz neuerlich und bei seiner Anwesenheit frisch gebrochene Stücke mitbrachte, so setzte ich 100 Gran dem hiesigen Porzellanfeuer aus, welche in demselben 6 Gran oder 6 Prct. verloren. Das eigenthümliche Gewicht der Rügenschen Feuersteine beträgt 2,336, und sie unterscheiden sich in Härte, Sprödigkeit und andern äußern Eigenschaften nicht von dem Feuerstein anderer Gegenden.

Diese jetzt beschriebene Kreide-Formation kommt mit den auf den Dänischen Küsten, besonders auf Stevensklint und auf der Insel Moen, nach den Nachrichten, welche Herr Abilgard von ihnen gegeben, in allen Hauptsachen überein, nur finden sich auf Stevensklint und auf Moen viele und große Kiesballen, welche in den Rügenschen Kreidelagern theils fehlen, theils sich in Eisenoxyd umgewandelt haben. Sie scheinen auch nicht von dem großen Umfange wie die Dänischen gewesen zu seyn, da auf Rügen Nester solcher eisenschüssigen Kreide nur sehr klein sind; dagegen bemerkt Abilgard nichts über das Daseyn des Schwefelkieses in den dortigen Feuersteinen, dergleichen sich auf Rügen zeigt, und außerdem ist die Dänische Kreide auch etwas härter und fester als die Rügensche. Diese Kreide-Formation endet sich aber an der Pommerschen Küste nicht bei Rügen, sondern sie kommt bei Wolgast und besonders auf der Insel Wollin wieder zum Vorschein, an welchem letztern Orte ein ziemlich guter Kalk aus derselben gebrannt wird. Allein in Wollin, wo ich selbst gewesen, ist die Kreide sehr weich und mergelich, und ich habe keine Versteinerungen in derselben bemerkt. Die darin ebenfalls befindlichen Feuersteine erscheinen in großen auch abgerundeten Stücken, in welchen man bei dem Zerschlagen viele Nester von mürber oder halb verwitterter Kreide und in denselben wieder manchmal kleine Nester von Feuersteinen antrifft. Von Wollin an bis Colberg kenne ich durch eigene Bereisung die ganze Küste ziemlich genau, allein ich habe weiter an keinem Orte Schichten von Kreide

entdecken können, ob man gleich an mehreren Punkten zu deren Auffindung Bohrlöcher gestoſsen hat.

Ich komme nunmehr zu den Bestandtheilen und den chemischen Verhältnissen dieser beiden Steinarten. Vor dem Löthrohr ändert sich die Kreide gar nicht, auſser daſs sie härter wird und weniger abfärbt. Auch vermittelst des Microscops kann man keine Veränderung alsdann wahrnehmen. 200 Gran dieser Kreide in einem Stücke wurden im Kohlentiegel dem stärksten Feuergrade der hiesigen Porzellan-Fabrik ausgesetzt und hatten am Gewicht 96 Gran verloren, und waren, mit Ausnahme der mehrern Härte und des wenigern Abfärbens, unverändert geblieben.

Eine Quantität dieser zerriebenen Kreide wurde auf einer Porzellanschale unter einer Glocke den brennenden Sonnenstrahlen zwei Tage hinter einander, an welchen ein accurates Thermometer Mittags 22 Grad Reaumur Wärme zeigte, ausgestellt, allein ich bemerkte nichts von Entbindung von Wasser und das Gewicht hatte sich auch nicht verändert. Von dieser an der Sonne getrockneten Kreide wog ich 100 Gran ab, und trug sie in ein hohes abgewogenes cylindrisches Glas, in welchem sich eine ebenfalls abgewogene Quantität Salpetersäure befand, nach und nach ein. Die Auflösung erfolgte schnell und mit starkem Aufbrausen, und es blieben einige hellbraune Flocken zurück. Nach geschehener Auflösung wog alles 47 Prct. weniger als vorher. Der Rückstand wurde von der Auflösung durch ein Filtrum geschieden, und wog ausgesüſst und getrocknet 3,50 Prct. und sahe sehr hellbraun aus, so wie die Auflösung selbst ganz hell und wasserklar war. Aus dem Rückstande zog Salzsäure 0,50 Eisenoxyd heraus, und das übrige war Kieselerde, indem sie mit Kali vor dem Löthrohr sich mit Brausen zu einer weiſsen Glasperle verwandelte. Die wasserhelle Auflösung wurde mit reinem Ammonium übersetzt, wobei weiſse Flocken zu Boden fielen, welche getrocknet 2 Prct. wogen. Ich digerirte diesen Niederschlag in kochendem flüssigen entzündenden Kali, in welchem er sich gar bald mit Zurücklassung einiger unwiegbaren braunen Flocken ganz auflöste, und also bewies, daſs er aus Alaunerde bestand. Die mit Ammonium übersetzte salpetersaure Auflösung wurde mit Salpetersäure neutralisirt, und hierauf mit flüssigem kohlensaurem Kali vermischt, bis kein Niederschlag

mehr erfolgte. Nachdem dieser durchs Filtrum geschieden, ausgesüfst und getrocknet worden, wurde er in Salpetersäure aufgelöst und kochend mit kohlensaurem Kali niedergeschlagen. Dieser ausgesüfste Niederschlag wurde bei heftigem Feuer geglühet und wog alsdann 47,50 Prct.

Aus diesen Versuchen ergeben sich nun die Bestandtheile der Rügenschen Kreide in 100 folgend:

Kohlensäure - - -	47.
Reine Kalkerde - - -	47,50.
Alaunerde - - -	2.
Kieselerde - - -	3.
Eisenoxyd - - -	0,50.
	100.

Nach Herrn Buchholz enthält eine von ihm untersuchte Kreide:

Kohlensäure - - -	43.
Kalk - - - -	56,50.
Wasser - - - -	0,50.

Betreffend die chemischen Eigenschaften und Verhältnisse der Feuersteine, so unterscheiden sie sich fast gar nicht von den bisher bekannten Arten derselben. Auch die schwärzesten von ihnen werden im Feuer milchweifs, völlig undurchsichtig, weicher und mürber, schwellen etwas auf und verlieren 3 Prct. Wenn man zwei reine Stücke derselben an einander reibt, so phosphorisiren sie mit einem rothen Schein und haben einen starken brenzlichen Geruch; anstatt dafs, wenn zwei Stücke Quarz an einander gerieben werden, der Feuerschein weifser und heller und der brenzliche Geruch schwächer ist. In Stücken von der Gröfse eines Hanfkorns zerschlagen und auf ein glühendes Eisenblech geworfen, prasselt er, zerspringt und wird weifs. Aus einer gläsernen Retorte destillirt, zeigt er eine geringe Spur von Kohlensäure und einige Tropfen Wasser, aber keine Spur von brennbarem Wesen. Zu feinem Pulver gerieben und in schmelzenden Salpeter eingetragen, erregen sie eine schwache Verpuffung, welche desto stärker ist, je schwärzer der Stein ist. Aus diesen Umständen und aus dem gänzlichen

Weiſswerden der Feuersteine im Glühfeuer kann man wohl mit Recht schlieſsen, daſs dieselben etwas Kohle in sich führen. Alle diese Beobachtungen hat Dolomieu bei den Französischen Feuersteinen gemacht, und sie finden sich auch bei den Rügenschen bestätigt. Mit Kali versetzt schmelzt er zu einem weiſsen völlig durchsichtigen Glase, dessen Eigengewicht aber gröſser ist als eines Glases, welches aus dem reinsten Quarz und Kali in gleichen Verhältnissen der beiden Ingredienzien hervorgebracht wird.

Ich habe ganz reine dunkelschwarze Feuersteine von Rügen ganz nach der von Herrn Klaproth in dem ersten Theile seiner Beiträge S. 17 angegebenen Methode zerlegt, und gefunden, daſs in 100 Theilen derselben enthalten sind:

Kieselerde - - - - - -	94.
Alaunerde - - - - - -	1,50.
Kalkerde - - - - - -	1.
Eisenoxyd - - - - - -	0,50.
Flüchtige Theile, Wasser und Kohle - -	3.
	100.

welches von der Analyse dieses berühmten Chemisten wenig abweicht. Herr Vauquelin hat die weiſsen undurchsichtigen Stellen aus den Französischen Feuersteinen besonders zerlegt und in ihnen 2—5 Prct. Kalkerde gefunden. Eben dies findet bei den Rügenschen statt, in denen ich in solchen Stellen 4 Prct. angetroffen, ja in denen von der Insel Wollin zeigen sich 8 Prct. Kalkerde, ob ich gleich die vorher fein zertheilten Stückchen derselben mit Scheidewasser gemengt, um alle bloſs anhängende Kalktheile von ihnen abzusondern. Vergleicht man die oben bemerkten Bestandtheile mit denen, welche berühmte Chemisten in dem Chalcedon, in dem Carniol und in dem Hornstein gefunden haben, so ist die Uebereinkunft sehr groſs, und man wird dadurch verleitet, diese Steine unter einerlei Gattung zu bringen und für Arten dieser Gattung zu halten, zumal in der Natur so häufige und deutliche Uebergänge einer Art in die andere vorkommen. Ich kann nicht unberührt lassen, daſs der sogenannte Holzstein oder das in

Kiesel versteinerte Holz in allen seinen chemischen Eigenschaften und Verhältnissen mit dem Feuerstein völlig übereinkommt. Wenigstens habe ich dies bei dem schwarzen Agathholze von Coburg gefunden. Auch dies wird in der Glühhitze weiſs, macht mit schmelzendem Salpeter eine schwache Verpuffung, und hat 2 Prct. mehr an Kalkerde, wogegen aber der Verlust an flüchtigen Theilen 1 Prct. weniger beträgt. Das Gefüge der Theile ist bei dem Holzstein gegen den Feuerstein verschieden, da dieser im Längenbruche einen feinsplittrigen, im Queerbruche aber einen flachmuschlichen Charakter hat. Nun entsteht die doppelte Frage: wie sind die Kreidelager an der Pommerschen und Dänischen Küste und überhaupt entstanden, und wie haben sich die in ihnen befindlichen Feuersteine gebildet? Daſs die Kreidelager eine jüngere Formation ausmachen, ist schon daraus sehr klar, da sie unmittelbar an das flache Land anstoſsen; daſs sie in den Meeresgründen gebildet worden, beweisen so viele in ihnen befindliche Versteinerungen von Meergeschöpfen, und in den Pommerschen, Dänischen und Englischen Kreidelagern sind, so viel mir bewuſst, keine Ueberreste von Landschnecken gefunden worden. Auf eine Verwitterung von Kalkstein und ihren Uebergang in Kreide läſst sich deshalb nicht wohl denken, weil wir an so vielen Orten die Küsten mit Kalkstein eingefaſst finden, bei welchem sich nichts von dergleichen Auflösung gezeigt hat oder noch zeigt, wovon die Küsten am mittelländischen Meere den deutlichsten Beweis abgeben.

Ohne mit Büffon und andern zu behaupten, daſs aller Kalkstein aus verwitterten Seegeschöpfen entstehe, ist es mir doch sehr wahrscheinlich, daſs die jetzigen Kreidelager, besonders die sehr mächtigen an der Pommerschen, Dänischen und an der Französischen und Englischen Küste, Corallen- und Austerbänke gewesen, welche bei dem Durchbruch der Ostsee in die Nordsee zwischen Pommern und Dänemark, und bei dem Durchbruch dieser in den Ocean durch den Kanal, entblöſst, in der Folge der Zeit aufgelöst und in Kreide zerfallen sind. Denn man kann als eine unleugbare Wahrheit annehmen, daſs die Ostsee in uralten Zeiten ein Landmeer gewesen ist, und daſs der Damm, welcher diese und die Nordsee trennte, höchst wahrscheinlich aus Schonen über die jetzigen Inseln Moen und Femern bis an die Gränze des Herzogthums Meklenburg gegangen sey, in welcher Gegend auch an der Pommerschen und Dänischen Küste sich die

stärksten Kreidelager zeigen. Wie nun bei den Durchbrüchen, welche dieser Damm erlitt, der Stand des Wassers in der Ostsee niedriger werden mufste, so konnten diese Corallenriffe zum Vorschein kommen, und dies noch mehr, nachdem auch die Nordsee durch den Kanal zwischen Frankreich und England durchbrach; und daraus läfst sich auch die auf Rügen an 500 Fufs hoch über den Spiegel der See hervorragende Höhe der Kreide erklären, so wie ähnliche Erhöhungen derselben am Kanal auf der Französischen und auf der Englischen Küste. Diese Durchbrüche müssen in den frühesten Zeiten sich ereignet haben, denn in den ältesten Schwedischen, Dänischen und Pommerschen Annalen findet sich keine Nachricht davon, obgleich diese Länder seit den ältesten Zeiten bewohnt gewesen sind. Der verstorbene Ober-Consistorial-Rath Zöllner hat mit der höchsten Wahrscheinlichkeit in seiner Reise nach Pommern und der Insel Rügen bewiesen, dafs bereits zur Zeit des Tacitus Rügen bewohnt war, und die vielen in Kieselsteinen gesprengten Waffen, welche man auf Rügen findet, beweisen deutlich das hohe Alter ihrer Bewohnung.

Wenn man die Dicke und Stärke der Versteinerungen, welche in Feuerstein übergegangen sind, erwägt, die oft mehrere Zoll betragen, und dabei bedenkt, dafs der Pfahl aus der Trajansbrücke, welchen Kaiser Franz I. ausziehn liefs, kaum $\frac{1}{4}$ Zoll stark versteinert war, so giebt auch dies einen Beweis von dem hohen Alter dieser Lager. Diese Umstände widerlegen auch den Einwurf, dafs man in den in der Südsee befindlichen Corallennestern keine Verwandlung in Kreide wahrgenommen hat, weil sie meist noch unter Wasser stehen. Wollte man auch sagen, dafs die Corallengewächse dem nördlichen Klima nicht eigen waren, so läfst sich einmal nicht angeben, ob die nordischen und die mehr südlichen Corallengewächse von einerlei Art gewesen, und wenn sie von einerlei Art gewesen, welches fast zu vermuthen, da man heut zu Tage keine dergleichen Absetzungen mehr in den nördlichen Gewässern findet, so findet derselbe Fall statt, der bei den Thieren und bei den Pflanzen statt hat, welche jetzt blofs in tropischen Gegenden zu Hause gehören, und welche man in dem beeisten Norden in der Erde vorfindet: eine Erscheinung, welche sich auch nach meiner Theorie über die Bildung der Erde aus blofsen Gasarten sehr leicht erklären läfst, da wegen des alsdann so häufig frei gewordenen Wärmestoffs

die

die Polargegenden die Temperatur der jetzigen tropischen gehabt haben müssen. Man darf sich auch über die grofse Ausdehnung der Kreideschichten nicht wundern, wenn man die grofse Ausdehnung der entdeckten Corallenriffe erwägt. Hat man doch ganz kürzlich an der Englischen Küste eine Austerbank, $\frac{3}{4}$ Deutsche Meilen lang und $\frac{1}{4}$ Meile breit, beobachtet.

Da man nun überdem in den Kreidebänken so häufig Ueberreste von Corallengewächsen und von Austerschaalen findet, so machen alle diese Umstände den behaupteten Ursprung derselben sehr wahrscheinlich. Allein ich kann auch ein chemisches Argument dafür anführen. Wie mir der Gedanke einfiel, die heutigen Kreideschichten möchten unalte aufgelöste Corallenbänke seyn, war ich begierig zu wissen, ob die Bestandtheile der Corallen mit denen der Kreide eine grofse Aehnlichkeit hätten. Ich untersuchte also weifse Corallen auf eben die Art, deren ich mich oben bei der Kreide bedient, und fand zu meinem grofsen Vergnügen, dafs, mit Ausnahme von 2 Prct. Alaunerde, die sich in den Corallen mehr befinden, die Bestandtheile quantitative und qualitative ganz dieselben waren.

Was nun den Ursprung der in der Kreide befindlichen Feuersteine betrifft, so glaube ich mit Gewifsheit, wenigstens mit einer Gewifsheit als bei einer solchen Materie möglich ist, behaupten zu können, dafs sie durch eine Umwandlung der Kalkerde in Kieselerde entstanden sind. Ich habe diese Meinung bereits im Jahre 1787 in einer Abhandlung über die Umwandlung der Steinarten vorgetragen, aber damals wenig Beifall gefunden, weil man mir entgegensetzte, es sey der Kunst noch nicht gelungen, etwas Aehnliches hervorzubringen. Allein damals waren auch die Schraderschen Versuche über die Vegetation, nnd noch mehr die wichtige Beobachtung des berühmten Vauquelin, dafs die Kieselerde des Hafers sich in den Eingeweiden der Hühner in Kalkerde verwandle, noch nicht bekannt, aus welchem letztern Versuche man doch schliefsen mufs, dafs dieser Uebergang vielleicht durch Zusatz des Azot oder der Kohle, oder durch beides erfolge. Selbst wenn man die Sache ganz *a priori* betrachtet, so scheint sie nichts widersprechendes in sich zu haben. Alle Chemisten kom-

men überein, daſs unsere sogenannten Elementarerden noch zusammengesetzt sind, und die Versuche des berühmten Davy bestätigen es vollkommen. Es muſs ferner in allen Reihen ähnlicher Körper eine gewisse allgemeine Substanz zum Grunde liegen, von welcher die allgemeinen Eigenschaften derselben entstehen, und die specifiquen Unterschiede bei ihnen müssen von beigemischten andern Substanzen oder von dem quantitativen Verhältniſs der Mischungstheile herrühren. Wird also eine oder die andere der letzten von ihnen geschieden oder zugefügt, so muſs dies nothwendig specifische Unterschiede bewirken. Die Anwendung dieser allgemeinen Sätze läſst sich leicht auf die Umwandlung der Elementarerden machen. Daſs aber wirklich die Feuersteine in der Kreide aus derselben entstanden sind, scheinen folgende Gründe deutlich zu beweisen. Einmal findet man den Feuerstein fast nur ausschlieſslich in der Kreide und in dem Kalkstein der dritten Formation, oder in dem sogenannten Muschelkalk, von welchem letztern, nach den schönen Beobachtungen des Herrn von Carosi, die Gallizischen Kalklager deutlich überzeugen. Beobachtet man ferner Feuersteine in ihrer natürlichen Lage in der Kreide, so wird man allezeit finden, daſs die Kreide, wo sie sich den Feuersteinen nähert, härter wird. Ferner, schlägt man Feuersteine auf, so trifft man in ihnen häufig noch Nester von Kreide an, welche lebhaft mit Säuren aufbrausen. Diese Nester zeigen mehr Verhärtungen, die immer schwächer brausen und bei mehrerer Verhärtung dieses gar nicht mehr thun, und zuletzt endigen sie sich in wahren Feuerstein, ohne daſs man auch unter dem Microscop nur die geringste anderweitige Verbindung, vielmehr bloſs eine unmittelbare Continuation eines in das andere wahrnimmt und wahrnehmen kann. Noch mehr, bei Muschelversteinerungen aus der Kreide ist es gar nicht selten, Stücke zu finden, in denen kalkige mit Säuren brausende Lagen mit Feuersteinen abwechseln, und daſs diese Abwechselung sich sogar wiederholet. Ich besitze ein groſses Stück Feuerstein von der Insel Wollin, in welchem sich ein ansehnliches Nest Kreide befindet, und in welchem hinwieder ein kleiner Feuerstein steckt. Eben diesen unmittelbaren Uebergang vom Kalkstein zum Feuerstein findet man in Gallizien, wo, ohne die geringste anderweitige Verbindung, kleine Kalk- und Kieselschichten

kaum ein Viertel Zoll stark mit einander abwechseln. Man beobachtet daselbst weiter, daſs dieselben kleinen Schichten aus beiden Steinarten, die sich in einander verflossen, bestehen, so wie man ganze Stücke von Feuerstein antrifft, welche aus lauter Lagen dieser Steinart bestehen.

Dolomieu bemerkt von den Französischen Feuersteinen, daſs, wenn sie frisch aus der Kreide kommen, sie mit einer einige Linien dicken Rinde von kreideartigem Ansehn und einer minder dichten Textur eingehüllt sind, und daſs sie, wenn ihnen diese natürliche Rinde entzogen wird und sie lange an der Luft liegen, eine ähnliche Rinde erhalten, und wobei sie bis in das Innere hinein weich und mürbe werden, auch 2 Procent ihres eigenthümlichen Gewichts verlieren, und nach Vauquelin's Analyse der natürlichen Rinde enthält sie 9,88 Kalkerde. Aus allen diesen Umständen scheint mir die Bildung der Feuersteine und Kreide gewiſs zu seyn. Wie diese Umwandlung sich ereignet, wage ich nicht zu bestimmen, da die Natur der einfachen Erden noch zu unbekannt ist. Hat die Kalkerde, um Kieselerde zu werden, eines Zusatzes bedurft, vielleicht der Kohle? oder ist von ihr etwas geschieden worden, was sie zur Kalkerde machte und sie zur Kieselerde zurückbrachte? Dies läſst sich nach unsern jetzigen chemischen Kenntnissen nicht bestimmen. Buffon und mit ihm unser unvergeſslicher Pallas meinten, daſs der Feuerstein aus Thon entstände. Eine Beobachtung des letzten berühmten Naturforschers, welche er im ersten Theil seiner Reisen Seite 15 anführt, giebt dieser Meinung ein groſses Gewicht. Er fand nämlich, daſs die in der Moscua in Menge befindlichen Haselwürmer den Thon häufig durchbohrten, und dicht neben einander stehende Canäle bildeten, dergleichen sich auch in dem bereits verhärteten Thon befinden. Nun beobachtete er auf den Feldern dieser Gegend nicht selten Feuersteine, welche auf gleiche Art durchlöchert waren, und er schloſs also daraus, daſs sie aus diesem verhärteten Thon ihren Anfang genommen. Eben so trifft man in Gallizien verhärteten Thon an, welcher ganz mit Feuersteinschichten so durchzogen ist, daſs ein unmittelbarer Uebergang aus dem verhärteten Thon in den Feuerstein statt hat. Diese Beobachtungen be-

weisen also nichts weiter, als daſs eine doppelte Entstehungsart der Feuersteine statt findet. Dergleichen Umwandlungen eines Minerals in ein anderes sind nicht selten. Ich habe in mehreren Abhandlungen deutlich erwiesen, daſs sich der Serpentin bei Kosemuz und Grache in Pimelit umwandele, daſs dieser durch verschiedene Erhärtungsgrade in Opal und Chrysopras übergehe. Die Umwandlung des Feldspaths in Porzellanerde zu Aue bei Schneeberg ist bekannt, und sie ist um so gewisser, weil man in der Porzellanerde noch Stücke von unaufgelöstem Feldspath und von angefressenen Quarzkrystallen findet. Der Granit, der Gneus, der Glimmerschiefer zerfallen in Thon und letzterer in Speckstein. Bei Gieren in dem Glimmerschiefer findet sich eine ganze Schicht Schuppenthon, in welcher man die aufgelösten Glimmerblätter noch deutlich erkennen kann. Der Fürst Gallizin hat schon längst die Beobachtung mitgetheilt, daſs in dem Granit bei Aschaffenburg der Quarz in Thon übergehe, welche Beobachtung aber dadurch verdächtig wurde, ob nicht der gefundene Thon von aufgelöstem Feldspath entstanden. Allein mein Sohn, der Ober-Berghauptmann Gerhard, hat bei seiner diesjährigen Bereisung der Rheinbergwerke Gelegenheit gehabt, eine überzeugende Beobachtung darüber anzustellen. Unweit Horhauſs im Siegenschen streicht ein $1\frac{1}{2}$ Klafter mächtiger Gang von braunem mit Glaskopf gemengten Eisenstein, dessen Gangart ein milchweiſser gemeiner Quarz ist. Auf diesem Gange nun findet man den Quarz in sehr geringen Entfernungen ganz frisch und hart mit dem gewöhnlichen splittrigen Bruche bald sandartig zerfallen, aber scharf noch anzufühlen, bald weicher und am Gefühl schiefrig, bald als wahren weiſsen Thon. Das merkwürdigste bei solchen Umwandlungen aber ist, daſs ausgebildete ächte Krystalle mit völliger Beibehaltung ihrer Krystallform sich in andere Steinarten umwandeln, und daſs sogar bei Erzen dieses erfolgt. Beweise hiervon sind:

a) Die würflichen Brauneisensteinkrystalle zu Beresova, mit denen der tessulare Schwefelkies im braunen Eisenstein von gleicher Form übergeht. Eben so habe ich durch die Güte des Herrn Professors Hausmann das Schwefelkies-Dodekaëder im braunen Eisenstein aus den jüngsten Lagern der Muschelkalkstein-Formation von Uſſen an der

Weser erhalten. Herr Ullmann, in seiner systematisch-tabellarischen Uebersicht der mineralogisch einfachen Fossilien, S. 507—510, führt mehr dergleichen Fälle an, und man findet sogar in dem zu Brauneisenstein verwandelten Krystalle inwendig zuweilen noch Körner von Kies, zuweilen auch Höhlen, welche an den Wänden mit braunem Eisenoxyd bekleidet sind.

b) In dem Fassathal in Tyrol findet man die schönsten Augitkrystalle im frischen Basalt, und wenn derselbe sich aufzulösen anfängt, so gehn diese Krystalle in Krystalle von Grünerde über.

c) Der Herr Edelgestein-Inspector Breithaupt hat in seiner schönen Abhandlung über die Aechtheit der Krystalle, so wie vor ihm Herr Steffens, hinlänglich bewiesen, daſs die in dem Bareuther Speckstein befindlichen Krystalle, welche bald die Gestalt des Quarzes, bald die des Braunspaths-Rhombus, bald die der dreiseitigen Kalkspath-Pyramide haben, aus denselben entstanden sind, welches man auch um so sicherer behaupten kann, da man bisher als ein allgemeines Gesetz anerkannt hat, daſs Krystallisations-Verschiedenheiten einer und derselben Substanz Reihen oder Gruppen bilden, wo die Verwandtschaft unter einander durch unmittelbare Uebergänge nachgewiesen werden kann.

d) In dem stark aufgelösten Porphyr bei Flachenseiffen im Herzogthum Jauer ist die 6seitige flache Säule mit 4 auf den Seitenkanten aufgesetzten Flächen, und die 4seitige mit 4 ungleichen Flächen zugespitzte des Feldspaths in dergleichen Säulen von Steinmark übergegangen. Das merkwürdigste bei diesen Umwandlungen ist die groſse Veränderung der Bestandtheile in dem quantitativen und qualitativen Verhältnisse. So hat Herr Klaproth in der Porzellanerde von Aue und in den Krystallen des Steinmarks von Flachenseiffen keine Spur Kali gefunden, ja das Verhältniſs der Kiesel- und Alaunerde in beiden ist nicht mehr dasselbe wie bei dem Feldspath. Wollte man auch einwenden, daſs dergleichen Veränderungen ohne den Beitritt der äuſsern Luft nicht erfolgen konnten, so wird man doch nicht läugnen können, daſs überall in der Erde Luft anzutreffen sey. Wenn man einen jungen süſsen

Ungarischen Wein auf Flaschen zieht, dieselben bis an den Pfropf füllt und verpicht, so verändert sich Geschmack und Farbe nach und nach sehr ansehnlich, die Süſsigkeit vergeht fast ganz, der Geschmack wird herber und die Farbe dunkelbraun. Und doch kommt auch hier keine äuſsere Luft hinzu. Wer wird sich wohl rühmen wollen, die Natur aller in dem Schooſs der Erde befindlichen Gasarten und ihre Wirkung auf andere Körper zu kennen? Der scharfsinnige Steffens hat wohl Recht, wenn er behauptet, daſs die Function der Fossilienbildung viel höher liegt, als die analytische Chemie uns bisher zu führen vermocht hat.

Bemerkungen

über

die chemische Zergliederung organischer Substanzen überhaupt und der Getreidearten ins Besondere.

Von Herrn S. F. Hermbstaedt *).

Während in der neuern Zeit die chemische Zergliederung der Fossilien und Mineralien, so wie die der anorganischen Substanzen überhaupt, auf eine sehr hohe Stufe der Sicherheit und Vollkommenheit gebracht worden ist, ist die der organischen Erzeugnisse um so weniger bearbeitet worden; so daſs man alles was darin geleistet worden ist, wenigstens bei den meisten, als unvollständig betrachten muſs.

Der zureichende Grund hievon liegt theils in der gröſsern Mühseligkeit, welche die genaue Analyse eines organischen Körpers im Verhältniſs zum anorganischen erfordert, theils aber auch in der Natur des Gegenstandes, der Complication seiner Grundmischung, der leichten Veränderlichkeit der getrennten Gemengtheile und Mischungstheile durch den Einfluſs äuſserer Potenzen.

Die anorganischen Naturerzeugnisse, besonders die metallfreien Fossilien, sind selten einer Veränderung ihrer Grundmischung unterworfen, wenn sie dem Fundorte entnommen und anderwärts aufbewahrt werden.

*) Vorgelesen den 13. November 1817.

Die Mineralien, besonders die durch Schwefel und Arsenik vererzten Metalle, können sich freilich zuweilen oxydiren, wenn sie der feuchten Atmosphäre ausgesetzt werden; sie erleiden dadurch eine bedeutende Veränderung ihrer Grundmischung, die aber auf der Stelle so sichtbar ist, daſs sie nicht leicht verkannt werden kann.

Endlich sind die Mischungstheile der anorganischen Naturerzeugnisse in der Regel so einfach, daſs sie, einmal getrennt, nicht leicht eine bedeutende Veränderung durch äuſsere Potenzen erleiden, weil sie entweder an sich selbst schon chemische Elemente ausmachen, oder aus solchen Prinzipien gebildet sind, die weder unter sich, noch durch äuſsere Einflüsse eine chemische Wechselwirkung veranlassen: daher auch die Resultate ihrer chemischen Zergliederung, in jedem Zeitraume angestellt, sich gleich bleiben.

Anders verhält es sich dagegen mit den organischen Erzeugnissen der Thier- und Pflanzenwelt. Die Natur bietet sie dem Forscher belebt dar; und ein neues Leben beginnet in ihren Theilen, wenn das erstete vernichtet ist. Man muſs ihnen billig ein zwiefaches Leben zuerkennen, ein organisches und ein entorganisirendes. Die Functionen des erstern sind, sie aus ihrem Embryo zu entwickeln und ihr Gebilde zu erzeugen; die des letztern sind, das organische Gebilde zu vernichten und neue Produkte aus ihren Elementen zu erzeugen, die den Gesetzen der organischen Thätigkeit nicht mehr unterworfen sind; wenn gleich die Fortdauer einer regsamen produktiven Kraft dabei nicht verkannt werden kann, deren Endresultat oft in Erzeugnissen bestehet, die vorher nicht geahnet werden konnten.

Der natürliche Zustand der gemengten organischen Erzeugnisse ist nicht konstant; sie werden oft in dem Moment verändert wo sie getrennt werden. Daseyn der Feuchtigkeit, Abwesenheit derselben, erhöhete Temperatur, sind hinreichend, ihren chemischen Charakter total zu verändern, wo nicht ganz zu vernichten, so daſs nun an eine Trennung ihrer Gemengtheile nicht mehr gedacht werden kann.

Alles dieses sind Erscheinungen, die es nicht gleichgültig machen, zu welcher Zeit und unter welchen Umständen die chemische Analyse einer organischen Substanz veranstaltet wird, ob im frischen oder im getrockneten Zustande u. s. w.

Zwar hat die chemische Analyse organischer Erzeugnisse in der neuern Zeit manchen groſsen Fortschritt gemacht; es sind neue Stoffe in

ihnen

ihnen erkannt worden, deren Daseyn man vorher nicht ahnete; es sind bestimmte Reagentien ausgemittelt worden, um das Daseyn bestimmter Mischungstheile in ihnen zu begründen; es sind Scheidungsmittel ausgeforschet worden, um jene von einander zu trennen. Bei alledem hat man aber bei der Analyse derselben Umstände aus den Augen gelassen, die wohl erwogen werden mufsten, wenn man in den Erfolgen der Analyse zu wahren, nicht zu scheinbaren Resultaten gelangen wollte.

Zwei überaus wichtige Stoffe unter den nähern Bestandtheilen der organischen Erzeugnisse der Thier- und Pflanzenwelt, die durch die Leichtigkeit, mit der sie ihre Natur verändern, die Analyse derselben erschweren, sind der Eiweifsstoff und der Extraktivstoff. Jener verändert seine Natur beim Austrocknen total, erhärtet, und ist nicht mehr scheidbar von den übrigen Materien. Der Extraktivstoff zeigt ein so grofses Bestreben zur Verbindung mit dem Sauerstoffe, dafs er unter der Hand solchen einsaugt und eine durchaus veränderte Beschaffenheit davon annimmt.

Daher sehen wir ganz andre Resultate der Analyse zum Vorschein kommen, je nachdem ein organischer Körper, im frischen oder im schon getrockneten Zustande, derselben unterworfen wird.

Beim Austrocknen erhärtet der Eiweifsstoff und verliert seine Mengbarkeit mit dem Wasser, so dafs nun seine Scheidung von der Fasersubstanz unmöglich wird. Beim Austrocknen oxydirt sich der Extraktivstoff, verliert seine Lösbarkeit im Wasser, und nimmt eine der natürlichen entgegengesetzte Beschaffenheit an.

Nicht weniger Veränderung erleidet das aetherische Oel in denjenigen Substanzen, welche damit begabt sind. Ist der Körper der Pflanze frisch, so findet das aetherische Oel sich in einzelnen Organen enthalten. Wird sie getrocknet, so verdunstet ein Theil ganz; ein anderer durchdringt die ganze Substanz der Pflanze und ertheilt ihr Geruch und Geschmack; ein dritter Theil oxydirt sich durch die Einsaugung des Sauerstoffes aus dem Dunstkreise und gehet in die verdickte harzartige Beschaffenheit über.

Ein merkwürdiger Stoff, wenn auch nicht in allen, doch in vielen Pflanzen, der bei der chemischen Analyse derselben vieles erschwert und die gröfste Schnelligkeit der Arbeit absolut nothwendig macht, ist das natürliche Ferment, welches besonders in den Säften der Früchte und Beeren, aber auch in dem Körper vieler Pflanzen angetroffen wird: ein Stoff, der

die gröfste Aufmerksamkeit der Analysten erheischet, dessen specifike Natur noch erst erforschet werden mufs.

Jenes Wesen ist nur so lange in seiner Natur unverändert, als der Lebensreiz der Pflanze ungestört bleibt; die geringste Störung desselben setzt solches aber in chemische Thätigkeit, und ein Erfolg der Fermentation, mit welchem eine totale Veränderung in der Grundmischung der Pflanze begleitet ist, ist die Folge davon.

Jenes natürliche Ferment liegt in den Pflanzen mit mannigfaltigen andern Theilen so innig verbunden, dafs solches für sich, im völlig reinen Zustande, nicht leicht dargestellt werden kann. Vielleicht ist es in sich selbst ein Produkt mehrerer Materien, die nur im Conflict thätig seyn können, welches alles erst durch eine genauere Untersuchung ausgemittelt werden mufs.

Was wir bei den Vegetabilien wahrnehmen, findet in einem noch weit höhern Grade bei den thierischen Erzeugnissen statt; hier sind die Gemengtheile noch weit komplicirter und ihre Veränderung erfolgt noch weit schneller.

Kaum ist das Leben eines Thiers und mit ihm seine organische Thätigkeit vernichtet, so beginnet eine neue chemische Thätigkeit in den Elementen seiner Gemengtheile, die der organischen direkt entgegen gesetzt ist, und alle Grade der Fermentation so wie der Putrefaction folgen auf einander, bis eine Masse von neuen Formen und neuen Qualitäten gebildet ist.

Hier spielen der Stickstoff, der Wasserstoff, der Schwefel und der Phosphor ganz besonders eine wichtige Rolle, es wird Ammonium so wie Phosphor- und Schwefelwasserstoff gebildet, und der ganze Gang der Zergliederung und ihrer Erfolge nimmt eine der natürlichen entgegengesetzte Richtung an.

Werden die animalischen Erzeugnisse nicht im ganz frischen, sondern im ausgetrockneten Zustande der chemischen Analyse unterworfen, so ist die Grundmischung auf eine andere Weise verändert; und dann ist es nicht mehr möglich, Schleim, Eiweifsstoff, Gluten und Faserstoff zu trennen, und der Zweck wird nur auf eine höchst unvollständige Weise erreicht.

Alles dieses zusammen genommen, macht es durchaus nothwendig, einen andern Weg der Analyse für die organischen Erzeugnisse einzuschlagen als den bisherigen, wenn die Resultate derselben auf denselben Grad der Vollkommenheit und Zuverlässigkeit gebracht werden sollen, wie bei den anorganischen Substanzen.

Die Hauptbedingung, worauf es hiebei ankommt, ist 1) keinen organischen Körper, von welcher Art er auch sey, anders als in demjenigen Zustande der Analyse zu unterwerfen, wo er eben der Natur oder seinem Fundorte entnommen worden ist, um keine Veränderung in der Grundmischung seiner Gemeng- und Mischungstheile zu veranlassen, die mit dem gestörten organischen Leben sogleich beginnet und in fortwirkende Thätigkeit gesetzt wird.

2) Mufs die Einwirkung der Wärme, da wo es nur immer geschehen kann, nach Möglichkeit vermieden werden, um diejenigen Gemengtheile der Substanz, welche in der höhern Temperatur verändert werden können, vor ihrem Einflusse nach Möglichkeit zu schützen.

3) Mufs es Bedingung seyn, die Zergliederung der Substanz in mehrere Theile zu zerfällen, dergestalt, dafs aus der einen Portion dieser, aus der zweiten ein zweiter für sich bestehender Stoff entnommen wird etc., weil sonst, wie ich mich durch die Erfahrung davon überzeugt habe, eine genaue und vollständige Scheidung unmöglich wird. Dieses ist besonders dann der Fall, wenn man mit fetten und mit aetherischen Oelen zu kämpfen hat, die in einer Substanz neben einander liegen, wenn Wachs, oder auch Kampfer, Kautschouk etc. vorhanden seyn sollten.

Diese Zwecke können vereinigt erzielet werden, wenn man mehr den kalten als den warmen Scheidungsweg einschlägt, und nur da eine erhöhete Temperatur in Anwendung setzt, wo sie unvermeidlich bleibt.

Zufolge dieser Prämissen habe ich die Analyse einiger organischer Substanzen veranstaltet, und sie ist mir so gut gelungen, dafs, bei der Wiederholung einer und derselben Analyse, die Resultate, unbedeutende Kleinigkeiten abgerechnet, sich immer gleich geblieben sind. Beispiele davon geben folgende.

I.
Zergliederung des Weizens.

Die Zergliederung der Getreidearten ist bisher noch sehr wenig berücksichtiget worden; alles was wir darüber haben und mit einigem Grade von Vertrauen über die Resultate anerkennen können, sind diejenigen Zergliederungen, die der für die Fortschreitung der chemischen Wissenschaft leider zu früh verstorbene Professor Einhof hinterlassen hat.

Zergliederungen der Getreidearten, und nicht weniger die der Hülsenfrüchte, der Küchengewächse und der Futterkräuter, können überaus wichtig werden und ein sehr hohes wissenschaftliches Interesse gewinnen, wenn solches aus einem höhern Gesichtspunkte unternommen werden, als der ist, der uns bloſs mit dem quantitativen Verhältnisse ihrer Bestandtheile bekannt macht.

Was die nähern Bestandtheile, oder vielmehr die Gemengtheile der Getreidearten betrifft, so sind diese, in qualitativer Hinsicht, zwar in allen dieselben, und sie weichen nur im quantitativen Verhältniſs von einander ab.

Ist aber diese Abweichung in der specifiken Art des Getreides begründet? Hat die Natur des Bodens, in welchem solches kultivirt wurde, hat die Wahl des Düngers, womit dasselbe genährt wurde, einen Einfluſs auf das quantitative Verhältniſs seiner Bestandtheile, und welchen? Läſst sich dieses durch eine Reihe unwidersprechlicher Thatsachen begründen? und welche Vortheile können daraus für die Agronomie gezogen werden, welche Aufklärung kann die Physiologie der Pflanzen daraus ziehen? Dieses zu versuchen ist bisher unter der Reihe der guten Wünsche geblieben. Ich habe mir vorgesetzt, diese Aufgaben zu lösen, und habe bereits die nöthigen Vorbereitungen dazu getroffen, und ich werde, nach dem Maaſse daſs meine Arbeiten sich beendigen, die Resultate derselben der Königlichen Akademie zur Beurtheilung vorlegen. Nachfolgende *Zergliederung* des Weizens mag im Allgemeinen die Methode anzeigen, die ich dabei befolge,

weil sie mir, nach mehreren eingeleiteten Untersuchungsarten, die sicherste und beste zu seyn geschienen hat.

1) Bestimmung der natürlichen Feuchtigkeit.

Um die Masse der Feuchtigkeit zu bestimmen, die in einer gegebenen Masse des der Untersuchung unterworfenen Weizens enthalten war, wurden 500 Gran desselben bei einer Temperatur von 30 Grad Reaumür in warmer Luft so lange ausgetrocknet, bis keine Gewichtsverminderung mehr zu bemerken war. Der Gewichtsverlust betrug genau 21 Gran.

2) Bestimmung der Hülsensubstanz.

Um die Quantität der Hülsensubstanz in einer gegebenen Masse der Körner zu bestimmen, wurden 500 Gran derselben in destillirtem Wasser kalt eingeweichet. Als die Körner so weit aufgequollen waren, daſs die Hülse sich lösen lieſs, wurden sie einzeln enthülset und die Hülsen getrocknet. Sie wogen, bei 30° Reaumur getrocknet, genau 70 Gran.

3) Da mir schon aus frühern Beobachtungen bekannt war, daſs die Getreidearten ein im Weingeiste lösbares Oel enthalten, welches als die Ursache des stinkenden Geruchs anerkannt werden muſs, den der aus ihnen bereitete Branntwein besitzt, so wurde auch dessen Quantität bestimmt. Zu dem Behuf wurden 2000 Gran Weizenkörner gröblich zerstoſsen, dann in einen gläsernen Kolben mit ihrem zehnfachen Gewichte Weingeist übergossen, der 80 Procent Alkohol, nach der Tralles schen Skala, enthielt, und nachdem der Kolben mit Helm und Vorlage versehen war, das Ganze stark digerirt. Nach dem Erkalten wurde die Extraktion abgegossen, der Rückstand aufs Neue mit der Hälfte des vorigen Gewichts vom Weingeiste überschüttet, und die Digestion aufs Neue begonnen, dann aber der Rückstand stark ausgepreſst. Beide erhaltene Extraktionen wurden gemengt und filtrirt. Das filtrirte Fluidum besaſs eine weingelbe Farbe, aber weder einen hervorstechenden Geschmack noch Geruch. Es wurde mit seinem vierfachen Gewichte destillirtem Wasser verdünnet, mit welchem sich solches merklich trübte. Das Gemenge wurde hierauf aus einem Kolben mit Helm so weit über destillirt, bis reines Wasser überging. Jetzt hatte

sich in der rückständigen Flüssigkeit ein Oel in gelben Tropfen abgesondert, das genau gesammelt 10 Gran wog: folglich kommen auf 1000 Theile des Weizens 5 Gran und auf 500 $2\frac{1}{2}$ Gran Oel zu stehen.

Jenes Oel besitzt eine gelbe Farbe, einen milden den fetten Oelen ähnlichen Geschmack, ist meist geruchlos, löst sich im Alkohol vollkommen auf, verflüchtiget sich bei der Temperatur des siedenden Wassers, und verbreitet dabei einen widrigen Geruch, der dem des gemeinen Branntweins ziemlich ähnlich ist. Von den ätzenden Alkalien wird es auf der Stelle aufgenommen und durch zugesetzte Säuren aus der Auflösung wieder abgeschieden. Auf Kupfer gebracht und damit erwärmt, nimmt es eine grüne Farbe an und zeigt dadurch seinen Eingriff auf dieses Metall. Ich werde solches zu einer andern Zeit in gröfserer Masse darstellen und näher untersuchen. Es ist wohl gewifs, dafs dieses ölige Wesen nur allein im Keime der Getreidekörner seinen Sitz hat.

Um nun eine vollständige Zergliederung des Weizens zu veranstalten, wurden 5000 Gran Körner dazu verwendet und damit folgendermafsen operirt.

1) Sie wurden, ohne verkleinert zu seyn, mit destillirtem Wasser kalt eingeweicht, bis sie sich leicht von der Hülse löseten. Sie wurden hierauf in einem Siebe von höchst fein gewaschenen Pferdehaaren mit destillirtem Wasser so lange geknetet, bis das Wasser zuletzt keine getrübte Beschaffenheit mehr annahm, folglich kein Amylon mehr ausgeschieden wurde.

2) Die so ausgewaschenen Hülsen stellten jetzt ein Gemenge von Hülsen und Kleber dar, welche beide Theile zu einer zähen elastischen Masse verbunden waren. Sie wurden bei der Temperatur von 30° Reaumur in warmer Luft so lange ausgetrocknet, bis keine Gewichtsabnahme mehr zu bemerken war, und wog jetzt 1300 Gran.

Da nun aus dem Vorigen bekannt ist, dafs 500 Gran Weizen 70 Gran Hülsen enthalten, so gehet daraus hervor, dafs jenes Gemenge von Hülsen und Kleber zusammengesetzt ist aus: Hülsen = 700 Gran,
Kleber = 600 —

Und da ferner, den frühern Versuchen zufolge, 500 Gran Körner $2\frac{1}{2}$ Gran an eigenthümlichen Oel enthalten, so müssen 5000 Gran derselben von jenem Oel enthalten = 50 Gran.

3) Um nun die durch das Sieb gelaufene milchige Flüssigkeit einer fernern Scheidung zu unterwerfen, wurde solche, mit mehr Wasser verdünnt, in einem gläsernen Cylinder ruhig hingestellt. Hier lagerte sich sehr bald das Amylon, und konnte von der darüber stehenden Flüssigkeit durchs Abgiefsen befreiet werden. Der Satz wurde zu wiederholten Malen mit reinem Wasser ausgesüfst, und hierauf an der warmen Luft bei 30 Grad Reaumür so lange ausgetrocknet, bis keine Gewichtsabnahme mehr zu bemerken war. Der Rückstand wog genau 3177 Gran, und so viel betrug also die Masse des Amylons.

4) Die abgegossene Flüssigkeit liefs sich durch Druckpapier, obschon schwer, filtriren, ohne einen Rückstand übrig zu lassen. Sie erschien opalisirend und gab dadurch das Daseyn des Eiweifsstoffes zu erkennen.

Sie wurde in einer gläsernen Schaale bis zum Sieden erhitzt. Sie klärte sich dabei vollkommen und sonderte Eiweifsstoff in zarten Flocken ab. Sie wurde abermals filtrirt, und der Eiweifsstoff wog getrocknet 48 Gran.

5) Die klare filtrirte Flüssigkeit wurde hierauf in einer gläsernen Schaale nach und nach bis zur völligen Trockne ausgedünstet; der Rückstand war hellbraun von Farbe und wog 191 Gran.

6) Dieser Rückstand wurde zerkleinert, und mit Alkohol von 80 Procent in einem Kolben so oft stark digerirt, bis dieser keine Farbe mehr davon annahm. Die Extraktion liefs sich klar von dem nicht gelösten abgiefsen; sie wurde zur Trockne abgedunstet, und gab einen süfs schmeckenden, an der Luft zerfliefsbaren Rückstand, den ich für Schleimzucker erkannte. Er wog = 98 Gran.

7) Der im Alkohol nicht lösbare Rückstand zeigte eine klebrige Beschaffenheit und einen milden dem Gummi ähnlichen Geschmack. Er löste sich im vierfachen Gewichte destillirten Wasser in der Kälte auf, aber aus der Lösung setzte sich ein pulvriges Wesen ab, das zwischen den Zähnen knirschte und vor dem Blaserohr zu einer glasartigen Kugel zusammenflofs. Es wog getrocknet 22 Gran.

Reine Salpetersäure nahm dieses Wesen vollkommen auf und zur Auflösung gesetztes mildes Ammonium fällete daraus kohlenstoffsauren Kalk. Die neutrale Auflösung wurde filtrirt zur Trockne abgedunstet und in einem kleinen Platintiegel ausgeglühet, wobei reine Phosphorsäure im verglaseten

Zustande übrig blieb, die an der Luft Feuchtigkeit anzog.. Es war Phosphorsäure. Folglich bestanden jene 22 Gran aus übersäuertem phosphorsauren Kalk.

8) Die übrige Flüssigkeit wurde in einem porzellanenen Schälchen zur Trockne abgedunstet, der Rückstand war braungelb von Farbe, milde von Geschmack, liefs sich mit Wasser erweichen und in Faden ziehen. Er zeigte also alle Eigenschaften des Gummi und wog 93 Gran.

Demgemäfs sind also die nähern Bestandtheile in den der Untersuchung unterworfenen 5000 Gran Weizenkörner:

1. Natürliche Feuchtigkeit	210
2. Hülsensubstanz	700
3. Kleber	600
4. Oel	50
5. Amylon	3177
6. Eiweifsstoff	48
7. Schleimzucker	97
8. Gummi	93
9. Phosphorsaurer Kalk	22
Verlust	2
Summa	5000

Eine Fortsetzung dieser Zergliederung der übrigen Getreidearten, nach denselben Principien veranstaltet, werde ich zu einer andern Zeit verlegen.

Ueber

Ueber

die Abarten der Merinoschafe, ihre Entstehung und Vervollkommnung.

Von Herrn THAER *).

Wenn die Schafzucht in gegenwärtigem Zeitpunkte einer der wichtigsten Gegenstände für das landwirthschaftliche Gewerbe ist, so scheint sie mir auch nicht ohne Interesse für die Naturwissenschaft zu seyn, und ich werde sie daher zum Gegenstande einiger Vorlesungen machen.

Keine Thierart giebt uns so viele Data über die Fortpflanzung und Erzeugung gewisser Eigenschaften durch die Generation und die Verbindung des männlichen und weiblichen Geschlechts, wie diese; theils weil der Gegenstand in anderer Hinsicht wichtig genug ist, um eine ununterbrochene Aufmerksamkeit darauf zu richten; theils weil das Resultat gemachter Versuche sich schnell ergiebt, indem dieses Thier schon im zweiten Jahre zeugungsfähig wird.

Unzählig sind die Arten des Schafgeschlechts, indem die in demselben willkührlich zu bewirkende Begattung beständig neue Mittelgattungen und Abarten hervorbringt, die, in sich selbst fortgepflanzt, nach einer Reihe

*) Vorgelesen den 8. März 1816.

von Generationen völlig constant werden. Brittannien hat über dreifsig verschiedene Schafarten, die sich durch charakteristische Eigenheiten unterscheiden. Man hat neuerlich durch Kunst mehrere Mittelarten hervorgebracht, und sie, wenn sie dem wirthschaftlichen Zwecke angemessen waren, dann in sich fortgepflanzt und constant gemacht. Dieser Zweck war bei den Engländern starker, schneller Fleischansatz und Mastfähigkeit, auch schnelle Vermehrung; die Wolle war ihnen nur etwas Untergeordnetes. Schafe, die auch bei mäfsiger Futterung und Weide schon im zweiten Jahre ihre volle Ausbildung erreichten und mehrere Lämmer brachten, dann geschlachtet ein bedeutendes Gewicht von Fleisch und Fett lieferten, war ihr Ziel, welches sie auch zuvörderst durch die Bemühungen des berühmten und bei ihnen unsterblichen Schafzüchters Bakewell, nachmals auf andere Art durch mehrere Schafzüchter, welche seine Grundsätze befolgten, möglichst erreichten. Es ist bekannt, dafs die ausgezeichneten Stöhre seiner Race zu ungeheuren Preisen bezahlt wurden, dafs er solche auf eine Sprungzeit zu 300 Guineen vermiethete und zu 500 — 600 Guineen verkaufte, ungeachtet sie in der Wolle andern einheimischen Racen weit nachstanden. Der grofse Bedarf und der feine Geschmack am Fleisch bei dieser Nation macht den hohen Werth allein erklärbar, bei der Ueberzeugung, die man davon hatte, dafs ein solcher Stöhr seine Eigenschaften, wenigstens zum Theil, auf seine Nachkommenschaft fortpflanzen, und dafs eine wiederholte Zulassung solcher Stöhre endlich eine beständige und vollkommne Erhaltung dieser Eigenschaften hervorbringen werde. Durch besonders ausgewählte und überlegte Kreuzungen wufste Bakewell alles, was bei einem Schafe überhaupt erreichbar war, zu erzeugen und zu vereinigen, und man sagte von ihm, dafs er sich das Ideal eines Schafes zuvor schnitze, und es dann, durch wohlgeordnete Begattungen, in der Wirklichkeit darstelle.

Bei uns und fast allen übrigen Europäischen Nationen ist dagegen die Wolle das Hauptziel, und das Fleisch nur ein Nebenzweck der Schafzucht geworden. Kein Schaf aber liefert, hinsichtlich der Feinheit und anderer schätzbarer Qualitäten, vollkommnere Wolle als das Spanische Merinoschaf, und deshalb sind wohl alle auf Verfeinerung der Wolle gerichtete Veredlungen durch dasselbe bewirkt.

Dies Schaf aber ist keinesweges Spanischen Ursprunges, sondern eben-

falls daselbst eingeführt. Zu der Römer Zeiten war es daselbst nicht vorhanden, und die Spanische Wolle stand selbst der Italienischen bei weitem nach. Auch sind jetzt noch, außer den wandernden Heerden, die eigentlichen einheimischen Schafe in Spanien, unter den Namen *Scurros*, gröber von Wolle als unsere Landschafe. Ueber die Art und die Zeit dieser Einführung haben wir bis jetzt keine dokumentirte Nachrichten, sondern nur Traditionen und Muthmaſsungen, und diese lauten verschieden. Wahrscheinlich aber ist es zu Anfange des vierzehnten Jahrhunderts geschehen. Woher sie gekommen, liegt noch mehr im Dunkel; aber über das Meer ist es geschehen, und die Spanier selbst leiten den Namen *Merino* von *Marino*, *Transmarino* her. Aus dem Vaterlande der Mauren stammen sie nicht her, denn in den Afrikanischen Küstenländern findet sich keine Spur von feinwolligen Schafen, und überhaupt ist nirgends ein Schaf anzutreffen, was den Merino's in der Feinheit der Wolle gleichkäme oder sie überträfe, als in einigen am Persischen Meerbusen liegenden Gegenden, dem Lande Caschimir und der Persischen Provinz Kerman, woselbst die hochfeinen Tücher, die ursprünglich mit dem Namen Caschimir und Shawls benannt und zu ungeheuren Preisen im Oriente bezahlt wurden, herkamen. Dieses Schaf soll aber in seiner Natur wenig Aehnliches mit dem Merino haben. Es ist daher wahrscheinlich, daſs diese Race, so wie sie ist, nicht von auswärts eingeführt, sondern durch fortgesetzte Kreuzung der Spanischen Landschafe mit auswärtigen Widdern entstanden sey, und daher läſst es sich erklären, daſs es in dieser Race selbst noch so bedeutende Verschiedenheiten — die freilich nur dem geschärften Auge des Kenners recht auffallend sind — gebe.

Bis vor Kurzem bestanden nur die groſsen wandernden Heerden, die das Recht der *Mesta* haben und jährlich zweimal, von Süden nach Norden im Frühjahre, und von Norden nach Süden im Herbste, die Mitte des Reichs durchziehen und die Unkultur eines breiten Streifens begründen, aus Merino's. Sie heiſsen deshalb *Transhumantes*, kommen nie in den Stall, auſser bei der Schur, welche auf der Mitte ihres Weges in dazu eingerichteten Schurhäusern geschieht. Vormals gab es gar keine feine Schafe in Spanien als in diesen wandernden Heerden, und man hatte auch daselbst das Vorurtheil, daſs diese Race nicht anders als bei diesen Wanderungen gedeihe

und sich in ihrer Feinheit erhalte. Aber vor dem verheerenden Kriege hatten sich schon in Spanien viele kleine stehende Schäfereien (*Estantes*) gebildet, mehrentheils durch solche Edelleute und Gutsbesitzer, die den grofsen Schäferei-Eigenthümern als Majoralen gedient hatten und Gelegenheit fanden, sich aus den wandernden Heerden einen Stamm anzueignen. Sie mufsten sich aber damit nach aufser dem Bereiche der *Mesta* liegenden Orten hinbegeben. Ein Theil dieser *Estantes*-Heerden hat durch die gröfsere darauf verwendete Sorgfalt und Auswahl der Individuen eine gröfsere Vollkommenheit erreicht, als die besten wandernden Heerden; man mufste sie aber in den entferntern Gegenden des Reichs mühsam aufsuchen. Die Berühmteren fingen schon an, einen sehr hohen Preis auf ihre Thiere zu setzen.

Unter den wandernden Heerden findet eine bedeutende Verschiedenheit statt, in der Qualität der Wolle sowohl, als in der Bildung des Körpers und den Formen einzelner Theile. Man unterscheidet zuvörderst die Leoneser-, Segovianer-, Sorianer-, Catalaner- und Extreminos-Heerden. Die Wolle behält diesen Namen im Handel, und der Unterschied des Preises ist bedeutend. Aber auch unter den einzelnen Heerden dieser Hauptstämme ist noch eine grofse Verschiedenheit, vorzüglich unter den Leonesern, die am meisten geschätzt sind. Die grofsen Heerden von Escurial, Infantado, Negretti, Guadaloupe, Paular, Perales u. s. w. haben ihre besondern Eigenheiten. Jede Heerde hat ihren eigenthümlichen Stempel, der im Gesichte eingebrannt wird, und ich besitze eine Liste vom Jahr 1791, worin 140 Heerden nach ihren Namen, damaligen Besitzern, Anzahl, Schurertrag, Schurhäusern und Stempeln aufgeführt sind. Den Stempel nachzuahmen, würde ein grofses Verbrechen seyn. Da die Verschiedenheit des Werths der Wolle so bedeutend ist, so scheint es fast unerklärbar, warum man nicht die schlechtern Heerden durch Kreuzung mit Stöhren aus den bessern längst vervollkommnet hat, und es ist zweifelhaft, ob man es blofs der Indolenz oder einem stolzen Eigensinne der Besitzer und ihrer Majoralen zuschreiben soll. Doch mag es auch seyn, dafs Manche durch eine gröfsere Quantität der Wolle das wieder zu gewinnen glauben, was ihr an der Qualität und dem Preise abgeht, wie das gegenwärtig bei uns der Fall ist. Uebrigens scheinen vormals die Schäferei-Besitzer mit den einmal vorhandenen Eigenschaf-

ten ihrer Heerden zufrieden gewesen zu seyn, indem sie im Allgemeinen keine Auswahl unter ihren Stöhren machten, obwohl sich bei genauer Beachtung, auch in der constantesten Race, einer vor dem andern auszeichnet und dann dies Auszeichnende vererbt. Sie lassen alle Widder unverschnitten zwischen der Heerde gehen und die Begattung geschehen, wie der Zufall es fügt. Daher dann die bedeutende Verschiedenheit der aus Spanien nach andern Ländern geholten Stämme.

Ohne mich in eine ausführliche Geschichte der Einführungen der Spanischen Merino's in die meisten Europäischen Staaten einzulassen, will ich hier nur einiges, uns zunächst liegendes, das von besonders grofsem Erfolge gewesen ist, erwähnen. Im Jahr 1764 kam eine Heerde nach Sachsen, die dem Kurfürsten vom Könige von Spanien zum Geschenk gemacht wurde. Sie war wohl eine der ausgesuchtesten und feinwolligsten, die aus Spanien gekommen sind, aber nur klein von Statur, gröfstentheils aus der Schäferei von Escurial genommen. Da sie, wie fast alle weit hergeführte Heerden, räudig ankam und man eine grofse Furcht für dieses Uebel hatte, dessen gründliche Heilung man nicht verstand, so ward sie nicht geachtet wie sie es verdiente. Man liefs jedoch einige Jahre später eine andre Heerde in Spanien ankaufen und überbringen, die aus verschiedenen Schäfereien herstammte und von stärkerem Körperbau, aber nicht von jener Feinheit und Gleichheit war, und deren Ueberbringer die Behandlung der Räude besser gelernt hatten. Jene erste Heerde mufste der letzteren Platz machen, ward verschiedentlich herumgeführt, und manche Private hatten Gelegenheit, sich aus derselben Thiere zu verschaffen: vor allen der um die Schafzucht so sehr verdiente Finck zu Lösitz, den man wegen der Räude zu Rath zog, und der sich dafür ein Häuflein vorzüglich angegriffener und unheilbar scheinender Thiere ausbat. Dieses Häuflein hat in den Händen des verständigen Mannes vielleicht am meisten zur Verbreitung der veredelten Schafzucht im nördlichen Deutschland beigetragen. Nachmals kam der noch übrig gebliebene Stamm der ersten Heerde, aber wohl nicht ganz rein erhalten, nach Lohmen und bildete die daselbst befindliche Stamm-Schäferei. Die zweite Heerde aber ward als Stamm-Schäferei auf den verschiedenen Vorwerken des Amts Stolpe aufgestellt. Aus den Abkömmlingen beider hat sich die eigenthümliche Sächsische Race gebildet, welche in

Feinheit und Sanftheit der Wolle ohne Zweifel alle andre Racen in Europa übertrifft und jetzt entschieden den höchsten Preis auf allen Märkten erhält. Aufser der vorzüglichen ursprünglichen Feinheit ist dieses dadurch bewirkt, dafs man in mehreren von ihr abstammenden Schäfereien eine Sorgfalt in der Auswahl der Individuen, wie bis dahin nirgends, anwandte, und dabei immer den Zweck der höchsten Verfeinerung, mit Hintansetzung anderer Qualitäten, vor Augen hatte. Kliphausen, Dahlen, Machern, Roxburg u. m. a. liefern eine Wolle, die bisher nirgends in gleicher Schönheit zu finden war, und die von Roxburg zeichnet sich durch ihre höchste Sanftheit noch vor allen aus, so dafs sie gewissermafsen eine besondere Race constituirt.

In den Oesterreichischen Staaten, besonders nach Mähren, sind schon zu Anfange des vorigen Jahrhunderts, in der Folge aber sehr häufig, von Seiten der Regierung und der Magnaten bedeutende Transporte von Merino's aus Spanien geholt und sowohl Kaiserliche als Erzherzogliche und private Stamm-Schäfereien davon angelegt worden. Es hatte sich daselbst aber ein anderes Ideal von Merinoschaf wie in Sachsen gebildet, welches man mit grofser Anstrengung verfolgte und wirklich erreichte. Man sah auf grofsen breiten Körperbau, Vollwolligkeit, Gedrungenheit des Fliefses, starken Fettabsatz in der Wolle, stark bis an die Spitze bewollete Beine und Köpfe, und setzte einen vorzüglichen Werth auf tief herabhangenden Köder, auf starke, Wulsten-bildende Hautfalten, besonders um den Hals, die den Thieren, besonders den Widdern, ein auffallendes, rauhes, imponirendes Ansehn gaben. Hierauf richtete man die Aufmerksamkeit bei dem Ankauf in Spanien und bei der Auswahl der Zuchtsöthre in den Stamm-Schäfereien. Man vernachlässigte dagegen wohl zu sehr die Rücksicht auf höhere Feinheit und Sanftheit der Wolle, wahrscheinlich in der Meinung, dafs diese bei Merinoschafen ohnehin hoch genug und bei den Leonesischen Racen in Spanien unübertrefflich sey. Daher rührt es, dafs bei den grofsen Anstrengungen und ungemeinem Aufwande die Wolle aus den vorzüglichsten Oesterreichischen Schäfereien bei weitem den Preis nicht erreicht hat, der jetzt für die Sächsische Wolle auf allen Märkten bezahlt wird. Indessen ist es noch nicht entschieden, ob sie durch den stärkern Wollertrag, den ihre Hauptrace giebt, das ersetzen, was ihr am Werthe abgeht. Die Ener-

gie, womit übrigens die Veredlung der Schafzucht im Oesterreichischen betrieben wird, geht aus den uns bisher unglaublich scheinenden Preisen hervor, welche für die vorzüglichen, ihrem Ideale entsprechenden Zuchtsöthre in den öffentlichen Auctionen schon seit 18 Jahren bezahlt worden sind. 1500, 2000, 3000 Gulden Silberwerth sind nichts Seltenes. Neuerlich scheint sich jedoch unter mehrern vorzüglichen Schäferei-Eigenthümern daselbst eine andere Ansicht zu verbreiten und der Zweck einer höhern Verfeinerung des Haars mehr aufgefaſst zu werden. Auch fängt man an, das Unzweckmäſsige der groſsen Köder und anderer Auswüchse, so wie der Rauheit der untern Beine und des Gesichts, anzuerkennen, indem sich auf diesen Theilen immer nur grobe und haarige Wolle erzeugt; und es werden deshalb Stöhre aus Schäfereien Sächsischen Stammes daselbst beliebter und gesucht. Bei dem Grunde der Vollwolligkeit, den man dort gelegt, kann diese Kreuzung allerdings von dem glücklichsten Erfolge seyn; vielleicht nicht in den ersten Generationen, indem die Kreuzung zu heterogener Thiere oft unzweckmäſsige Verbindungen, hier vielleicht eine Vermischung von härterer und sanfterer Wolle, hervorbringt, aber um so mehr in den folgenden. Vorerst können wir die Oesterreichischen Merino's wieder als eine eigenthümliche Race betrachten, die von einem Kennerauge sogleich erkannt wird.

In die Preuſsischen Staaten lieſs schon Friedrich der Groſse gleich nach dem siebenjährigen Kriege zu wiederholten Malen Spanische, so wie auch andere ausländische Schafe einführen. Sie kamen aber in Hände, die sie nicht zu schätzen wuſsten, und es ist nur hin und wieder noch eine schwache Spur von der Nachkommenschaft dieser ersten Stämme geblieben. Auf den Betrieb des Ministers Struensee lieſs unsers jetzt regierenden Königs Majestät die Erlaubniſs, eine bedeutende Anzahl aus Spanien auszuführen, bei dem dortigen Hofe bewirken, und übernahm die allgemeinen Kosten bei diesem sonst auf Rechnung einer groſsen Anzahl von Gutsbesitzern zu machenden Ankaufe. Der jetzige Oberpräsident zu Münster, Herr Baron von Vinke, übernahm, ohne eigenes Interesse dabei zu haben, bloſs in patriotischer Hinsicht das Geschäft, und besorgte auf eine sehr mühsame Weise den Ankauf in Spanien, den er so vortheilhaft für die Interessenten ausführte, daſs das Stück, hierher gebracht, nicht über 30 Thaler zu stehen

kam. Aus diesem Stamme sind viele und anfangs rein erhaltene kleine Heerden gebildet worden, die, je nachdem einer vor dem andern vorzügliche Thiere erhielt und die ersten Begattungen glücklich traf, verschiedenartige Stämme gebildet haben. Jedoch kann meines Wissens keiner in der Feinheit und Sanftheit der Wolle den bessern Sächsischen Schäfereien gleich gesetzt werden, obwohl einige sie am Gewichte der Wolle übertreffen mögen Die meisten Besitzer dieser ächten Heerden sind nachher auch wohl zu Kreuzungen mit Sächsischen Stöhren geschritten. Die bei weitem gröfste Zahl der feinen Schäfereien in unserm Staate stammt aber doch ganz von Sächsischen her und ist mit ihnen gleichartig, so dafs auch die Wolle der vorzüglichsten unter dem Namen der Sächsischen Wolle in den Handel kommt.

Neuerlich aber, im Jahre 1815, ist bei der Anwesenheit unsers Königs zu Paris und durch dessen landesväterliche Vorsorge ein bedeutender Ankauf aus den dortigen vorzüglichsten und berühmtesten Merino-Schäfereien gemacht worden, wodurch nunmehr 3—4 Staats-Stammschäfereien in verschiedenen Provinzen errichtet werden sollen, deren Oberaufsicht und Leitung Se. Majestät mir allergnädigst übertragen haben *). Um über diese höchst merkwürdige Heerde und ihre künftige beabsichtigte Behandlung Auskunft zu geben, mufs ich zuvor etwas über die Einführung der Merino-Racen in Frankreich sagen, indem uns diese Stämme dadurch mittelbar zugekommen sind.

Ich rede nicht von den ältern Versuchen, die man mit Einführung der Merino's und ihrer Kreuzung mit Landschafen schon zu Anfange des vorigen Jahrhunderts in Frankreich gemacht hatte, noch von der durch Tru-

*) Diese Stamm-Schäfereien sind jetzt in der Kurmark zu Frankenfelde, in Schlesien zu Parken, in Sachsen zu Petersberg eingerichtet, und eine vierte soll, sobald es die Vermehrung der Heerde erlaubt, in Preufsen angelegt werden. Die Administration der zu diesen Instituten eingeraumten Domainen-Güter ist aus dem Ressort der übrigen Domainen-Verwaltung geschieden und dem Oberaufseher untergeben. Aus dem Ueberschufs des Ertrages über das bisherige Pacht-Quantum wird ein Fonds zur Beförderung der Landwirthschaft, auch in wissenschaftlicher Hinsicht, nach des Königs allerhöchster Bestimmung gebildet. A. d. V.

Trudaine und Daubenton begründeten Stamm-Schäferei zu Rambouillet und Alford, und verweise deshalb auf Lasteyrie *Histoire de l'introduction des moutons à laine fine d'Espagne, Paris* 1802. Dieses Institut ward durch den thätigen Eifer des jetzigen *Intendant général des bergeries royales et des dépôts de mérinos, Mr. Tessier*, in den rohesten Zeiten der Revolution nicht ohne Gefahr aus den Klauen der mörderischen Räuber gerettet und schon unter dem Direktorium wieder hergestellt und gesichert. Ich fange nur da an, wo Lasteyrie aufhört. Napoleon erkannte die Wichtigkeit dieses Gegenstandes für den National-Reichthum, und er hat auf keinen Zweig der Industrie so viele Sorgfalt und ein so bedeutendes Capital verwendet, als auf diesen. Er setzte Macht, Geld, und Kenntnisse in Bewegung, um das Beste nach Frankreich herüber zu ziehen, was in Spanien aufzufinden war. Er benutzte selbst den Ehrgeiz der Grofsen seines Reichs, um einen Wetteifer über den Besitz der schönsten Heerde zu erregen. Die Kaiserin Josephine hatte, wie für alle ländliche Gegenstände, so auch für die Schafe, eine besondere Liebhaberei, und sie bewirkte es, dafs der schon auf dem schwankenden Throne sitzende König von Spanien und sein Friedensfürst ihr die Galanterie mit dem Geschenk einer bedeutenden Heerde machten, die sie aus ihren eigenen Schäfereien auswählen lassen konnte, was durch die geübtesten Schafkenner sogleich ausgeführt wurde. Sie theilte die Heerde mit ihrem Sohne Eugen Beauharnois, und sie ward theils in Malmaison, theils in Ferté Beauharnois aufgestellt. Am Hofe und in den engern Zirkeln der Bonapartischen Familie war fast nur die Rede von Merino's, die der Kaiserin in Malmaison aus der Hand frafsen. Die Generale und die Minister benutzten fortwährend ihre Macht und ihren Einflufs in Spanien, um sich und ihren Protégés die schönsten Merino's, die aufzutreiben waren, aus Spanien zu verschaffen, durch Geld, durch Versprechungen und durch Raub, wie es die Umstände mit sich brachten. So ging dann das Beste, was in Spanien war und was man schon lange vorher mit scharfem Auge ausgekundschaftet hatte, nach Frankreich über, und wenn die Spanischen Heerden es verloren, so ward es doch für Europa gerettet, indem das dort Verbliebene durch die Verheerungen des Krieges fast unterging. Die Zahl der Merino's in Spanien hat sich, nach ziemlich bestimmten Angaben, von 10 Millionen auf $5\frac{1}{2}$ Millionen vermindert, und was da geblieben, ist so schlecht und so vermischt, dafs

die Wolle zu sehr niedrigen Preisen verkauft werden mufs; weswegen sich auch bei den vormaligen grofsen Schäferei-Eigenthümern kein Trieb äufsert, sie wieder herzustellen, um so weniger, da ihnen das Recht der *Mesta* streitig gemacht wird, und die Krone und die Geistlichkeit, die ihre Schäfereien ganz verloren haben, sich nicht darum bekümmern. Einige verständige kleine Grundbesitzer bemühen sich, aus Frankreich wieder etwas Preiswürdiges zu erhalten.

Nach Frankreich mufste man also gehen, um hochedle Merino's zu holen, und der Zeitpunkt war sehr günstig. Die grofse Vorliebe war mit dem Abgange der Kaiserin Josephine schon erkaltet, und die immer zunehmende Herrsch- und Eroberungssucht Napoleon's gab diesem friedlichen Betriebe keine Nahrung mehr. Wie nun die Drangsale des Krieges auf Frankreich zurückprallten, ein Theil der Schäferei-Eigenthümer sich geflüchtet oder versteckt hatte, und man bei der Ueberströmung fremder Heere das Geld für sicherer als die Heerden hielt, konnte man zu billigen Preisen kaufen. Denn alles, was zu uns gekommen, ist vom Staate und mehreren Privaten richtig bezahlt, nicht geraubt oder abgedrungen worden.

Die Heerden, welche, oder aus welchen auf königliche Rechnung gekauft worden, sind:

1) Die des Hrn. Bourgois zu Roseau, Administrators von Rambouillet, welche, nach dem Urtheil aller Kenner, der von Rambouillet völlig gleich kommt.

2) Eine dem unglücklichen Murat gehörige und einem Herrn Dailly zu Trappe übertragene.

3) Eine dem Marschall Moncey gehörige und von ihm aus Spanien geschickte.

4) Eine dem Hrn. Dailly zu Sartorie gehörige.

5) Eine einem gebörnen Engländer, der sich bei Paris angesiedelt, Hrn. Parcker, gehörige.

6) Die des verdienstvollen Grafen Morel de Vindée, aus welcher wir aber nur Stöhre, worunter einige von ausgezeichneter Schönheit, andre sehr mittelmäfsig sind, und gar keine bedeutende Mütter erhielten *).

So krankhaft diese Thiere nach einer sehr beschwerlichen Winterreise hier angekommen sind, und so grofs der Verlust ist, den sie schon erlitten und noch erleiden werden, so ist es doch ein unschätzbares Geschenk, was der König seinem Lande gemacht hat, und der dafür bezahlte Preis ist in Hinsicht des Vortheils, den sie bringen werden, unbedeutend. Es ist nicht zu leugnen, dafs sich viel Mittelmäfsiges und auch einiges ganz Schlechtes darunter befinde, aber auch manches so Vorzügliches, dafs es, aufser diesen Conjuncturen, zu erhalten vielleicht unmöglich gewesen wäre; gewifs nicht zu Napoleon's Zeiten.

Die aus den genannten Schäfereien gekauften Stämme sind mehr oder weniger, einige aber sehr auffallend in der Natur ihrer Wolle, auch in ihrem Körperbau und ihrer Physionomie verschieden. Nicht alle aus einer und derselben Schäferei herkommende, aber doch die Mehrheit, haben ein eigenthümliches Gepräge. Würden sie ohne Auswahl bei der Begattung unter einander gemischt, so würden ohne Zweifel sehr tadelhafte Progenituren entstehen, und viele Generationen erforderlich seyn, bevor sich wieder etwas Harmonisches bildete. Was also in den Stämmen charakteristische Eigenheiten hat, mufs abgesondert in sich erhalten und fortgepflanzt werden.

*) Auch ward bald nachher eine beträchtliche Heerde, die von dem General Castella aus Spanien nach der Schweiz geschickt war, auf königliche Rechnung erkauft. Und wie nachmals die Herren Gebrüder Böking den Rest der oben erwähnten Heerden zu Malmaison und Ferté Beauharnois, so wie einen Theil der Chaptalschen zu Chanteloup, zu erstehen Gelegenheit gefunden hatten und sie dem Staate antrugen, wurden sie ebenfalls auf allerhöchsten Befehl gekauft und sämmtlich dem Stammschäferei-Institute einverleibt.

Jedoch wird man einige zweckmäſsig scheinende Kreuzungen mit Vorsicht versuchen *).

Zwar ist von allen erfahrnen Viehzüchtern die Besorgniſs, daſs eine Begattung in naher Verwandtschaft ein geschwächtes und tadelhaftes Geschlecht hervorbringe, als ein Vorurtheil anerkannt. Vielmehr siehet man es jetzt als den einzigen sichern Weg an, vorzügliche und seltene Qualitäten zu erhalten und in der Descendenz constant zu machen, daſs man die Thiere, die sie vom Vater oder Mutter ererbt haben, in nächster Verwandtschaft zusammenbringt. Aber eben so gewiſs ist es, daſs Fehler sich vererben und immer dabei vergröſsern. Selbst an sich gute und wünschenswerthe Qualitäten werden im Uebermaaſs zum Fehler. So gehet Sanftheit der Wolle in tadelhafte Weichheit und Schlaffheit, eine starke, elastische Kräuselung in Verworrenheit und Zwirnung über, wenn diesem Uebermaaſse nicht durch eine richtig ausgewählte Begattung vorgebeugt wird. Und in so fern ist die alte Meinung, daſs zu Zeiten eine Erfrischung des Bluts — wie man es nennt — durch fremde männliche Thiere nöthig sey,

*) Nach völlig hergestellter Gesundheit der Thiere, und bei der zweiten und dritten, unter zweckmaſsiger Haltung herangewachsenen Schur, hat sich die Wolle doch anders gestaltet, wie es bei der ersten schien. Theils gingen die Eigenthümlichkeiten einiger Racen bestimmter hervor, theils zeigte es sich aber auch, daſs das, was man dafür annahm, nur eine Folge der Kranklichkeit und widernatürlichen Haltung gewesen war. Es sind daher jetzt in der Frankenfelder Schäferei folgende vier Hauptstämme constituirt worden, deren Benennung von ihrem Ursprunge beibehalten worden.

1) Die Moncey's, zu welchen ein Theil der Malmaison's gekommen.

2) Die Rambouillet's, zu welchen ein anderer Theil der ihnen homogenen Malmaison's gekommen.

3) Die Murat's, mit welchen der gröſste Theil der Dailly's verbunden.

4) Die Chanteloup's.

Ein Haufen minder charakteristischer Mütter ist auf Antrag des Administrators Herrn Lezius mit Mögliner Stöhren aus dem Roxburger Stamm jetzt zusammengebracht, um den Versuch dieser Verpflanzung der höchstfeinen Wolle auf Körper mit gedrungenerm Flieſs zu machen; so wie dagegen in Möglin hochstfeine Sächsische Schafe mit Stöhren von Morel de Vindée und Malmaison begattet sind. In Parken werden die Malmaison's bisher abgesondert erhalten. Nach Petersberg sind ausgewahlte Stöhre aus Frankenfelde zu den dortigen Castellaschen Schafen gesandt worden, da eine Kreuzung dieser Heerde dringend nöthig schien. A. d. V.

dennoch richtig. Dies ist nun auch wohl der Fall mit den hochfeinen, in Sachsen gewissermaſsen gebildeten, Merino-Stämmen — denn sie finden nirgend ihres Gleichen — die aber ein zu loses, fladdriges, weniger ergiebiges Flieſs, ein zu weiches Haar mit zu geringer Elasticität, einen zu schmalen Körper hin und wieder zu bekommen anfangen. Hiergegen finden wir ein sicheres Gegenmittel in unserer aus Frankreich erhaltenen Stammschäferei, indem wir Thiere haben, die in der Dichtheit des Flieſses, einer wohlgeordneten Kräuselung und Elasticität des Haares und gedrungenem breitem Körperbau alle Sächsischen Heerden bei weitem übertreffen, ohne ihnen in der Feinheit nachzustehen; ob ich gleich nicht behaupten kann, daſs wir irgend eines hätten, was in letzterer Qualität den vorzüglichsten Sachsen den Rang abgewönne. In dieser Hinsicht wird also unsere Stammschäferei auch für diejenigen, welche schon einen hochfeinen Stamm Sächsischer Abkunft besitzen, sehr wohlthätig seyn, wenn sie mit Kenntniſs wählen.

Für diejenigen aber, welche die Veredlung erst angefangen haben, oder darin begriffen sind, ohne schon einen hohen Grad erreicht zu haben, kann unsere Stammschäferei einen sicherern und derberen Grund legen und wahrscheinlich schnellere Fortschritte bewirken, als es durch Stöhre aus den hochfeinen Sächsischen geschehen würde. Dichtheit, Elasticität und guter Körperbau muſs hier besonders berücksichtigt werden; die höchste Feinheit und Werth der Wolle ist doch erst in späteren Generationen zu erreichen. Herr P i c t e t hat schon längst die Behauptung aufgestellt, daſs die Veredlung mit den aus Rambouillet erhaltenen Stöhren weit schneller als mit Sächsischen vorschreite, und ich glaube, daſs er in gewisser Hinsicht Recht habe, obgleich sein angegebener Grund — weil a l l e Sachsen Metis wären — offenbar falsch ist. Freilich sind bisher viele Metis als Sprungstöhre genommen worden, weil man sie wohlfeil haben konnte, und damit ist man nun sehr wenig vorgeschritten. Aechte, reine Merinostöhre werden immer theurer, und es bleibt unsicher, ob man sie aus Privatschäfereien erhält. Die aus den Französischen Heerden sind zuverlässig reiner Abkunft, wenn sie auch zum Theil minder fein sind, wie vielleicht ein oder anderer Metisbock. Zur Veredlung sind daher auch die weniger feinen, die vorerst in unseren Stammschäfereien noch fallen werden, höchst schätzbar, wenn

man sie gleich denen, die es schon hoch gebracht haben und *Electa*- und *Prima*-Wolle erzeugen, nicht empfehlen kann.

Die in der Stammschäferei enthaltenen mannigfaltigen Stämme und ausgezeichneten Individuen werden mir Gelegenheit geben, manche Versuche anzustellen und Beobachtungen zu machen, die vielleicht wichtige Resultate hinsichtlich des Einflusses des männlichen und weiblichen Geschlechts bei der Zeugung geben können, und die der Beachtung einer hochpreislichen Akademie nicht unwürdig seyn möchten. Jetzt habe ich nur den Standpunkt derselben zu Anfange darstellen wollen.

Ueber

den Grund, warum die theoretische Bestimmung der Geschwindigkeit des Schalls so beträchtlich von der Erfahrung abweicht.

Von Herrn E. G. Fischer *).

Erster Abschnitt.

Allgemeine Bemerkungen.

§. 1.

Newton war der erste, welcher die Geschwindigkeit des Schalls theoretisch bestimmte; und die berühmtesten Mathematiker, welche sich nach ihm mit der Theorie der Luftschwingungen beschäftigten, Joh. Dan. Bernoulli, L. Euler, d'Alembert, Lagrange, bestritten zwar fast alle lebhaft, ja sogar nicht ohne Bitterkeit, die Vordersätze, aus welchen Newton seine Bestimmung abgeleitet hatte, fanden aber am Ende auf ziemlich verwickelten Wegen durchaus nichts anders, als was Newton's genialer Blick vielleicht durch ein nicht ganz reines Medium gesehen hatte.

§. 2.

Nach Newton (*Princ. L. II. Sect.* 8.) ist die Geschwindigkeit des Schalles genau so groſs, als die Geschwindigkeit eines frei fallenden Kör-

*) Vorgelesen den 6. Februar 1817.

pers, wenn er die halbe Höhe zurückgelegt hat, welche der Luftkreis haben würde, wenn er überall gleiche Dichtigkeit mit den untern Luftschichten hätte.

Nennt man diese Höhe E, und die Geschwindigkeit des Schalles, d. i. den Weg in einer Sekunde, c, so ist, nach den Gesetzen der gleichförmig beschleunigten Bewegung,

$$c = \sqrt{2gE}.$$

wo g, wie gewöhnlich, die Fallhöhe eines Körpers in der ersten Sekunde ist. Und dieses ist genau dasselbe Resultat, was alle Mathematiker nach ihm, nur auf etwas andern Wegen und in einer etwas veränderten Form fanden.

§. 3.

Um den Sinn und innern Zusammenhang der Gröfsen in dieser Formel deutlich einzusehen, ist es nöthig den Begriff der Gröfse deutlich aufzufassen, die wir mit E bezeichnet haben. Es sey b die Barometerhöhe, also die Höhe einer Quecksilbersäule, welche mit dem Druck des Luftkreises im Gleichgewicht steht; es sey ferner die Luft an der Oberfläche der Erde nmal leichter als Quecksilber: so ist klar, dafs eine Luftsäule von der Höhe b mit einer Quecksilbersäule von der Höhe $\frac{1}{n}$ b im Gleichgewicht stehe. Wäre daher die Luft überall so dicht als unten, so würde eine Luftsäule die Höhe nb haben müssen, um mit der Quecksilbersäule b im Gleichgewicht zu stehen. Die Gröfse, welche wir oben E nannten, ist daher = nb; und wir können die Geschwindigkeit des Schalles auch durch die Formel

$$c = \sqrt{2gnb}$$

ausdrücken.

§. 4.

Man kann aber der Gröfse E = nb noch einen andern Sinn beilegen, der sehr wesentlich zur Sache gehört. Betrachtet man sie nämlich als die Höhe, nicht einer Luftsäule, sondern einer Quecksilbersäule, so ist sie das Maafs der relativen, oder wie man gewöhnlich sagt, specifischen Expansivkraft der Luft; nämlich derjenigen Expansivkraft, welche die Luft nach dem Mariotteschen Gesetz erhalten würde, wenn man sie bis zur Dichtigkeit des Quecksilbers zusammenprefste. Denn eine Quecksilbersäule von der Höhe nb würde die Luft in einen nmal kleineren Raum zusammenpressen. Da wir

wir nun annahmen, daſs das Quecksilber n mal schwerer oder dichter als Luft sey, so ist klar, daſs die Luft durch den Druck $nb = E$ die Dichtigkeit des Quecksilbers erhalten würde.

§. 5.

Giebt man in der Formel $c = \sqrt{2gE}$ der Gröſse E diese letzte Bedeutung, so ist sichtbar, daſs die Theorie den Weg des Schalles in einer Sekunde lediglich von den beiden mechanischen Grundeigenschaften der Luft: Schwere und Expansivkraft, abhängig macht, was auch unmittelbar aus den Schlüssen hervorgeht, durch welche die Formel gefunden wird.

§. 6.

Da die gröſsten Geometer bei der strengsten und eifersüchtigsten Prüfung der Newtonischen Bestimmung, dennoch auf verschiedenen Wegen, und bei der sorgfältigsten Vermeidung alles dessen, was man für eine willkührliche oder unsichere Annahme halten könnte, dennoch immer auf Newton's Bestimmung zurückgekommen sind, so müſste ein ganz wunderbar versteckter Fehler in den Schlüssen liegen, wenn sie unrichtig seyn sollte. Gleichwohl bemerkte schon Newton, so wie alle seine Nachfolger, daſs sich die wirkliche Beobachtung sehr weit von der theoretischen Bestimmung entferne. Denn die wirklich beobachtete Geschwindigkeit des Schalles ist, wie wir unten sehen werden, nicht weniger als um den fünften Theil gröſser, wie die aus der Formel berechnete.

§. 7.

Eine solche Abweichung zwischen Theorie und Erfahrung ist zu groſs, als daſs man sie Beobachtungsfehlern beimessen könnte. Alles was man indessen bis jetzt versucht hat, um den Widerspruch aufzuklären, ist unbestimmt, unbefriedigend, und trägt gröſstentheils das Gepräge einer Künstelei, durch die man nur dem Widerspruch Stillschweigen auflegen will, wenn man nicht Ueberzeugung bewirken kann.

Newton selbst macht eine solche Künstelei, indem er annimmt, die Luft bestehe aus kleinen festen Kügelchen, deren Durchmesser gegen den Abstand zweier solcher Kügelchen ein gewisses Verhältniſs habe. Durch den Durchmesser der festen Kügelchen pflanze sich der Stoſs, welcher den Schall verursacht, augenblicklich fort, und nur die Bewegung durch den leeren Raum erfordere eine kleine Zeit; und wenn man daher annähme, daſs sich der Durchmesser eines Kügelchens zu einem Zwischenraum etwa

wie 1 : 8 verhielte, so begreife man, dafs dadurch die Geschwindigkeit des Schalles um den neunten Theil vergröfsert würde, wodurch die Rechnung der Beobachtung nahe genug gebracht werde.

Euler meinte anfänglich, dafs durch das schnelle Aufeinanderfolgen der Schläge die ganze Geschwindigkeit vermehrt werde, nahm aber in der Folge diese ganz unhaltbare Erklärung selbst zurück.

Lagrange sucht die Abweichung durch Rechnung bis auf ein Zehntheil zu verkleinern, und mifst dann den noch übrigen Unterschied der Unsicherheit der Beobachtungen bei. Seine Worte sind folgende (m. s. *Recherches sur la nature et la propagation du son*, in den *Misc. Taur. T. I.*): „*Au reste, il ne doit pas être étonnant, que la théorie diffère, tant soit peu,* „*de l'expérience, à l'égard des quantités absolues. Car on sait, que les expé-* „*riences toujours assés compliquées ne peuvent jamais fournir des données* „*simples et debarrassées de conditions étrangères telles que l'Analyse pure les* „*demanderoit.*"

An einem andern Orte (in den *Nouvelles recherches*, im zweiten Band der *Misc. Taurin.*) äufsert eben dieser grofse Analytiker, dafs der Grund der Abweichung vielleicht in der theoretischen Voraussetzung der unbeschränkten Richtigkeit des Mariotteschen Gesetzes liege. Da indessen für mittlere Grade der Dichtigkeit dieses Gesetz unbestritsen richtig ist, so ist nicht einzusehen, wie sich hieraus der Widerspruch erklären lasse.

§. 8.

Chladni, dieser eben so feine und sinnreiche als glückliche Beobachter der Natur, äufsert sich in seiner deutschen Akustik S. 226 auf folgende Art über diesen Gegenstand. „Meine Meinung, die sich auf einige „nachher zu erwähnende Versuche gründet, ist diese, dafs die Elasticität und „Dichtigkeit einer elastisch-flüssigen Materie allein nicht hinreichen, um die „Geschwindigkeit, mit welcher der Schall darin sich verbreitet, genau zu „bestimmen, sondern dafs diese Geschwindigkeit aufserdem von einer gewis- „sen chemischen Eigenschaft einer solchen Flüssigkeit abhänge."

Dieser Gedanke, der an sich sehr ansprechend ist, verdient aufmerksame Beachtung und Prüfung: denn durch einige allgemeine Betrachtungen, welche sich an denselben anknüpfen lassen, erhält er, wie es mir scheint, ein sehr weit in die Theorie eingreifendes Interesse.

§. 9.

Die Versuche, auf welche sich Chladni in der obigen Stelle be-

zieht, sind folgende. Durch ein eben so sinnreiches als einfaches Verfahren versucht er, S. 226 ff., die Geschwindigkeit des Schalles in andern Luftarten auszumitteln. Seine Methode beruht auf der Theorie der Blaseinstrumente.

Es sey L die Länge einer offenen Pfeife, b, wie oben, die Barometerhöhe, n das specifische Gewicht des Quecksilbers gegen Luft, und S die Anzahl der Schwingungen, welche der Grundton der Pfeife in einer Sekunde macht, so ist

$$S = \frac{1}{L}\sqrt{2gnb} = \frac{1}{L}\sqrt{2gE.} \quad (\S.\ 3.)$$

Euler ist meines Wissens der erste, der diese Formel (in seinem *Tentamen nov. Theor. Musices*, S. 10.), obgleich in einer etwas andern Gestalt, entwickelt hat. Man kann gegen die Schlüsse mifstrauisch seyn, durch welche er zu seiner Bestimmung gelangte; indessen haben andere Analytiker nach ihm, auf andern Wegen, nichts wesentlich verschiedenes gefunden. Denn wenn **Lagrange** in seiner ersten Abhandlung eine Formel findet, welche den Ton von der Weite der Pfeife abhängig macht (*Recherches etc.* in den *Misc. Taur. T. I. p.* 83.), so widerspricht dieses der Erfahrung, weswegen die Formel wohl schwerlich richtig seyn kann. Da übrigens die **Verhältnisse**, welche **Euler's** Formel ausdrückt, mit der Erfahrung völlig übereinstimmen, so kann man höchstens nur die absolute Gröfse, welche sie giebt, nicht aber ihre Form, als zweideutig ansehen.

Vergleicht man nun die Eulersche Formel mit der oben (§. 2. u. 5.) für die Geschwindigkeit des Schalles $c = \sqrt{2gnb} = \sqrt{2gE}$, so ergiebt sich

$$S = \frac{c}{L}$$

Bei ungeänderter Länge L stehen also S und c in geradem Verhältnifs gegen einander.

Hieraus wird begreiflich, wie man durch Vergleichung der Töne, welche eine und dieselbe Pfeife in verschiedenen Luftarten giebt, die Geschwindigkeit des Schalles in diesen Luftarten vergleichen könne. Denn die Schwingungen zweier Töne lassen sich vermittelst des Monochords genau genug auf Zahlen bringen; d. h. man findet die Verhältnisse von S, und eben dadurch auch die Verhältnisse von c. Da man nun für die atmosphärische Luft die absolute Geschwindigkeit des Schalles aus Beobachtungen

kennt, so ist es leicht, sie auch für andere Luftarten zu bestimmen. Und diese Schlüsse sind um so sichrer, da die Formeln für S und c wohl nur in der absoluten Gröſse, nicht aber in den Verhältnissen, von der Erfahrung abweichen.

Auf diese Art hat Chladni die Geschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Luftarten bestimmt, und folgende Tabelle zeigt das Resultat seiner Arbeit.

	Geschwindigkeit des Schalles		Quotient der Beob. durch die Rechn.
	aus Beobacht.	aus Rechn.	
1) Atmosphärische Luft - - - -	1038	887	1,170
2) Oxygen-Luft - - - -	960	845	1,136
3) Azot-Luft - - - - -	990	894	1,107
4) Hydrogen-Luft - - - -	2500	3060	0,817
5) Kohlensaure Luft - - - -	840	774	1,085
6) Salpeter-Gas - - - -	980	811	1,208

Die beiden ersten Spalten sind aus der Ueberschrift verständlich. Die dritte enthält den Factor, womit man das Resultat der Theorie multipliciren muſs, um es mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bringen.

§. 10.

In diesen Resultaten liegt es unzweideutig vor Augen, daſs die Geschwindigkeit des Schalles, auſser der Schwere und Expansivkraft der Luft, noch von etwas drittem abhängig sey, welches bei jeder Luftart anders ist, also unstreitig nichts anders als die materielle oder chemische Verschiedenheit seyn kann. Die besondern Bemerkungen, welche Chladni hierüber macht, verdienen bei ihm selbst nachgelesen zu werden. Ich begnüge mich hier bloſs darauf aufmerksam zu machen, daſs der Ton der Pfeife in beiden Bestandtheilen der atmosphärischen Luft tiefer als in dieser, oder in einer ähnlichen künstlichen Mischung war; ferner, daſs Hydrogenluft einen auffallend tiefern Ton gab, als sie nach ihrer so groſsen specifischen Expansivkraft hätte geben sollen.

§. 11.

Man wird vielleicht bei weiteren Untersuchungen, wie bei allen Resultaten der Erfahrung, Veranlassung finden, die Zahlen der obigen Tabel-

len mehr oder weniger abzuändern, aber schwerlich wird man die daraus gezogenen Folgerungen entkräften können. Sind diese aber richtig, so muſs man den auf dem Wege der Theorie gefundenen Formeln einen Factor beifügen, der für jede besondere Luftart anders zu bestimmen seyn wird. Und ein solcher Factor wird vielleicht allen oder den meisten akustischen Formeln beizufügen seyn.

§. 12.

Noch sind wir nicht tief genug in die Kenntniſs der Gesetze eingedrungen, nach welchen die chemischen Kräfte wirken, um den Werth dieses chemischen Factors theoretisch bestimmen zu können. Aber durch Vergleichung der Rechnung mit sorgfältigen Beobachtungen wird er sich hinlänglich genau ausmitteln lassen. Für die atmosphärische Luft werden wir dieses weiter unten versuchen.

§. 13.

Wir wenden uns nun zu einer sehr allgemeinen, in die ganze Bewegungslehre fester, tropfbarer und luftförmiger Körper eingreifenden Betrachtung.

In der ganzen Theorie der Bewegung betrachtet man die Gesetze derselben als ganz unabhängig von der materiellen, d. h. chemischen Beschaffenheit der Massen. Aber verhält es sich denn wirklich so? und zeigt nicht der im vorigen erörterte Fall einen Einfluſs der chemischen Kräfte auf die Erscheinungen der Bewegung ziemlich unzweideutig? Es ist aber gar nicht schwer, diese Betrachtungen zu vervielfältigen. Man werfe einen Blick auf die Hydraulik. Das Grundgesetz derselben, vermöge dessen die Geschwindigkeit des ausflieſsenden Wassers so groſs ist, als die Geschwindigkeit eines Körpers, der von der Höhe des Wasserspiegels bis zu dem Punkt, wo der Ausfluſs geschieht, herabgefallen wäre, bestätigt sich in Ansehung der Verhältnisse, unter sonst gleichen Umständen, sehr gut. Was aber die absolute Gröſse betrifft, so findet sie sich fast in jedem Fall anders, und in gewissen Fällen sogar gröſser, als sie nach der Theorie seyn sollte. Und die Erfahrung lehrt, daſs jede Veränderung in der Beschaffenheit der Ausfluſsöffnung einen Einfluſs auf dieselbe habe. Auf den ersten Blick scheint zwar hier nichts Chemisches im Spiel zu seyn. Räumt man aber einmal im Allgemeinen den Einfluſs chemischer Kräfte auf die Bewegung ein, so wird man diesen Einfluſs auch hier nicht verkennen. Denn die sperrenden Wände, und die Flüssigkeit, die sie enthalten, sind ungleichartige Ma-

terien, zwischen denen in jedem Fall chemische Anziehung stattfindet. Und wenn diese auch wegen der grofsen Cohäsionskraft in den sperrenden Wänden keine Mischung bewirken kann, so ist es doch sehr wohl denkbar, dafs sie einen Einflufs auf die unmittelbar berührende, und durch diese mittelbar auch auf die übrige Flüssigkeit, besonders in engen Oeffnungen und Röhren, haben könne. Bei dieser Ansicht ist es wenigstens unstreitig, dafs durch jede Aenderung in der Beschaffenheit der Oeffnung auch das Verhältnifs der chemischen Anziehung auf die Bewegung der Flüssigkeit geändert werde.

Noch sichtbarer ist aber der Einflufs des Chemischen bei dem Widerstand, den tropfbare und luftförmige Flüssigkeiten den in ihnen vorgehenden Bewegungen entgegensetzen. Man hat sich längst durch Versuche überzeugt, dafs Newton's Gesetze hier nirgends sichre Resultate geben, ja, dafs sie sich (selbst unter gleichen Umständen) sogar in Ansehung der Verhältnisse nur annäherungsweise, nicht genau bestätigen. Es ist gewifs, dafs Wasser, und Oel, und Quecksilber, unter übrigens völlig gleichen Umständen, nicht im Verhältnifs ihrer Dichtigkeit, wie es nach der Theorie seyn sollte, widerstehen. Und kann der Grund dieser Abweichung in etwas anderm, als in der materiellen Verschiedenheit der Flüssigkeiten, d. h. in der Mitwirkung chemischer Kräfte, liegen?

Sogar die Mechanik fester Körper bietet Stoff zu merkwürdigen Betrachtungen in dieser Beziehung dar. Auf die Bewegung der Weltkörper angewendet, hat die Theorie den unerwartetsten und bewundernswürdigsten Erfolg gehabt. Und vielleicht hat eben dieser Umstand viel dazu beigetragen, dafs man den Einflufs der chemischen Kräfte auf die Bewegung bisher nicht wahrgenommen hat. Aber die Weltkörper bewegen sich in Räumen, in welchen, allem Anschein nach, keine Spur einer widerstehenden Materie vorhanden ist. Ihre Masse befindet sich daher in keiner Berührung mit Materien, welche durch chemische Kräfte auf sie einwirken könnten. Denn der einzige uns seinem Daseyn nach bekannte Stoff, mit welchem sie in Berührung kommen, ist der Lichtstoff, und dieser zeigt nirgends eine Fähigkeit, in gröberen Massen Bewegungen hervorzubringen. Hieraus wird aber klar, warum sich die Weltkörper so genau unter die Formeln der Analytiker fügen. Bei allen Bewegungen hingegen, die in unserer Nähe vorgehen, will die Erfahrung nirgends genau mit der Theorie übereinstimmen. Es ist aber auch klar, dafs bei allen in unserer Nähe vor-

gehenden Bewegungen die bewegte Masse stets in unvermeidlicher Berührung mit ungleichartigen Körpern ist, so daſs allerdings die chemischen Anziehungen zu wirklicher Thätigkeit gelangen müssen. Erwägt man aber, daſs Eisen auf Eisen sich stärker als auf Messing, unter übrigens ganz gleichen Umständen, reibt, daſs also das Eisem dem Eisen stärker als dem Messing Widerstand leistet, so dürfte sich dieses schwerlich anders als aus einer chemischen Einwirkung erklären lassen.

§. 14.

Daſs Newton und die groſsen Analytiker, deren Scharfsinn wir die bewundernswürdige Theorie der höhern Mechanik verdanken, einen Einfluſs chemischer Kräfte nicht ahnen konnten, ist leicht einzusehen, da es dem menschlichen Geiste erst in der letzten Hälfte des vorigen Jahrhunderts gelungen ist, die Chemie zu dem Rang einer Wissenschaft zu erheben; die aber, als solche, selbst jetzt noch erst im Werden ist, Daher erklärten sie sich, nach der uralten Vorstellungsart, die materielle Verschiedenheit der Körper bloſs atomistisch, d. h. rein mechanisch. Und noch jetzt ist diese rein mechanische Ansicht der Natur in manchen Köpfen so tief eingewurzelt, daſs es sogenannte philosophische oder metaphysische Lehrbücher der Naturlehre giebt, wo man auf den ersten Seiten die Behauptung, daſs es keine Veränderung als Bewegung im Weltall gebe, als einen unwidersprechlichen Grundsatz aufgestellt findet. Sonderbar genug, wenn ein Philosoph nicht wahrnimmt, daſs während der Bewegung seiner Hand in seinem eigenen Kopfe eine Veränderung vorgeht, die aus bloſser Bewegung zu erklären unmöglich ist; desgleichen, daſs einer chemischen Mischung wohl Bewegungen vorangehen müssen, daſs aber in dem Augenblick, wo die Mischung erfolgt, eine Veränderung der Materie und aller ihrer Eigenschaften vorgeht, die etwas anders ist als Bewegung.

Hätten aber auch die Schöpfer unserer Mechanik das Wesen der chemischen Kräfte und ihren Einfluſs auf die Bewegungen selbst deutlicher erkannt als wir, so hätten sie doch die Theorie nicht anders entwerfen dürfen, als sie gethan haben. Denn die Gesetze unseres Erkenntniſsvermögens fordern, bei aller wissenschaftlichen Thätigkeit, Trennung des Ungleichartigen und abgesonderte Betrachtung des Gleichartigen. Und so wie man in der Astronomie die Bewegung eines Planeten erst bloſs als eine Wirkung von der anziehenden Kraft der Sonne betrachtet, und hernach erst den störenden Einfluſs anderer Kräfte untersucht, eben so wird man jederzeit in der

ganzen physischen Bewegungslehre jede Bewegung erst als ein Product rein mechanischer Kräfte und Eigenschaften betrachten, und erst, wenn diese Untersuchung beendigt ist, den störenden Einflufs chemischer Kräfte erforschen müssen. Ist diese Bemerkung gegründet, so rechtfertigt sie die mathematische Theorie der Bewegung gegen alle Einwürfe, die man wider sie aus dem Mangel ihrer Uebereinstimmung mit der Erfahrung hernehmen möchte.

§. 15.

Aber ist es nicht ein Widerspruch im Begriff, chemischen Kräften eine mechanische Wirksamkeit beizulegen? Gewifs nicht! Denn es giebt wohl keine Kraft in der Natur, welche nur eine einzige Art von Wirkungen hervorbrächte, und in welcher Art sie wirksam seyn könne, hängt immer von äufseren Verhältnissen ab. Wird sie durch diese in einer Art zu wirken behindert, so tritt ihre Thätigkeit in einer andern Art desto sichtbarer hervor; wird ihr eine Art der Wirksamkeit erleichtert, so verläfst sie gleichsam freiwillig eine andere. Wenn die Schwere verhindert wird, Bewegung hervorzubringen, so bewirkt sie Druck und Pressung, und wenn die Wärme eine Materie findet, deren Aggregatzustand sie ändern kann, so hört sie auf, die Temperatur zu erhöhen. Dafs in den chemischen Kräften auch ein Bestreben nach mechanischer Thätigkeit liege, zeigt sich selbst in allen chemischen Erscheinungen. Denn es ist eine Thatsache ohne Ausnahme, dafs mit jeder chemischen Mischung auch eine mehr oder minder in die Augen fallende Veränderung aller mechanischen Eigenschaften, als Dichtigkeit, Federkraft, Härte u. s. f. verbunden sey. Es ist daher der Analogie der ganzen Natur angemessen, dafs chemische Kräfte mechanisch wirken, wenn sie nicht chemisch wirken können.

§. 16.

Unsere Kenntnifs von den Gesetzen, nach welchen diese Kräfte wirken, sind indessen noch sehr mangelhaft, und alle Versuche, sie auf Maafs und Zahl zu bringen, sind bis jetzt nur von einem geringen Erfolg gewesen. Daher ist es gegenwärtig unmöglich, ihren Einflufs auf die Bewegungen theoretisch zu bestimmen; und so wie die hier vorgetragene Ansicht in der rein mathematischen Theorie der Bewegung nichts abändert, so öffnet sie uns gegenwärtig auch keinen neuen Weg für die Anwendung der theoretischen Formeln auf die Erfahrung; sondern wir müssen uns wie bisher

her begnügen, für die sich zeigenden Abweichungen empirische Regeln aufzusuchen.

§. 17.

Was hilft also, wird man vielleicht sagen, diese ganze Ansicht, wenn wir dadurch weder in der Theorie noch in der Anwendung gebessert werden?

Es läfst sich mehr als ein Gewinn nachweisen.

Zuerst kann man es nicht oft und nicht laut genug sagen, dafs alles, was **Wahrheit** ist, seinen Werth in sich selbst hat, und nicht erst des Stempels einer nachzuweisenden Nützlichkeit bedürfe. Man prüfe, ob unsere Ansicht richtig sey oder nicht, der theoretische oder praktische Nutzen wird sich von selbst finden.

Unmittelbar wird indessen auch jetzt schon die Mechanik den Vortheil haben, dafs der geheime Verdacht einer künstlichen Erschleichung nicht so leicht ihre geprüftesten Resultate drücken wird, wenn die Formeln beträchtlich von der Erfahrung abweichen.

Endlich gewinnt die Bewegungslehre auch dadurch, dafs ihr für die Erforschung der Ursachen ihrer Abweichung von der Wirklichkeit ein beschränkterer Raum angewiesen wird, wodurch das Aufsuchen leichter und sicherer wird.

Zweiter Abschnitt.

Genauere Vergleichung der wirklichen Geschwindigkeit des Schalles in der atmosphärischen Luft mit der theoretischen Formel.

§. 18.

Da wir die Geschwindigkeit, welche die theoretische Formel giebt, c genannt haben, so wollen wir die wirkliche aus Beobachtungen abgeleitete C nennen.

Soll diese letzte durch eine Formel vorgestellt werden, so mufs der theoretischen Formel noch ein Factor beigefügt werden, welchen wir den **chemischen** nennen und mit μ bezeichnen wollen.

Wir setzen also $C = \mu c$, d. i. $C = \mu \sqrt{2gnb}$, oder $C = \mu \sqrt{2g E}$. Ueber diesen Factor lassen sich nun folgende Betrachtungen anstellen.

§. 19.

Die bekannten Ursachen, welche aufser Schwere und Expansivkraft der Luft einen Einflufs auf die Geschwindigkeit des Schalles haben, sind die Wärme und die in der Luft vorgehenden Veränderungen der chemischen Mischung.

Durch die Wärme wird die relative Expansivkraft der Luft, d. h. der Werth des Buchstaben E, verändert. Daher hat die Wärme keinen Einflufs auf den Factor μ, sondern nur auf E. Jener Factor ist daher blofs von den Mischungsveränderungen abhängig.

§. 20.

Könnten wir genau angeben, was E für eine analytische Function der Wärme sey, so würden wir den mechanischen Theil der Formel in absoluter Vollendung darstellen können. Dieses wird aber erst dann möglich seyn, wenn es den Naturforschern gelungen seyn wird, ein vollkommenes Maafs der Wärme ausfindig zu machen: doch sind wir im Stande, den Einflufs, welchen eine nach unserm Quecksilber-Thermometer angezeigte Wärmeveränderung auf die Expansivkraft der Luft hat, für mittlere Temperaturen, und besonders für diejenigen, welche in der Luft vorkommen, näherungsweise, doch mit hinlänglicher Sicherheit, darzustellen.

§. 21.

Nach §. 3. u. 4. ist $E = nb$, wo n das specifische Gewicht des Quecksilbers, gegen Luft verglichen, und b die Barometerhöhe war. Es sey also bei einer bestimmten Temperatur, wozu wir 0° der 80theiligen Scale wählen, und bei einem bestimmten Barometerstand, den wir B nennen wollen, das Gewicht von einem Cubikzoll Luft $= L$, und von einem Cubikzoll Quecksilber im luftleeren Raum $= Q$, so ist $n = \frac{Q}{L}$, also

$$E = \frac{QB}{L}.$$

Es frägt sich nun, welchen Werth E erhalten werde, wenn das Thermometer von 0° bis r° steigt.

§. 22.

Nehmen wir an, dafs r schon wegen der Ausdehnung des Glases be-

richtigt sey, und dehnt sich das Quecksilber von 0° bis 80° im Verhältniſs $1 : 1 + m$ aus, so wird sein Volumen von 0° bis r° im Verhältniſs $1 : 1 + \frac{rm}{80}$ zunehmen; und das Gewicht eines Cubikzolls wird in diesem umgekehrt genommenen Verhältniſs kleiner werden. Q wird also übergehen in $\frac{Q}{1 + \frac{mr}{80}}$.

§. 23.

Die Luft dehne sich bei gleichbleibendem Druck B vom Eispunkte bis zum Siedpunkte aus, im Verhältniſs $1 : 1 + l$. Nach einem Luft-Thermometer würde sich hieraus die Ausdehnung derselben für jede Temperatur genau bestimmen lassen. Da wir aber die Veränderung von Q nach dem Quecksilber-Thermometer bestimmt haben, so müssen wir auch die Veränderung der Luft auf dieses beziehen. Leider fehlt uns noch immer eine recht genaue Vergleichung beider, und wir müssen uns daher bloſs an Lambert's und Gay Lussac's Versicherung halten, daſs zwischen dem Frost- und Siedpunkt beide Thermometer einen sehr übereinstimmenden Gang haben. Unter dieser Voraussetzung ändert sich also die Ausdehnung der Luft von 0° bis r° im Verhältniſs $1 : 1 + \frac{rl}{80}$. Folglich geht das Gewicht von einem Cubikzoll Luft über in $\frac{L}{1 + \frac{rl}{80}}$.

§. 24.

Das specifische Gewicht der Luft ändert sich aber auch mit der Barometerhöhe, und zwar in geradem Verhältniſs. Geht also B über in $B + \beta$, d. h. verändert es sich im Verhältniſs $1 : 1 + \frac{\beta}{B}$, so verändert sich auch L in eben dem Verhältniſs. Es hebt sich also in der Formel $E = \frac{BQ}{L}$ der Factor $1 + \frac{\beta}{B}$, der im Zähler und Nenner zugesetzt werden sollte.

Setzen wir also für Q und L die §. 22. und 23. gefundenen Werthe, so erhalten wir

$$E = \frac{1 + \frac{1}{80} rl}{1 + \frac{1}{80} rm} \cdot \frac{BQ}{L}$$

Da aber m sehr klein ist, und auch l und $\frac{r}{80}$ allezeit Brüche sind, so kann man mit Weglassung der höhern Potenzen und Producte dieser kleinen Gröſsen annähernd setzen:

$$E = \left(1 + \frac{rl}{80}\right)\left(1 - \frac{rm}{80}\right)\frac{BQ}{L} = \left(1 + \frac{l-m}{80} r\right)\frac{BQ}{L}$$

in welcher Formel B, Q und L, desgleichen l und m, beständige Gröſsen sind, und der Thermometerstand r die einzige veränderliche Gröſse ist.

§. 25.

Bringen wir endlich diesen Werth von E in die Formel $C = \mu\sqrt{2gE}$, so erhalten wir

$$C = \mu \sqrt{\frac{2g\,BQ}{L}\left(1 + \frac{l-m}{80} r\right)}$$

wofür wir ohne erheblichen Fehler setzen dürfen

$$C = \mu \left(1 + \frac{l-m}{160} r\right)\sqrt{\frac{2g\,BQ}{L}}$$

Zahlenrechnung.

§. 26.

Nach Lambert und Gay Lussac ist $l = 0{,}375$, und nach Roy $m = 0{,}017$; also $\frac{l-m}{160} = \frac{0{,}358}{160} = 0{,}00224$.

Ferner ist nach Biot und Arago (*Mém. sur les affinités des corps pour la lumière, Paris* 1810.) der Quotient $\frac{Q}{L} = 10463$, und zwar für 0° Temperatur, und $0{,}76^m$ Barometerhöhe, welches in Fuſsen des alten Französischen Maaſses $B = 2{,}3396$ giebt. Endlich wollen wir $g = 15{,}0991$ setzen, da eine Veränderung von einigen Graden der Breite von keinem erheblichen Einfluſs auf die Geschwindigkeit des Schalles ist *).

*) Nicht ohne Beschämung muſs ich bemerken, daſs wir die Länge des einfachen Sekunden-Pendels, und den davon abhängigen Werth von g, für Berlin, noch nicht durch direkte Versuche kennen.

Vermittelst dieser Werthe erhält man

$$C = \mu . 859{,}79 \, (1 + 0{,}00224 . r) \text{ Par. Fuſs}$$

oder

$$C = \mu . 889{,}88 \, (1 + 0{,}00224 . r) \text{ Rh. Fuſs.}$$

§. 27.

In Betreff des Factors μ bemerken wir Folgendes:

Aus den oben §. 10. mitgetheilten Beobachtungen Chladni's, über die Geschwindigkeit des Schalles in mehreren Luftarten, wo wir in der letzten Spalte der dort befindlichen Tabelle den Werth von μ für die untersuchten Luftarten beigefügt haben, ergiebt sich, daſs μ nicht nur für jede einfache Luftart verschieden und von den mechanischen Eigenschaften derselben unabhängig sey; sondern sogar, daſs man für eine Mischung zweier Luftarten den Werth dieses Factors nicht aus den Factoren der Bestandtheile bestimmen könne, wie aus der Vergleichung von Nr. 1, 2, 3, hervorgeht. Hieraus folgt aber, daſs wir gegenwärtig in keinem Fall den Factor theoretisch bestimmen können, bis etwa in Zukunft eine genauere Kenntniſs der chemischen Naturgesetze Mittel hiezu darbieten möchte.

§. 28.

Unsere gegenwärtige Absicht geht bloſs auf eine genauere Bestimmung dieses Factors für die atmosphärische Luft. Und hier haben wir zuvörderst zu untersuchen; ob wir wohl erwarten dürfen, daſs derselbe unter allen in der Atmosphäre zur Wirklichkeit gelangenden Verhältnissen von unveränderter Gröſse sey.

Ich glaube, daſs man diese Frage, ungeachtet der steten Mischungsveränderungen in der Atmosphäre, dennoch mit vieler Sicherheit bejahend beantworten könne, und zwar aus folgenden Gründen.

1) Die wesentlichen Bestandtheile der Luft ändern ihr quantitatives Verhältniſs nach den genauesten Beobachtungen gar nicht. Die zufälligen Beimischungen aber sind in Vergleichung mit der Masse der Luft so gering, daſs man von ihnen keinen bemerklichen Einfluſs erwarten kann. Die wichtigste dieser zufälligen Beimischungen ist der Wasserdunst, und doch beträgt, selbst in der Sommerwärme und im Maximum der Dichtigkeit, der Wassergehalt kaum 2 Procent von dem Gewicht der Luft. Noch weit geringer ist aber der Gehalt an Kohlensäure oder andern luft- oder dunstartigen Beimischungen.

2) Chladni ahmte die Mischung der atmosphärischen Luft nach, indem er, nach dem damals für richtig gehaltenen Verhältnisse, 27 Theile Oxygen mit 73 Azot verband. Dieses Verhältniſs wich also bedeutend von der Wirklichkeit ab, und doch gab die Orgelpfeife in dieser Mischung den nämlichen Ton, als in der atmosphärischen Luft. Auch merkt er ausdrücklich an, daſs beträchtliche Veränderungen in der Mischung nur langsame im Ton hervorbringen. Es ist daher nicht glaublich, daſs die kleinen Mischungsveränderungen, die in der Luft vorgehen, merkliche Aenderungen in der Geschwindigkeit des Schalles hervorbringen können.

3) Endlich bestätigen auch die Beobachtungen, daſs bei ungeänderter Temperatur die trockne, feuchte oder neblichte Beschaffenheit der Luft keine merkliche Veränderung in der Geschwindigkeit des Schalles hervorbringt.

§. 29.

Für meinen gegenwärtigen Zweck finde ich keine andern als Herrn Benzenberg's Beobachtungen brauchbar, nicht nur weil sie mit besonderer Sorgfalt, sondern auch mit bestimmter Angabe des Thermometerstandes gemacht sind. (M. s. Gilbert's Ann. Neue Folge 1811. St. 9.)

Hr. Benzenberg fand

1) $C' = 1031,9$ Par. Fuſs, bei $1,5^{\circ}$ Deluc $= r'$;
2) $C'' = 1079,7$ - - , - 22,4 - $= r''$;
3) $C''' = 1080,0$ - - , - 22,7 - $= r'''$.

Hiezu giebt die obige Formel (§. 26., wenn man μ aus derselben wegläſst, und die hier angegebenen drei Werthe von r hineinbringt) folgende drei Werthe von c:

1) $c' = 862,68$ Par. Fuſs.
2) $c'' = 902,92$ - -
3) $c''' = 903,51$ - -

Und hieraus ergeben sich folgende drei Werthe von $\mu = \frac{C}{c}$:

1) $\mu' = 1,1906$
2) $\mu'' = 1,1958$
3) $\mu''' = 1,1953$

$\mu = 1,1939$ als Mittel.

§. 30.

Multiplicirt man mit diesem Werthe von μ die Formel für C, §. 26.,

so erhält man für die Geschwindigkeit des Schalles in der atmosphärischen Luft

$$C = 1026,49\ (1 + 0,00224.\ r)$$

§. 31.

Beobachtern, welche Gelegenheit haben, dergleichen Versuche zu wiederholen, empfehle ich, außer dem Thermometer, auch das Barometer zu beobachten, und zugleich die zeitige Dichtigkeit der Luft durch Abwägung zu bestimmen, damit man unmittelbar den Werth von E fur jede Beobachtung bestimmen könne.

Ueber den Einfluſs, welchen die Ausdehnung des Glases auf die Anzeigen des Thermometers hat.

Von Herrn E. G. Fischer *).

§. 1.

Je mehr wir uns einer genauen Kenntniſs der Gesetze nähern, nach welchen die Kraft der Wärme wirkt, die eine so überaus wichtige Rolle in der todten und lebendigen Natur spielt, um so unentbehrlicher wird eine genaue Theorie derjenigen Werkzeuge, womit wir diese Kraft zu messen versuchen.

Bei allen mit einer tropfbaren Flüssigkeit gefüllten Thermometern liegt die Idee zum Grunde, daſs die Zunahmen, welche das Volumen der Flüssigkeit bei steigender Wärme erhält, als ein Maaſs der Wärme betrachtet werden sollen. Nun weiſs man zwar, daſs diese Zunahmen der wirklichen Kraft der Wärme nicht proportional sind; aber es ist auch klar, daſs man wenigstens die Gröſse dieser Zunahmen genau kennen müsse, wenn wir hoffen wollen, noch einst zu entdecken, welche Functionen sie von der wirklichen Kraft der Wärme sind.

Es ist ferner bekannt, und leicht einzusehen, daſs, wenn auch die Röhre eines Quecksilber-Thermometers vollkommen cylindrisch, und die Scale genau in gleiche Theile getheilt ist, dennoch zu gleichen Graden nicht gleiche Zunah-

*) Vorgelesen den 4. April 1816.

Zunahmen vom Volumen des Quecksilbers gehören. Denn da die Röhre selbst in der Wärme sich nach allen Richtungen ausdehnt, so ist deutlich, daſs einem an der Scale höher liegenden Grad ein gröſserer innerer Raum, also auch eine gröſsere Zunahme an den Volumen des Quecksilbers zugehöre, als einem niedrig liegenden.

Ob sich gleich schon mehrere Gelehrte mit dieser Untersuchung beschäftigt haben, so halte ich es doch für dringend nothwendig, die Theorie einmal in ihrem ganzen Umfang zu erörtern, theils um sie auf das einfachste und faſslichste vorzutragen und aus derselben leicht anwendbare Formeln zu entwickeln, theils um die Resultate derselben in Tabellen darzulegen, von denen jeder Naturforscher ohne Zeitverlust Gebrauch machen könne; theils um es sichtbar und fühlbar zu machen, daſs wir in der Lehre von der Wärme vielerlei beinahe, aber gar wenig ganz wissen; endlich um die Punkte zu bezeichnen, auf welche hingearbeitet werden muſs, um wo möglich zu einer sichern Theorie zu gelangen.

Man stöſst aber gleich bei dem ersten Schritt dieser Untersuchung auf die Schwierigkeit, daſs wir die Gesetze noch nicht kennen, nach welchen feste Körper durch die Wärme ausgedehnt werden. Nothdürftig wissen wir von einigen Körpern, wie stark sich ihre Länge vom Eispunkt bis zum Siedpunkt vergröſsert. Nur ein Paar Körper giebt es, deren Ausdehnung man auch in einigen Zwischengraden untersucht hat. Dahin gehört besonders eine Reihe von Beobachtungen, welche uns Deluc über die Ausdehnung des Glases gegeben hat, die wir zuerst näher betrachten müssen.

I. Deluc's Versuche über die Ausdehnung des Glases.

§. 2.

In dem *Philos. Trans. Vol. LXVIII. for* 1778, *Part. I. Nr.* 20. S. 414. findet sich eine Abhandlung mit dem Titel: *An Essay on Pyrometry, on Areometry and on Physical Measures in general. By J. A. De Luc.*

In dieser Abhandlung theilt der Verfasser unter andern folgende Beobachtungen über die Ausdehnung des Glases mit.

Auf einer eigenen, mit einer sehr feinen mikrometrischen Scale und einem guten Mikroskop versehenen Maschine, welche a. a. O. beschrieben und gezeichnet ist, lieſs er eine Glasröhre von 18 Zoll Länge erkalten, von 70° bis 10° der achtzigtheiligen Scale, und maaſs mittelst der mikrometrischen Vorrichtung die Verkürzung derselben von 10 zu 10 Graden.

In den Einheiten seiner mikrometrischen Scale fand er die Verkürzungen wie folgt:

31, 29, 26, 24, 22, 19.

Die Summe dieser Zahlen ist 151. Die Glasröhre hatte sich also von 70° bis 10°, d. i. in einem Umfange von 60°, um 151 mikrometrische Einheiten verkürzt. Hieraus berechnete er vermittelst der einfachen Proportion 60 : 80 = 151 : 201$\frac{1}{3}$, dafs sich die Röhre um 201$\frac{1}{3}$ Theile verkürzt haben würde, wenn er sie von 80° bis 0° erkältet hätte. Reducirte er nun diese mikrometrischen Theile auf einen Bruch des ganzen Fufses, so ergab sich, dafs eine Glasröhre von 1 Fufs Länge, vom Eispunkt bis zum Siedpunkt, sich um $\frac{1}{1200}$ = 0,000833 Fufs veränderte, und da dieses Resultat genau dasselbe war, was Ramsden gefunden hatte, so sey man berechtigt, diese Bestimmung für sehr genau zu halten.

§. 3.

Da De Luc die Veränderung der Länge von 0° bis 10°, und von 70° bis 80° nicht unmittelbar beobachtet hat, so sind wir genöthigt, diese zu ergänzen, welches indessen mit hinlänglicher Sicherheit geschehen kann. Da nämlich die Veränderung der Länge von 10° bis 70° 151, von 0° bis 80° aber (mit Weglassung des Bruchs) 201 Theile beträgt, so betragen die beiden gesuchten Veränderungen zusammen 201 — 151 = 50 Theile. Da aber die Differenzen aller De Luc'schen Zahlen nur 2 oder 3 betragen, so können die beiden gesuchten Veränderungen nur entweder 17 + 33 oder 16 + 34 gewesen seyn. Ich gebe den letztern beiden Zahlen den Vorzug, weil die Ausdehung des Glases in der Hitze gewifs beträchtlich zunimmt, also 34 für die Ausdehnung von 70—80° wahrscheinlicher ist als 33. Auf alle Fälle ist aber klar, dafs die Zahlen 16 und 34 höchstens nur um eine mikrometrische Einheit unsicher sind.

§. 4.

Mit Hülfe dieser Ergänzungen läfst sich nun zuerst folgende Tabelle berechnen.

Grade des 80theilig. Therm. x	Verlängerung der 18zölligen Glasröhre in mikrom. Theilen von 10 zu 10 Graden	vom Eispunkt an gerechnet	Verlängerung einer Glasröhre, deren Länge bei dem Eispunkt = 1 angenommen wird. y
0		0	0,000 000
10	16	16	0,000 066
20	19	35	0,000 145
30	22	57	0,000 236
40	24	81	0,000 336
50	26	107	0,000 443
60	29	136	0,000 564
70	31	167	0,000 692
80	34	201	0,000 833

Die 2te Spalte enthält De Luc's Zahlen mit den beigefügten Ergänzungen.

Die Zahlen der 3ten Spalte zeigen an, um wie viele mikrometrische Theile sich De Luc's Glasröhre, vom Eispunkt an bis zu jeder in der ersten Spalte angezeigten Temperatur, in der Länge verändert habe. Es fällt in die Augen, daſs sie durch Addition der Zahlen der 2ten Spalte entstehe.

Die Zahlen der 4ten Spalte entstehen aus denen der 3ten durch Verminderung in dem Verhältniſs 201 : 0,000 833. Da nämlich die letzte Zahl die Veränderung einer Glasröhre von 0° — 80° vorstellt, wenn ihre Länge bei dem Eispunkt = 1 gesetzt wird, so zeigen alle übrigen Zahlen an, um wieviel eine Glasröhre nach eben der Einheit ihre Länge verändert von 0° bis zu jeder in der ersten Spalte aufgeführten Temperatur.

II. Ueber den Grad des Vertrauens, welchen die Zahlen dieser Tabelle verdienen.

§. 5.

De Luc zeigt die Gröſse der Theile seiner Scale nicht an, sie läſst sich aber aus seinen Angaben berechnen. Wenn die Länge vom Eispunkt bis Siedpunkt sich um $\frac{1}{1200}$ vergröſserte, so muſste sich die Länge von

18 Zoll oder 216 Linien um $\frac{216}{1200}$ oder 0,18 Linien vergröſsern. Diese Länge betrug aber auf der Mikrometerscale (mit Weglassung des Bruchs) 201 Theile. Folglich war die Länge eines Mikrometertheils beinahe 0,0009, also noch etwas kleiner als 0,001 einer Linie.

Wahrscheinlich war also die ganze Vorrichtung darauf angelegt, Tausendtheile einer Linie wahrzunehmen. Nun ist es so gut als unmöglich, die Länge einer Linie wirklich durch Theilstriche in 1000 Theile zu theilen, aber nicht unmöglich, sie in 100 zu theilen und Tausendtheile zu schätzen, und ein geübtes Auge würde bei hinlänglicher Vergröſserung nicht leicht um ein ganzes Tausendtheil fehlen. Verbindet man indessen hiemit die anderweitigen kleinen Mängel, welche bei der genausten Vorrichtung unvermeidlich sind, so ist das äuſserste, was wir den Zahlen der zweiten Spalte einräumen können, daſs ihre Zehner fehlerfrei, die Einer aber hin und wieder um 1 zu groſs oder zu klein seyn könnten.

Bei den Zahlen der dritten Spalte ist die Unsicherheit noch etwas gröſser, und wir dürfen sie wohl nicht geringer als auf zwei Einer setzen. Diese Zahlen entstehen durch Addition der Zahlen in der 2ten Spalte, und es ist z. B. die letzte Zahl 201 die Summe von allen 8 Zahlen der zweiten Spalte. Lägen nun die Fehler der 2ten Spalte entweder alle auf der Plusseite, oder alle auf der Minusseite, so könnte der Fehler der Zahl 201 volle acht Einer betragen. Aber nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit muſs man annehmen, daſs die Fehler zum Theil entgegengesetzt sind, und sich daher vermindern. Wären vier Zahlen der 2ten Spalte um 1 zu groſs, und die andern eben so viel zu klein, so würden sie sich ganz heben. Wäre 5 zu groſs und 3 zu klein, so würde 201 um 2 Einer zu groſs seyn. Eine gröſsere Ungleichheit in Vertheilung der Fehler anzunehmen ist aber nicht sehr wahrscheinlich. Daher treten wir gewiſs der Genauigkeit des Beobachters nicht zu nahe, wenn wir die Unsicherheit der dritten Spalte zu 2 Einern annehmen.

Hieraus ergiebt sich aber die Unsicherheit der vierten Spalte: denn da 16 Einer (Zeile 2) den Werth 0,000 066 geben, so wird man für 2 Einer den Werth 0,000 008 erhalten; d. h. die 6ten Bruchziffern sind ganz unsicher, der wahrscheinliche Fehler dürfte aber doch keine volle Einheit der 5ten Stelle betragen.

Anmerk. Betrachtungen dieser Art mögen vielleicht etwas langweilig scheinen, aber man sollte sie bei Zahlen, welche das Resultat von Beobachtungen sind, nie vernachlässigen: denn eine groſse Menge von Bruchziffern ist völlig zwecklos, wenn man nicht bestimmt

weiſs, wie weit man sich auf sie verlassen kann. Es berechtigt indessen diese Betrachtung nicht, mit dergleichen Zahlen, beliebige Veranderungen innerhalb der Granzen der anerkannten Unsicherheit vorzunehmen. Denn es ist leicht zu erachten, daſs man den Zahlen unserer 4ten Spalte fast jedes beliebige Gesetz würde aufdringen können, wenn man sich Aenderungen bis zu 8 Einheiten der 6ten Stelle erlauben wollte. Daſs man aber übrigens doch die Rechnung in mehr Ziffern führen müsse, als in der Anzahl derer, die man für ganz sicher halten kann, bedarf wohl kaum einer Erwähnung.

III. Näherungsformel für die Ausdehnung des Glases durch die Wärme.

§. 6.

Man kann die Zahlen der 4ten Spalte mit einer sehr starken Annäherung, die weit unter den Gränzen der eben bestimmten Unsicherheit bleibt, als Glieder einer arithmetischen Reihe der zweiten oder dritten Ordnung betrachten. Nennt man die Temperatur x, und die zugehörige Verlängerung des Glases y, so wird die Gleichung im ersten Fall die Form $y = \alpha x + \beta x^2$, im andern die Form $y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$ haben müssen. Denn da für $x = o$ auch $y = o$ ist, so werden die Gleichungen in dieser Form dem Werth $x = o$ jederzeit Genüge leisten.

Legt man für den ersten Fall noch die Werthe 40 und 80 für x, also 0,000 356, und 0,000 833 für y, zur Bestimmung von α und β zum Grunde, so findet man

$$y = 0{,}000\,006\,387\,5\,x + 0{,}000\,000\,050\,312\,5\,x^2$$

$$\text{oder } y = \frac{7x(292 + 23x)}{2^5 . 10^8}.$$

Setzt man hier für x nach der Reihe die Werthe 0, 10, 20 bis 80, so erhält man in den drei letzten Bruchstellen von y die Zahlen 000; 069; 148; 237; 356; 445; 564; 693; 833; wo die stärkste Abweichung nur 3 Einheiten der 6ten Bruchstelle beträgt.

Will man die Zahlen als eine Reihe der 3ten Ordnung darstellen, und legt man für x die Werthe 20, 50, und 80, also für y die Werthe 0,000 145; 0,000 443; 0,000 833 zum Grunde, so ergiebt sich

$$y = \frac{44\,242\,000\,x + 40\,250\,x^2 - 25\,x^3}{8 . 9 . 10^{10}}$$

und wenn man statt x wieder nach der Reihe 10, 20, 30 etc. setzt, so erhält man für die 3 letzten Ziffern von y die Zahlen: 000; 067; 145; 234; 333; 443; 563; 693; 833, wo die einzige Zahl 333 um 3 Einheiten der 6ten Stelle abweicht.

Nach dieser letzten Formel, welcher wir deswegen den Vorzug gebend, weil sie in den niedrigern Graden eine schärfere Annäherung giebt, ist die Ausdehnung des Glases in der am Ende dieser Abhandlung befindlichen Tabelle von — 32° bis + 120° von 5 zu 5 Graden berechnet.

§. 7.

Man findet vermittelst dieser Gleichung die Ausdehnung des Glases für jede Temperatur zwischen dem Eis- und Siedpunkt, mit einer Unsicherheit von 2 bis 3 Einheiten der 6ten Bruchstelle. Ausserhalb des Fundamentalabstandes aber sind die Resultate derselben desto unsichrer, je weiter man sich von den beiden festen Punkten entfernt. Denn es würde ein übereiltes Urtheil seyn, wenn Jemand glauben wollte, dass das wahre Gesetz der Ausdehnung des Glases vielleicht wirklich durch eine solche Formel ausgedrückt seyn könnte, da sich die einzelnen De Luc'schen Beobachtungen so gut durch dieselbe darstellen lassen.

Dass dieses unmöglich sey, lässt sich durch eine allgemeine Betrachtung unzweideutig zeigen.

Ohne Zweifel erfolgt die Ausdehnung einer so einfachen Masse, wie die des Glases, zwar nicht gleichförmig mit der Wärme, aber doch vollkommen stätig; d. h. vom Eispunkt an aufwärts, bis zum Schmelzpunkt, wird die Ausdehnung für jeden höheren Grad grösser; es wird nie der Fall eintreten, dass bei steigender Wärme die Ausdehnungen wieder kleiner würden, oder gar in das entgegengesetzte, in Verkürzungen übergingen. Eben so wird vom Eispunkt abwärts die Verkürzung des Glases für jeden niedrigern Grad in einer stätigen Folge immer geringer, und es wird auch hier nie der Fall eintreten, dass bei stätig abnehmender Wärme die Verkürzungen einmal wieder grösser würden, oder gar in Verlängerungen übergingen. Giebt es einen absoluten Nullgrad der Wärme, was ich für sehr unwahrscheinlich halte, so würde bei diesem alle Verkürzung aufhören; giebt es keinen, so würden sie ohne Ende kleiner werden, d. h. sie würden sich einem gewissen kleinern Werth ohne Ende nähern, ohne ihn je zu erreichen.

Nennt man nun die Temperaturen x, und stellt sich diese als Abscissen einer krummen Linie, die zugehörigen Veränderungen y des Glases aber, oder bestimmter, die Zunahmen und Abnahmen der Glaslänge, vom Eispunkt an gerechnet, als Ordinaten derselben vor, so ist es leicht, einen allgemeinen Begriff von der Gestalt dieser krummen Linie zu fassen. Sie würde im Anfangspunkt der Abscissenlinie diese schneiden. Auf der Seite

der positiven Abscissen würden die Ordinaten auch positiv seyn, und stätig wachsen, weil ihre Differenzen stätig zunehmen. Auf der Seite der negativen Abcscissen würden auch die Ordinaten negativ seyn, und stätig abnehmen, oder vielmehr in Ansehung ihrer absoluten Gröfse stätig wachsen. Da aber ihre Differenzen stätig abnehmen, so müssen sich die Ordinaten einer gewissen Gröfse ohne Ende nähern, ohne sie wirklich zu erreichen, so dafs die Curve, hinlänglich verlängert, sich dem Parallelismus mit der Abscissenlinie nähert.

Mit einem Worte: die Curve wird eine ganz einfache Krümmung, ohne alle Wendepunkte, etwa wie DE Figur I., und wahrscheinlich eine Asymptote FG haben, welche der Abscissenlinie DC parallel liegt.

Da nun jede krumme Linie, die durch eine endliche Gleichung von der Form

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{etc.}$$

vorgestellt wird, nothwendig Maxima und Minima, also auch Wendungspunkte hat, so ist gewifs, dafs das wahre Gesetz der Ausdehnung des Glases durch keine arithmetische Reihe irgend einer Ordnung dargestellt werden kann.

§. 8.

Hieraus ergiebt sich aber, dafs wir, streng genommen, gar nicht berechtigt sind, von unserer Formel aufser dem Fundamentalabstand Gebrauch zu machen. Da wir indessen das wahre Gesetz gar nicht kennen, und aufser dem Fundamentalabstand über die Ausdehnung des Glases, meines Wissens, auch nicht eine einzige Beobachtung vorhanden ist, so bleibt für diese Theile der Scale nichts übrig, als der unsichre Gebrauch einer Näherungsformel wie die oben gegebene.

IV. Theorie des Einflusses, welchen die Ausdehnung des Glases auf die Anzeigen des Thermometers hat.

§. 9.

Die Ausdehnung des Glases ist bei genauen Untersuchungen der Gesetze, nach welchen die Wärme wirkt, ein überaus lästiger Umstand. Man kann zwar die Einrichtung treffen, dafs die Scale in den beiden Fundamentalpunkten die Veränderung, welche in dem Volumen des Quecksilbers vorgeht, richtig anzeigt; aber dann findet dieses bei keinem einzigen andern Grad der Scale statt, und wir werden sehen, dafs die Abweichung in der

Mitte des Fundamentalabstandes mehr als einen ganzen Grad betrage; aufser dem Fundamentalabstand aber kann sie auf viele Grade steigen. Bei genauern Untersuchungen würde man also jedem Thermometergrad eine Correction wegen der Ausdehnung des Glases beifügen müssen. Die Bestimmung dieser Correction hat von der theoretischen Seite wenig oder gar keine, von der praktischen aber grofse Schwierigkeiten, welche wir zuerst erörtern müssen, da von ihnen gewisse bei der Theorie zu machende Voraussetzungen abhängen.

§. 10.

Die Scale eines Thermometers sollte eigentlich auf der Röhre selbst gezeichnet seyn. Denn, ist sie auf Metall oder irgend einen andern Körper gezeichnet, so ist sie so gut als das Glas des Thermometers dem Einflufs der Wärme, nur in ganz andern Verhältnissen als das Glas, unterworfen. Hierdurch wird die Theorie verwickelt, weil die Ausdehnung von drei Körpern in Betrachtung kommt; die Anwendung aber wird unsicher, weil wir die Gesetze, nach welchen sich dieselben ausdehnen, gar nicht oder mangelhaft kennen.

Es bleibt, um dieser Schwierigkeit auszuweichen, für die Theorie nichts anders übrig, als anzunehmen, dafs die Scale sich auf der Röhre selbst befinde; für die Anwendung aber, zu sehr genauen Versuchen, die Scale, wenn sie nicht auf der Röhre selbst gezeichnet werden kann, wenigstens auf Glas von gleicher Beschaffenheit zu zeichnen.

§. 11.

Eine andere praktische Schwierigkeit verursacht der Umstand, dafs bei vielen Versuchen nur die Kugel, nicht das ganze Thermometer, in den Raum gebracht werden kann, dessen Temperatur bestimmt werden soll. Dabei kann aber die Röhre, nebst der Scale, eine ganz andere höhere oder niedrigere, und gar nicht sicher zu bestimmende Temperatur behalten. Dafs dieses einen störenden Einflufs auf die Anzeigen des Thermometers habe, ist leicht einzusehen, wenn man erwägt, dafs unter diesen Umständen vom Quecksilber der gröfste, vom Glase aber nur der kleinste Theil die zu untersuchende Temperatur annehme, dafs also beide gegen einander nicht diejenige Ausdehnung erhalten, welche ihnen bei ganz gleicher Temperatur zukommt. Diese Schwierigkeit vereitelt selbst dann alle sichre Anwendung einer theoretischen Correction, wenn die Scale auf Glas oder auf die Röhre selbst gezeichnet ist, und man ist in der That gezwungen, bei allen Versuchen,

wo

wo bloſs die Kugel des Thermometers in die zu erforschende Temperatur gebracht wird, auf alle Correction wegen Ausdehnung des Glases Verzicht zu thun. Denn ist die Temperatur des Quecksilbers in der Kugel und der Röhre nebst der Scale sehr ungleich, so ist der Fall gar wohl möglich, daſs man sich durch die Correction weiter von der Wahrheit entfernt, als durch einfache Beobachtung der unverbesserten Anzeige der Scale.

Nur in Ansehung solcher Versuche, welche ganz unmittelbar den rein wissenschaftlichen Zweck haben, die Gesetze, nach welchen die Wärme wirkt, selbst zu erforschen, folgt aus dieser Betrachtung die unerläſsliche Regel, daſs das ganze Instrument in die zu untersuchende Temperatur versetzt werden müsse.

Diese Regel ist daher auch bei Bestimmung des Eis- und Siedpunktes an einem genauen Thermometer sorgfältig zu beobachten.

Diese Vorerinnerungen werden die Voraussetzungen rechtfertigen, die wir bei der folgenden Theorie machen muſsten.

§. 12.

Aufgabe. Wenn man das Volumen des Quecksilbers im Thermometer bei der Temperatur des Eispunktes = 1 setzt, welchen Zusatz wird dasselbe erhalten, wenn das Quecksilber bei einer höheren Temperatur, an der auf der Röhre gezeichneten (sonst beliebigen) Scale, x Grade über den Eispunkt gestiegen ist; vorausgesetzt, daſs das Verhältniſs gegeben sey, in welchem sich das Glas vom Eispunkt bis zu dieser Temperatur ausdehnt?

Auflösung. Da die Gestalt des untern Theils vom Thermometers in theoretischer Hinsicht ganz willkührlich ist, so denke man sich die Kugel in eine lange cylindrische, der übrigen ganz gleithförmige Röhre verwandelt. Die Figuren 2 und 3 stellen das Thermometer in dieser Gestalt vor; und zwar Fig. 2 unter der Temperatur des Eispunktes, Fig. 3 unter einer beliebigen höhern Temperatur, wo also das Ganze und alle einzelne Theile desselben ein wenig vergröſsert sind.

Bei F und 'F sey der Frostpunkt, bei S und 'S der Siedpunkt der Scale. C und 'C ist derjenige Punkt, wo das Quecksilber bei der angenommenen höheren Temperatur steht. Die Scale enthalte in dem Fundamentalabstand FS eine beliebige Anzahl von Graden, und in solchen Graden gemessen sey FC = x, und FA = a. Bei dem Frostpunkt nimmt das Queck-

silber den cylindrischen Raum FGDA ein, der folglich $= 1$ zu setzen ist. Wird das Ganze so weit erwärmt, dafs das Quecksilber bis 'C (Fig. 3) steigt, so nimmt es den cylindrischen Raum 'C'H'D'A ein, den wir $= 1 + z$ setzen wollen. Während das Quecksilber vom Eispunkte bis zu dem angezeigten Punkt gestiegen ist, habe sich das Glas nach jeder Dimension im Verhältnifs $1 : 1 + y$ ausgedehnt. Es wird nun eine genaue Gleichung zwischen x, z und y gesucht.

Da das Verhältnifs zweier Cylinder aus den Verhältnissen ihrer Grundflächen und Höhen zusammengesetzt ist, so haben wir:

$$FGDA : {}'C'H'D'A = \begin{cases} AF : {}'A'C \\ Kr. AD : Kr. {}'A'D \end{cases}$$

wo die Zeichen Kr. AD und Kr. 'A'D, wie man leicht sieht, die kreisförmigen Grundflächen der beiden Cylinder vorstellen. Diese verhalten sich aber wie die Quadrate ihrer Durchmesser, also nach unsern Voraussetzungen wie $1 : (1 + y)^2$.

Ferner ist $AF = a$, und $AC = a + x$; und es verhält sich $AC : {}'A'C = 1 : 1 + y$; daher ist ${}'A'C = (a+x)\ (1 + y)$.
Setzen wir nun diese Werthe in die obige Proportion, so erhalten wir

$$1 : 1 + z = \begin{cases} a : (a + x)\,(1 + y) \\ 1 : (1 + y)\ (1 + y) \end{cases}$$

d. i. $1 : 1 + z = a : (a + x)\ (1 + y)^3$
woraus folgt

$$1 + z = \left(1 + \frac{x}{a}\right) (1 + y)^3.$$

§. 13.

Vermittelst dieser Gleichung wird z (das Increment des Quecksilbers) gefunden, durch x (den Grad der Scale), und durch y (das Längen-Increment des Glases). Wie die beständige Gröfse a zu bestimmen sey, lehrt der folgende §.

Da wir oben §. 6. eine Näherungs-Gleichung zwischen x und y gefunden haben, so würde sich vermittelst derselben y aus der im vorigen §. gefundenen Gleichung eliminiren lassen. Man kommt aber auf diese Art zu keiner bequemen Formel. Wir behalten daher für jetzt die gefundene Gleichung in ihrer Urgestalt bei, in welcher sie theoretisch genau und allgemein auf alle Scalen, und auf jede Temperatur, für welche man den Werth von y sicher kennt, anwendbar ist. Auch hat sie in dieser Gestalt die Be-

quemlichkeit, daſs die drei veränderlichen Gröſsen z, $\frac{x}{a}$, und y, selbst bei ziemlich hohen Temperaturen sehr kleine Brüche bleiben.

§. 14.

Aufgabe. Es ist die Längenausdehnung des Glases, nebst dem Increment des Quecksilbers, vom Eispunkt bis zum Siedpunkt gegeben; man soll den Werth der beständigen Gröſse a finden.

Auflösung. Das Thermometer habe zwischen dem Eis- und Siedpunkt f Grade; das Quecksilber vergröſsere sein ganzes Volumen von jenem bis zu diesem Punkt im Verhältniſs $1 : 1 + q$; und das Glas endlich verlängere sich bei derselben Temperaturveränderung im Verhältniſs $1 : 1 + g$; so ist klar, daſs f, q und g nichts als drei zusammengehörige Werthe der drei veränderlichen Gröſsen x, z und y sind; daher haben wir nach §. 12.

$$1 + q = \left(1 + \frac{f}{a}\right)(1 + g)^3$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{f}\left(\frac{1+q}{(1+g)^3} - 1\right)$$

oder auch:

$$a = \frac{(1 + g)^3}{(1 + q) - (1 + g)^3}\, f.$$

welche Formeln eben so genau und allgemein gültig sind, als die §. 12. gefundene.

V. Anwendung der Theorie auf die achtzigtheilige Scale.

§. 15.

Es ist zuerst der Werth von $\frac{1}{a}$ zu berechnen, wozu wir bestimmter Werthe von q und g bedürfen.

Ueber die Ausdehnung des Quecksilbers giebt Gehler in seinem phys. W. B. Band V. S. 734 folgende Beobachtungen. Sie beträgt zwischen dem Eis- und Siedpunkt,

1) nach Herbert 0,0156
2) nach Roy 0,0170
3) nach Rosenthal 0,0171
4) nach Luz 0,0174
5) nach Shuckburgh 0,0182
6) nach De Luc 0,0185

Wir wollen uns an Roy's Bestimmung halten, theils weil sie sich wenig von dem Mittel aus allen Beobachtungen entfernt, theils weil die von ihm angewendete Methode Vertrauen einflöfst.

Für die Ausdehnung des Glases wollen wir nach De Luc und Ramsden $g = \frac{1}{1200} = 0{,}000\,833$ setzen.

Vermittelst dieser Werthe findet man vermittelst der Formel §. 14.

$$\frac{1}{a} = \frac{0{,}014\,462\,828}{f};$$

und wenn man f = 80 setzt,

$$\frac{1}{a} = 0{,}000\,080\,785.$$

Die Sicherheit der Ziffern dieses Werthes hängt hauptsächlich von dem Grad der Genauigkeit ab, den man dem Werth von q beilegt. Denn behandelt man die möglichen Fehler als Differentiale, so hat man aus §. 14.

$$d\,\frac{1}{a} = \frac{1}{f} \cdot \frac{(1+g)^3\,dq \mp 3(1+q)\,dg}{(1+g)^3}$$

Das doppelte Zeichen ist gesetzt, weil es eben so leicht möglich ist, dafs die Fehler dq und dg gleichartig, als dafs sie entgegengesetzt sind. Für den ersten Fall gilt das obere, für den andern das untere Zeichen.

Man kann aber in allen drei Klammern das zweite Glied weglassen, weil dieses auf die höchste Ziffer des Fehlers keinen Einflufs haben kann. Auch ist es zweckmäfsig, im Zählen blofs das untere Zeichen zu behalten, weil dieses den Fehler vergröfsert. Und so behalten wir

$$d\,\frac{1}{a} = \frac{dq + 3dg}{f}$$

Vergleichen wir nun die obigen verschiedenen Werthe von q, so berechtigt wohl die Vergleichung von Nr. 2, 3 und 4, anzunehmen, dafs der oben zum Grund gelegte q = 0,0170 höchstens nur um ein oder ein Paar Einheiten der vierten Stelle unsicher sey. Dagegen dürfen wir (nach

§. 5.) dg nicht gröſser als ein oder ein Paar Einheiten der sechsten Stelle annehmen. Folglich hat $3dg$ auch keinen Einfluſs auf die höchste Ziffer des Fehlers $d\frac{1}{a}$. Es ist daher genug

$$d\frac{1}{a} = \frac{dq}{f}$$

zu setzen. Beträgt nun dq ein oder zwei Einheiten der vierten Stelle, so werden diese, durch 80 dividirt, nur ein Paar Einheiten der sechsten Stelle geben. Wir werden demnach in dem Werthe $\frac{1}{a} = 0{,}000\ 080\ 785$ die 5 höchsten Bruchziffern als völlig sicher betrachten, und der 6ten nur eine Unsicherheit von ein Paar Einheiten beilegen dürfen.

§. 16.

Was wir jetzt noch hinzuzufügen haben, betrifft bloſs die Erklärung der zu Ende beigefügten Tafel.

Nach der Berechnung von $\frac{1}{a}$ ist es leicht, vermittelst der Formel §. 12.

$$1 + z = (1 + y)^3 \left(1 + \frac{x}{a}\right)$$

zu jedem Thermometergrad x, das zugehörige Volumen des Quecksilbers $1 + z$ zu finden; wobei man den Werth von $1 + y$ am bequemsten aus der 2ten Spalte der angehängten Tabelle nehmen kann. Durch eine solche Rechnung sind die Zahlen der dritten Spalte mit der Ueberschrift: Ausdehnung des Quecksilbers im Volumen (oder $1 + z$), entstanden.

Was die Zuverlässigkeit der Ziffern dieser Spalte betrifft, so erstreckt sich die Unsicherheit zwischen 0° und 80° meistens bis zur fünften, und in den höheren Temperaturen selbst bis zur vierten Stelle. Denn man übersieht aus der vorigen Gleichung sehr leicht, daſs der Fehler dz aus dem Aggregat der zwei Fehler $3dg$ und $x\,d\frac{1}{a}$ zusammengesetzt seyn werde, wo besonders der letztere für die gröſsern Werthe von x (z. B. $x = 80$) seinen Einfluſs wohl bis auf eine oder ein Paar Einheiten der vierten Stelle erstrecken kann.

§. 17.

Läſst man übrigens aus dieser Spalte die sechste durchaus unsichre Ziffer weg, so verändern sich die Differenzen langsam genug, um die gewöhnliche einfache Einschaltungsart auf dieselbe anzuwenden. Daher findet man auf diesem Wege die 5 höchsten Bruchstellen eben so genau, als man sie durch unmittelbare Anwendung der Gleichung $1 + z = (1 + y)^3 \left(1 + \frac{x}{a}\right)$ finden würde.

Es schreiten aber selbst bis zur 6ten Bruchstelle die Zahlen dieser Spalte regelmäſsig genug fort, um sie als Glieder einer arithmetischen Reihe der 2ten oder 3ten Ordnung betrachten zu können, und durch eine solche Annahme würde man leicht eine unmittelbare Gleichung zwischen z und x, von der Form

$$z = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$$

finden, welche alle Zahlen dieser Spalte mit einem Fehler von wenigen Einheiten der sechsten Stelle darstellte, ohne daſs daraus das allergeringste für das wahre Gesetz der Zahlen dieser Spalte gefolgert werden dürfte.

§. 18.

Die Zahlen der vierten Spalte mit der Ueberschrift: Verbesserte Grade der Scale, oder 'x, enthalten nicht mehr das ganze Volumen des Quecksilbers, sondern nur die Veränderungen desselben vom Frostpunkte an gerechnet, und zwar in der Voraussetzung, daſs die Veränderung, welche das Volumen des Quecksilbers vom Eispunkt bis zum Siedpunkt erleidet, = 80 gesetzt werde. Diese Veränderungen müssen nun den Werthen von z (nicht von 1 + z) aus der vorigen Spalte proportional seyn. Die Zahlen dieser Spalte werden also gefunden durch die Proportion

$$0{,}017 : 80 = z : {}'x$$

so daſs $'x = \frac{80000}{17} z = 4705{,}882\,353 \cdot z$

Da in den Werthen von z die 5te Stelle, zwischen 0° und 80°, um ein Paar Einheiten unsicher ist, so übersieht man leicht, daſs in dem Werth von 'x schon die Hundertel um mehrere Einheiten unsicher sind; indessen ist es nöthig sie in der Rechnung beizubehalten, um der Zehntel desto gewisser zu seyn.

Auch hier fügen sich begreiflich die Zahlen wieder so genau in das Gesetz arithmetischer Reihen, daſs man theils die gewöhnliche Einschaltungs-

art mit völliger Sicherheit der Zehntel anwenden kann, theils auch leicht eine unmittelbare Gleichung zwischen x und 'x von der Form

$$'x = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$$

finden könnte, welche die Zahlen dieser Spalte, mit einer Abweichung von wenigen Hunderteln, darstellen würde.

§. 19.

Der Sinn der letzten Spalte mit der Ueberschrift: Verbesserung der Grade, ergiebt sich von selbst aus der darüber gesetzten Formel 'x — x. Sie enthalten nämlich das, was man zu den Graden der gleichtheiligen Scale addiren muſs, um sie in gleichtheilige Veränderungen des Quecksilber-Volumens zu verwandeln.

Daſs alle diese Zahlen zwischen 0° und 80° um mehrere Hundertel unsicher sind, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden. Auſserhalb des Fundamentalabstandes aber läſst sich hier, wie in allen übrigen Spalten, der Grad der Unsicherheit gar nicht bestimmt schätzen.

S c h l u ſ s.

§. 20.

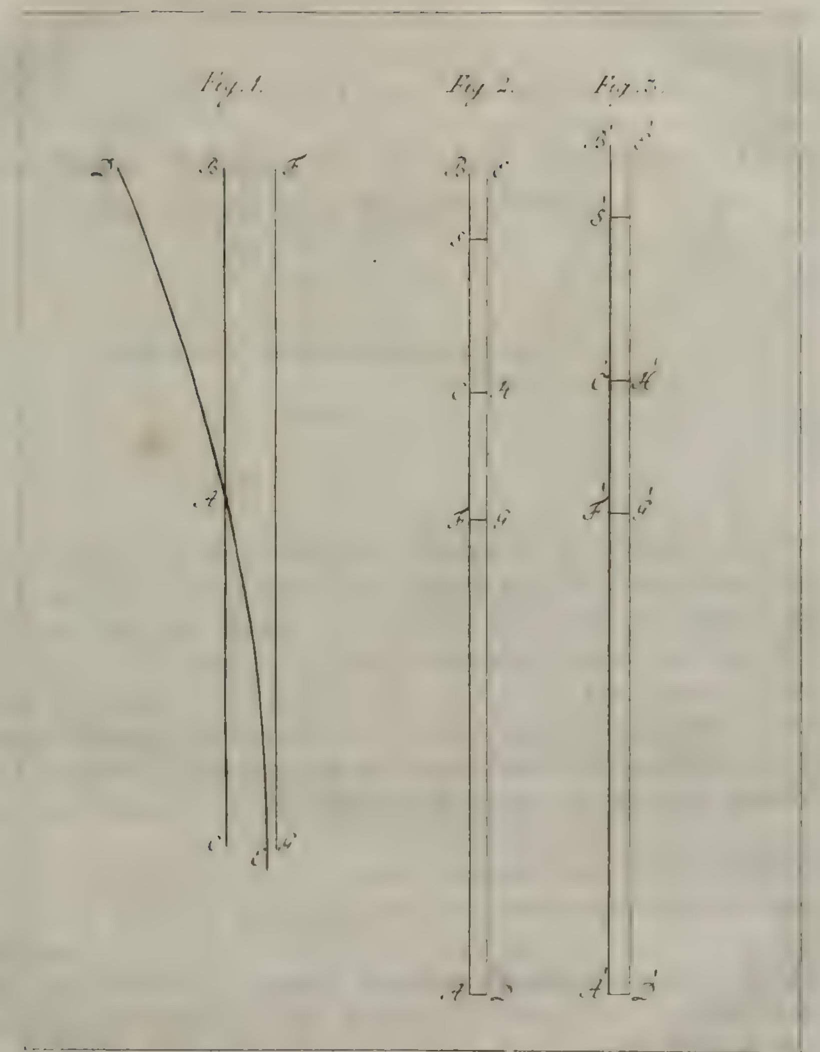
Der Anblick der mitgetheilten Tafel, und besonders die Vergleichung von x und 'x, zeigt deutlich, wie bedeutend der Einfluſs der Ausdehnung des Glases auf die Anzeigen des Thermometers, selbst zwischen dem Eis- und Siedpunkt sey, indem er bei 40° fast $1\frac{1}{4}$ Grad beträgt; auſser dem Fundamentalabstand aber wahrscheinlich auf sehr viele Grade steigen kann.

Und nun frage ich, wie es möglich sey, über die Gesetze, nach welchen eine der wichtigsten Naturkräfte wirkt, irgend eine Art von genauen Untersuchungen anzustellen, ehe man nicht den Einfluſs der Ausdehnung des Glases durch die ganze Scale, deren ein Quecksilber-Thermometer empfänglich ist, also von — 32° bis + 252° der achtzigtheiligen Scale, wenigstens eben so genau bestimmen kann, als es hier innerhalb des Fundamentalabstandes geschehen ist?

Hiezu würde eben nicht eine sehr groſse Menge von Beobachtungen, sondern nur einige sehr genaue, über die Ausdehnung des Glases auſser dem Fundamentalabstande erforderlich seyn; indem man mit Sicherheit annehmen kann, daſs sich diese Ausdehnungen auf alle Fälle unter die Gesetze höherer arithmetischer Reihen fügen werden, wenn gleich das wahre Gesetz derselben unbezweifelt ein anderes ist. Zwischen dem Eis- und Sied-

punkt hat in der That De Luc schon mehr gethan als erforderlich war, da er die Ausdehnung von 10 zu 10 Graden zu bestimmen suchte. Die schönen Versuche, welche Hällström über die Ausdehnung des Eisens angestellt hat (m. s. Gilbert's Ann. B. 36. S. 50.), zeigen deutlich, daſs Beobachtungen von 20 zu 20 Graden völlig hinreichend seyn würden. Und auſser dem Fundamentalabstand würden Beobachtungen unter dem Eispunkt für — 15 und — 30, und über dem Siedpunkt für + 100, + 150, + 200 und + 250, uns wahrscheinlich schon eine hinlänglich scharfe Annäherung verschaffen. Aber leider werden wir einer solchen dringend nothwendigen Experimentalarbeit, die nichts weniger als leicht ist, noch lange entbehren müssen in einem Zeitalter, wo man über dem Streben nach groſsen und glänzenden Erweiterungen der Wissenschaften oft das innere feste Begründen aus den Augen zu verlieren scheint.

Grade der 80-theilig. Scale	Ausdehnung des Glases in der Länge		Ausdehnung des Quecksilbers im Volumen		Verbesserte Grade der Scale		Verbesserung der Grade
x	1 + y	Diff.	1 + z	Diff.	'x	Diff.	'x — x
— 32	1 — 0,000 138		1 — 0,006 197		— 29,16		+ 2,84
— 30	1 — 0,000 135		1 — 0,005 820		— 27,39		+ 2,61
— 25	1 — 0,000 118	15	1 — 0,004 873	947	— 22,93	4,46	+ 2,07
— 20	1 — 0,000 100	18	1 — 0,003 915	958	— 18,42	4,51	+ 1,58
— 15	1 — 0,000 079	21	1 — 0,002 950	965	— 13,88	4,54	+ 1,12
— 10	1 — 0,000 056	23	1 — 0,001 976	974	— 9,30	4,58	+ 0,70
— 5	1 — 0,000 029	27	1 — 0,000 992	984	— 4,67	4,63	+ 0,33
∓ 0	1 ∓ 0,000 000	29	1 ∓ 0,000 000	992	∓ 0,00	4,67	± 0,00
+ 5	1 + 0,000 032	32	1 + 0,001 000	1000	+ 4,71	4,71	— 0,29
+ 10	1 + 0,000 067	35	1 + 0,002 005	1005	+ 9,44	4,73	— 0,56
+ 15	1 + 0,000 105	38	1 + 0,003 026	1021	+ 14,24	4,80	— 0,76
+ 20	1 + 0,000 145	40	1 + 0,004 052	1026	+ 19,07	4,83	— 0,93
+ 25	1 + 0,000 188	43	1 + 0,005 085	1033	+ 23,93	4,86	— 1,07
+ 30	1 + 0,000 234	46	1 + 0,006 129	1044	+ 28,84	4,91	— 1,16
+ 35	1 + 0,000 282	48	1 + 0,007 179	1050	+ 33,78	4,94	— 1,22
+ 40	1 + 0,000 333	51	1 + 0,008 237	1058	+ 38,76	4,98	— 1,24
+ 45	1 + 0,000 387	54	1 + 0,009 305	1068	+ 43,79	5,03	— 1,21
+ 50	1 + 0,000 443	56	1 + 0,010 381	1076	+ 48,85	5,06	— 1,15
+ 55	1 + 0,000 502	59	1 + 0,011 464	1083	+ 53,95	5,10	— 1,05
+ 60	1 + 0,000 563	61	1 + 0,012 555	1091	+ 59,08	5,13	— 0,92
+ 65	1 + 0,000 627	64	1 + 0,013 654	1099	+ 64,25	5,17	— 0,75
+ 70	1 + 0,000 693	66	1 + 0,014 761	1107	+ 69,46	5,21	— 0,54
+ 75	1 + 0,000 762	69	1 + 0,015 877	1116	+ 74,71	5,25	— 0,29
+ 80	1 + 0,000 833	71	1 + 0,017 000	1123	+ 80,00	5,29	∓ 0,00
+ 85	1 + 0,000 907	74	1 + 0,018 130	1130	+ 85,32	5,32	+ 0,32
+ 90	1 + 0,000 983	76	1 + 0,019 270	1140	+ 90,68	5,36	+ 0,68
+ 95	1 + 0,001 061	78	1 + 0,020 415	1145	+ 96,07	5,39	+ 1,07
+ 100	1 + 0,001 142	81	1 + 0,021 570	1155	+ 101,51	5,44	+ 1,51
+ 105	1 + 0,001 225	83	1 + 0,022 730	1160	+ 106,97	5,46	+ 1,97
+ 110	1 + 0,001 310	85	1 + 0,023 899	1169	+ 112,47	5,50	+ 2,47
+ 115	1 + 0,001 397	87	1 + 0,025 075	1175	+ 118,00	5,53	+ 3,00
+ 120	1 + 0,001 487	90	1 + 0,026 259	1184	+ 123,57	5,57	+ 3,57



Zu Hrn. Fischer's Abhandlung über den Einfluſs der Ausdehnung des Glases, auf die Anzeigen des Thermometers.

Physikal. Klasse 1816–17.

Ueber

eine menschliche Mifsgeburt, die nur aus einem Theil des Kopfs und Halses besteht.

Von Herrn D. K. A. Rudolphi *).

Mit vier Tafeln.

Als ich im vorigen Jahr der Königlichen Akademie die Anatomie des Gehirns von einem Kinde mitzutheilen die Ehre hatte, welchem das rechte Auge, die Nase uud eine Menge der rechten Schedelnerven fehlten, da glaubte ich nicht, einen eben so seltnen Gegenstand für meine nächste Vorlesung finden zu können. Und doch ist dies der Fall. Ich werde nämlich in der heutigen Vorlesung eine menschliche Mifsgeburt beschreiben und durch Abbildungen erläutern, die aus einem unvollständigen Kopf und einem Anfang des Halses besteht, und der alle übrige Theile des Körpers gänzlich abgehen.

Das anatomische Museum hat dieses seltene Stück der Güte des Herrn Doktor Elfes zu Neufs zu verdanken, von dem ich folgende Geschichtserzählung entlehne.

„Den 18. October 1815 gebar eine Erstgebärende, Katharine H. auf der Rheinstrafse in Neufs wohnhaft, Morgens um fünf und ein Viertel Uhr einen Knaben, beinahe eine Viertelstunde später einen zweiten Knaben, und bald nachher einen Kopf ohne Rumpf."

*) Vorgelesen den 20. Junius 1816.

„Der Erstgeborne, schön gebildet, mehr vollständig, dessen Fontanellen am Kopf klein waren, und der überhaupt die Zeichen einer frühzeitigen Geburt so deutlich nicht an sich trug, starb nach einer unruhigen Nacht und leichten Krampfzufällen den 20sten Vormittags um 11 Uhr. Er hatte die Mutterbrust nicht angenommen, und nur etwas Zuckerwasser, Rhabarbersyrup und Fenchelwasser eingesogen, worauf die Ausleerungen gehörig erfolgt waren. Er wog vier Pfund vier Loth bürgerlichen Gewichts und war vierzehn Zoll lang."

„Der Zweite, mit allen Merkmalen einer frühzeitigen Geburt versehen, und dessen Fontanellen beträchtlich breit und lang waren, hatte ebenfalls keine Brust gesogen, aber mehr Fenchelwasser und Rhabarbersyrup zu sich genommen, und auch seine Ausleerungen gehabt; er wurde am 20sten gegen Mittag unruhig, bekam leichte Krampfzufälle, verlor ein Paar Theelöffel voll Blut aus der Nase und starb Nachmittags um fünf Uhr. Er wog 2½ Pfund 5½ Loth und war eilf Zoll lang. An beiden Kindern war nichts Widernatürliches zu finden."

„Ob der 9½ Loth wiegende Kopf gelebt habe, wufste die Hebamme nicht anzugeben."

„Die Mutter war seit dem 25. September 1814 mit einem 30 Jahr alten Tagelöhner verheirathet, und behielt ihre Reinigung bis zum fünften oder sechsten März 1815. Beide Eltern sind gesund und wohlgestaltet; in ihren beiden Familien herrscht keine erbliche Krankheit, und der Frau ist während der Schwangerschaft kein Unfall zugestofsen. Auch ist die Geburt ziemlich leicht erfolgt, und die Mutter war bald nach derselben wieder zu ihren Geschäften fähig."

Nur mit vieler Mühe hatte der Herr D. Elfes sich den Kopf und die beiden Nachgeburten verschaffen können; die Kinder waren nicht zu erlangen. Ich erhielt durch seine Güte im Februar d. J. den Kopf und die Nachgeburten für das anatomische Museum, so wie die auf der ersten Tafel Fig. I. mitgetheilte sehr richtige Abbildung.

Der Kopf zeigte an seinem obern Theil die sehr häufig vorkommende Mifsbildung, dafs der Obertheil des Schedels und das Gehirn fehlte, und statt dessen ein blutiges schwammiges Gewächs den obern Theil des Kopfs einnahm. Das Gesicht war natürlich beschaffen. Der untere Theil des Kopfs aber, von dem Kinn bis zum hintern Theil des Halses war sehr abgerundet; hier fand sich eine trichterförmige Haut, die oben eng anfing und in ihrem

daselbst geschlossenen Grunde eine kleine rundliche Hervorragung (Taf. II. Fig. 2. d.) überzog, und sich nach unten, wo sie frei hing, erweiterte (Fig. 1. c. c. c.). Hinter dieser Haut endigte sich der Kopf in einen kugelförmigen abgerundeten Fortsatz (Fig. 1. b.).

Die vom Halse herabhängende Haut enthält erstlich zwei Pulsadern, und zwar an der rechten Seite, die eine vor der andern liegend, wie sie Taf. I. bei d. und e. vorgestellt sind; überdies aber eine queerlaufende Vene, welche in jener Figur nicht angegeben ist; s. unsere zweite Tafel, Fig. 1. d. d. Fig. 2. d. d. Durch jene Pulsadern drang man mit dem Sucher sehr leicht in den Kopf; allein aller Mühe ungeachtet kam man durch die Blutader nicht aufwärts; wie alles vergebens war, schnitt ich sie bis etwas über die Hälfte auf, und sah nun, daſs wirklich kein Gefäſs in sie trat, und daſs sie in keinem Zusammenhang mit dem Kopf selbst stand.

An dem einen Mutterkuchen und dessen Nabelstrang war nichts Abweichendes zu bemerken; desto mehr aber an dem andern, welcher auf der vierten Tafel in natürlicher Gröſse abgebildet ist. Der Nabelstrang dieser Nachgeburt hatte, statt drei, vier Gefäſsöffnungen, und zwar war die hinzugekommene die einer Blutader; der Mutterkuchen aber enthält offenbar einen Theil des Sacks, worin der Kopf gelegen hat, und bei genauerer Vergleichung sieht man, daſs jene am Kopf herabhängende Haut zu diesem Sack gehört hat.

Der am Mutterkuchen befindliche unter i. i. i. i. abgebildete Theil des Sacks besteht aus einer Fortsetzung der Schafhaut und Aderhaut des Eies, und man findet eine Pulsader und eine Blutader darin. Die letztere (f. f. f.) lieſs sich schon sehr leicht mit Wasser und hernach mit Wachsmasse ausspritzen, und lief von dem Sack durch den ganzen Nabelstrang bis zu dem Ende, wo er am Nabel des Kindes abgeschnitten war; hierzu gehörte auch die zweite etwas kleinere venöse Oeffnung desselben, deren oben gedacht ist (Taf. IV. e.). Es war übrigens einerlei, ob man die Flüssigkeit von dem Sack oder von dem Nabelstrang aus einspritzte, sie drang immer gleich leicht durch, so daſs also diese Ader ohne Klappen ist; ihr Umfang erschien auch überall gleichmäſsig abgerundet, wie sie eingespritzt war, ohne irgendwo Knoten zu bilden.

In die Pulsader hingegen drang selbst die eingeblasene Luft nicht weit ein, und die sehr feine Wachsmasse füllte sie von dem Sack aus nur durch einen Theil des Nabelstrangs, nämlich bis zu der Stelle, die auf der

vierten Tafel mit g. g. bezeichnet ist. Von hier an bis zu h. konnte ich die Pulsader noch ganz bloſs legen, da endigte sie sich aber in die eine Nabelschlagader, und als ich diese öffnete, fand ich sie ganz voll geronnenen Bluts, nnd eben so war jenes kleine Gefäſs von g. bis h. damit angefüllt. Daher konnte keine Einspritzung weiter dringen, doch war dies für meinen Zweck gleichgültig, da ich nun doch die Verbindung der Gefäſse kannte.

Daſs der Theil des Sacks, welcher gegenwärtig am Kopf, und der, welcher am Mutterkuchen befindlich ist, nicht unmittelbaren Zusammenhang gehabt haben, zeigt ihr sehr verschiedener Umfang auf den ersten Blick. Ueberdies aber sind am Kopf zwei Pulsadern, am Sack hingegen nur eine; er ist also nicht mehr vollständig, und in dem fehlenden Stück des letzteren muſs sich dieselbe also wohl in jene Aeste gespalten haben; eben so müssen sich die beiden im Kopftheil des Sacks befindlichen Venenenden im fehlenden Theil vereinigt haben, da der Sack am Mutterkuchen nur eine Blutader enthält. Es scheint aber zwischen jenen beiden Theilen noch ein ziemliches Stück zu fehlen, denn sonst hätte der Kopf wohl nicht darin Platz gehabt, der aller Wahrscheinlichkeit nach auch mit Wasser umgeben gewesen ist, wenigstens zeigte sich ein käsiger Niederschlag in den Augenwinkeln desselben.

Die Einspritzung der vordern und gröſsern Kopfpulsader mit feiner Wachsmasse gelang sehr leicht; diese muſste aber nothwendig in dem Gehirnschwamm aus den Gefäſsen treten, so daſs dieser sich fast ganz wie Eine Wachsmasse darstellte und dieselbe auch an mehreren benachbarten Stellen unter der Haut fortgehen lieſs; dies war vorauszusehen, da der Kopf oben nicht natürlich beschaffen war, allein die Vortheile der Einspritzung waren doch in diesem Fall überwiegend, so daſs sie gewählt werden muſste, und der Erfolg zeigte auch wirklich, daſs die Nachtheile des Austretens der Wachsmasse sehr unbedeutend waren.

Ich wählte die rechte Seite des Kopfs zur Zergliederung, weil das ausgespritzte Gefäſs an dieser Seite lag, und mehr als die eine durfte ich nicht berühren, wenn ich nicht den Kopf entstellen und den ganzen Fall zweifelhaft machen wollte. Nun ist an der linken Seite alles unverändert geblieben, und Jeder kann sich überzeugen, daſs der Kopf unten wirklich geschlossen ist.

Die Haut war natürlich beschaffen, und unter derselben nur weniges bröckliches Fett: die Muskelsubstanz zeigte zwar deutliche Fasern, war aber übrigens weich und schwammig, und liefs nicht die einzelnen Muskeln unterscheiden. Die Knochen waren gröfstentheils von natürlicher Härte, nur der Zahnhöhlentheil der Kiefer sehr weich; die Zellen für die Zähne mit einer etwas gallertartigen Feuchtigkeit angefüllt, und noch keine Zahnscherben darin.

Unter dem Kopf lag blofs das erste Wirbelbein des Halses, oder der Träger, dessen Theile aber noch nicht verbunden waren. Man sieht Taf. 3. Fig. 1. unter 6. 6. den Bogen; an diesen gränzt der Queerfortsatz 7., und das hintere Stück des Knochens ist zum Theil bei 8. 8. dargestellt.

Die grofse oder vordere Pulsader ging aus der trichterförmigen Haut gerade aufwärts, und stieg dann hinter dem Bogen des Trägers empor; auf diesem sonderbaren Wege gab sie vorne keine Aeste, nach hinten aber schickte sie drei Zweige zu einem räthselhaften Theil, den ich unten näher beschreiben werde. Ueber dem Bogen des Trägers theilte sie sich; mit dem Stamm drang sie in die Tiefe, ohne Frage in den Kanal der innern Hauptschlagader, und von da aus war auch die Wachsmasse in den blutigen Hirnschwamm (Taf. 3. Fig. 1. * * *) und durch diesen wieder an mehreren Stellen unter die Haut (d. d. d.) getreten. Durch jenen innern Stamm war auch die Augenpulsader angefüllt worden, denn es kamen aus der Tiefe der Augenhöhle zwei mit Wachsmasse ausgespritzte kleine Adern nach vorne, wovon die eine nach oben, die andere nach dem innern Augenwinkel lief. — Der äufsere Zweig der Pulsader schickte einen Ast nach hinten als Hinterhauptsschlagader, ging aber übrigens als Gesichtspulsader nach oben und vorne. Ein Paar Zweige gingen zu den Kiefermuskeln und der Zunge, eine Pulsader an das Ohr, eine an die Lippen und zur Nase, eine zum Kinn, am untern Rande des Unterkiefers, und von dieser konnte ich deutlich sehen, dafs sie sich am Kinn nach der andern Seite fortsetzte oder mit der entgegengesetzten zusammenmündete.

Wenn die eben beschriebene grofse Pulsader wohl ganz bestimmt die Hauptschlagader (*Carotis*) zu nennen ist, so kann man auch wohl die zweite, kleinere und hintere (auf Taf. 1. mit 2. bezeichnet) für die Wirbelbeinspulsader (*vertebralis*) halten; sie gab im Aufsteigen einen kleinen äufsern Zweig, ging aber sonst so sehr nach hinten aufwärts, dafs man sie nicht

weit verfolgen konnte. Uebrigens war die Wachsmasse aus der Hirnpulsader in sie übergegangen.

Statt des Gehirns war ein blutiger Schwamm vorhanden, von dem schon öfters die Rede gewesen ist. Nachdem die Stücke des Trägers aus einander gebogen wurden, kam ein Theil zum Vorschein, der nichts als ein Anfang des Rückenmarks seyn konnte, an dem man auch zwei Häute deutlich unterschied, wovon die äußere fester, die innere sehr zart ist, und eine Feuchtigkeit durchschimmern läßt, von der auch etwas ausfloß. Dies Rückenmark schien daher in einem wassersüchtigen Zustande zu seyn, wozu auch der Hirnschwamm sehr gut paßt; nach unten war es in seinen Häuten geschlossen und reichte nicht über den Träger hinab.

Von Nerven war wenig zu sehen. Ein kleiner auf der dritten Tafel mit 5. bezeichneter Nerve, wahrscheinlich der Zungenfleischnerve, ging zur Zunge; an dem sehr kleinen und tiefliegenden Augapfel war auch ein Sehnerve wahrzunehmen, so wie ich auch bei dem Bloßlegen der Muskeln hin und wieder zarte Nervenfäden fand: der Stimmnerve aber und der große sympathische Nerve mit seinem Halsknoten fehlten bestimmt, wie ich sicher behaupten kann, da ich gleich mein Augenmerk darauf richtete, allein nichts von ihnen sah.

Vor dem Ohr war eine bröcklige Masse, vielleicht eine unentwickelte Anlage zur Ohrspeicheldrüse, von der ich aber auch keinen Ausführungsgang fand. Die Zunge war vorhanden, übrigens aber die Mundhöhle sehr eng und, wie es scheint, nach hinten geschlossen. Ich konnte wenigstens keinen Sucher hinabbringen, weder von vorne, noch von der Seite, und das Wasser, welches ich in die Mundhöhle spritzte, lief vorne wieder heraus. Von einem Schlundkopf, von einem Kehlkopf ist keine Spur vorhanden, sondern in dem Raum zwischen dem vordern Bogen des Trägers und dem Kinn waren bloß Muskeln, die zum Theil eine sehr schwammige, wässerige Masse ausmachten; überdies fand sich hier auch ein kleines, eckiges, unregelmäßiges Knorpelstückchen, etwa eine halbe Linie im Durchmesser, das man als eine Spur des Zungenbeins ansehen kann, das vielleicht aber auch nichts als ein widernatürliches Gebilde ist, dergleichen nicht selten vorkommen.

Endlich habe ich noch eines höchst sonderbaren ästigen Beutels zu erwähnen, der mit seinem untern geschlossenen Ende in die trichterförmige Haut als ein rundlicher Knopf vorragt (s. Taf. II. Fig. 2. d.) und daselbst

von

von ihr überzogen wird, von hier beinahe einen Zoll aufwärts steigt und unten beinahe drei Linien breit ist. Er liegt hinter der grofsen Pulsader, und bekommt von dieser an seiner hintern Wand einen, an seiner vordern zwei in seiner Mitte hinab steigende Zweige, die in ihrem Verlauf etwas den Kranzadern des Herzens ähnliches haben, und ihm selbst beinahe das Ansehen eines Herzens geben (Taf. III. Fig. 2. a. a. a. a.). Ich offnete ihn über der trichterförmigen Haut zuerst nur von einer Seite, und kam so in eine Höhle, die mit einem dünnen graulichen Brei angefüllt war; als ich diesen hinweggenommen hatte, sah ich, dafs ich nur einen Theil des Beutels geöffnet hatte; ich schnitt ihn also auch von der andern Seite auf, und hier war eben eine solche mit eben dem Brei angefüllte Höhle. Beide Höhlen waren durch eine Scheidewand, indessen nicht völlig, geschieden, da diese an ihrem untersten Theil, dicht über der trichterförmigen Haut, ein kleines rundes Verbindungsloch zeigte. Aus jeder Höhle konnte ich mit dem Sucher in mehreren Richtungen etwas aufwärts und zur Seite dringen, und bei dem ferneren Oeffnen nach oben fand ich mehrere kleine Gänge, vor deren einem ein Vorsprung wie eine Klappe war, und die alle mit jener breiartigen Masse angefüllt waren. Die letzte obere Befestigung der daselbst geschlossenen Gänge schien an der harten Haut des Rückenmarks Statt zu finden.

Zum Vergleich öffnete ich den kleinen an der linken Seite des Kopfs Taf. II. Fig. 2. mit c. bezeichneten Anhang; dieser war ebenfalls hohl, enthielt aber keinen solchen Brei. Der hintere Fortsatz des Kopfs (Taf. I. f. Taf. II. Fig. 1. e.) enthält aber nur festes Zellgewebe.

Mehr hat mich die Zergliederung nicht finden lassen, bei der ich mich des Raths und der Unterstützung meiner Freunde, der Herren Knape, Rosenthal und Renner *), zu erfreuen hatte.

Bemerkungen.

Ein dem unsrigen ähnlicher Fall ist wahrscheinlich vor beinahe dreihundert Jahren beobachtet worden. Conrad Lycosthenes nämlich, in seinem *Chronicon prodigiorum ac ostentorum* (*Basil.* 1557. *Fol. p.* 542.), theilt

*) Jetzt Professors der Thierarzneikunde in Jena.

von dem Jahr 1551 folgende Mifsgeburt mit: „*Augustae Vindelicorum mulier tria monstra peperit, primo caput humanum membranis involutum, secundo bipedem serpentem, cui lucii caput, corpus ranae et pedes, cauda lacertae, tertio porcum omnibus partibus integrum.*“ Woher er diese Geschichte habe, sagt Lycosthenes nicht, wie er dies überhaupt sehr selten thut; und die folgenden Schriftsteller, die diesen Fall anführen, beziehen sich wieder unmittelbar oder mittelbar auf ihn, z. B. Irenaeus, Del-Rio, Licetus.

Ich theile seine Abbildung des Kopfs (Taf. I. Fig. 2.) mit, die freilich roh ist, allein in der Hauptsache eine grofse Aehnlichkeit mit dem von mir beschriebenen Fall zeigt. Auch dort nämlich geht der Kopf unten in eine Haut über, und er ist ebenfalls mit Zwillingen zugleich geboren, die wohl sehr mifsgestaltet gewesen sind, so dafs Lycosthenes, nach der Weise seiner Zeit, daraus ein Ungeheuer mit einem Hechtskopf, mit Froschfüfsen u. s. w. macht.

Die neueren Schriftsteller müssen den Fall für erdichtet gehalten haben, da sie ihn bei Aufzählung der Mifsgeburten ganz übergehen. Und nach den Ansichten, wo man nur von einem Punkt aus die Bildung der Frucht möglich hielt, mufste es auch widersinnig scheinen, dafs ein blofser Kopf ausgebildet würde. Allein wie viele Mifsgeburten haben wir nicht, denen viele Theile abgehen? Am allerunvollständigsten von allen, die bekannt sind, scheint mir aber die zu seyn, welche Ruysch (*Thesaur. Anat. IX. p.* 17. *Tab. I. Fig.* 17.) beobachtete, und die aus einem kleinen Theil eines untern Gliedmafses bestand. Er führt ausdrücklich an, dafs keine Muskeln darin waren, allein von den Gefäfsen schweigt er; doch mufs man wohl deswegen vermuthen, dafs sie nicht ganz gefehlt haben, besonders da der Fufs an dem Mutterkuchen eines wohlgebildeten, ausgetragenen und lebenden Kindes hing.

Für die Vertheidiger der Meinung, dafs zusammengewachsene Zwillinge nur Ein Kind ausmachen, oder ein an einem Kinde befestigter halber Körper, oder Kopf, oder ein in ihm liegendes Kind, von ihm ausgehende Gebilde sind, kann man Fälle wie den gegenwärtigen nicht sehr günstig finden. An sich ist es wohl einerlei, ob ein zweiter Kopf dem Kinde näher oder entfernter liegt, mehr oder weniger mit ihm zusammenhängt; aber doch werden jene Anhänger von *C. F. Wolf* schwerlich das Herz haben,

hier zu behaupten, dafs dieser Kopf in der Entfernung durch die Nabelpulsader des einen Zwillings gebildet sey.

Dafs in dem vorliegenden Fall der Kopf aber wirklich mit dem einen Zwillingskinde, dessen Nachgeburt auf der vierten Tafel abgebildet ist, in inniger Beziehung gestanden hat, leidet gar keinen Zweifel. Erstlich nämlich ist der Kopf durch die Nabelpulsader jenes Kindes ernährt worden. So widersprechend dies auf den ersten Blick scheint, weil zu der Frucht sonst das Blut durch die Nabelblutader kommt, so natürlich ist es doch; denn die letztere führt ihr Blut zu dem Herzen, und von dem geht es durch die grofse Schlagader zu allen Theilen, also auch zum Kopf. Hier ist nur dieser, und entweder gar kein, oder nur ein sehr unvollständiges Herz; also mufste ihm eine Schlagader das Blut zuführen. Dafs es nur die Nabelschlagader seyn konnte, die durch den Nabelstrang zu ihm ging, ist auch klar. Dies Blut ist freilich etwas mehr mit Kohlenstoff beladen, als das, welches der Kopf einer wohlgebildeten Frucht erhält, da hier mehr von dem Blut der Nabelblutader beigemischt ist; indessen alles Blut der Frucht ist dunkel und vielen Kohlenstoff enthaltend, und dieser Kopf bekam wenigstens eben so gutes Blut, als die untern Gliedmassen des Zwillingskindes.

Die zweite Verbindung des Kopfs und des Kindes bestand darin, dafs das Blut des Sacks, worin der Kopf als in seinem Ei lag, durch die zweite Nabelblutader zu dem Kinde ging. Man kann sich hier einen doppelten Fall denken: entweder verbanden sich beide Nabelblutadern vor ihrem Eintritt in die Leber des Kindes, oder erst in derselben ward ihr Blut gemischt: welches vielleicht wenig Unterschied machte. Auf jeden Fall aber hat das Kind durch die Vereinigung mit dem Kopf ein mehr mit Kohlenstoff geschwängertes Blut bekommen, als es sonst erhalten haben würde.

Bis hieher ist alles deutlich: allein wie fand der Kreislauf in dem Kopf selbst statt, und wie ging das Blut, das nicht von ihm verbraucht ward, zurück? Auf diese Frage ist nur durch Vermuthungen zu antworten.

Man würde sehr leicht damit fertig werden, wenn man eins der beiden aus der trichterförmigen Haut in den Kopf steigenden Gefäfse (Taf. I. Fig. 1. d. e.) eine Vene nennte, allein ihr Bau spricht dagegen. Sie verhalten sich ganz wie Arterien; ihre zerschnittenen Aeste bleiben offen stehen, und ihre ganze Vertheilung ist nicht wie bei Venen, sondern das grofse Gefäfs zeigt sich im Ganzen wie die Carotis, das kleinere wie die Wirbelbein-

pulsader. An ein Paar Stellen am Halse fand ich neben den ausgespritzten Pulsadern kleine leere Gefäſse, allein sie lieſsen sich nicht weit verfolgen, und da auch in die feinsten Enden derselben keine Wachsmasse eingedrungen war, so blieb ich zweifelhaft, ob es Venen waren.

Könnte hier der räthselhafte Körper vielleicht aushelfen, dessen ich am Ende meiner Beschreibung des Kopfs gedacht habe, und der Taf. III. Fig. 2. a. a. a. so wie Taf. II. Fig. 2. e. abgebildet ist? Waren seine Gänge, vor deren einem sogar eine Klappe zu liegen schien, vielleicht Venen; er selbst ein Venensack, analog der innern Drosselvene; oder gar Rudiment des Herzens? War die darin befindliche Masse Ueberrest des Bluts?

Das letztere scheint mir verneint werden zu müssen, wenn ich auf das so unendlich verschiedne geronnene Blut in dem zu der Nabelarterie gehenden Gefäſs des Kopfs sehe; nie sah ich Blut in einen solchen weichen graulichen Brei verwandelt; dazu kommt, daſs Sackgeschwülste aller Art bei neugebornen Kindern so häufig sind, ja daſs hier auch selbst kleine, nur für Sackgeschwülste zu nehmende Körper eben eine solche Masse enthielten, s. Taf. I. Fig. 1. f. und Taf. II. Fig. 2. d.

Wenn dies ein Herz oder auch nur ein Venensack seyn soll, wie können denn alle seinen Enden blind auslaufen?

Ich gestehe wenigstens, daſs, so sehr man gereizt wird, jenen Körper für ein Herz zu halten, die genannten Umstände mich doch sehr zweifelhaft darüber machen.

Wer dennoch aber diesen Theil für einen Venensack annehmen will, muſs zugleich setzen, daſs die Schlagadern den gröſsten Theil des Bluts, welches sie zu dem Kopf gebracht, für denselben verwendet hätten; von dem überflüssigen Blut wäre das mehrste, vorzüglich der rothe Theil, in dem Blutschwamm des Kopfs geblieben; ein Theil wäre (auf nicht anzugebenden Wegen) in den Beutel (das Rudiment des Herzens) gebracht.

Für das Nabelbläschen werden vielleicht andere Physiologen jenen Sack mit groſsen Freuden erklären, allein die Lage des Theils am Kopf, seine groſse Zerästelung, sein Inhalt, seine Gröſse, sein Vorhandenseyn sogar bei einer beinahe siebenmonatlichen (wenn gleich unvollkommenen) Frucht, sprechen auf das Bestimmteste dagegen.

Vielleicht aber war in dem fehlenden Theil der Eihäute, worin der Kopf lag, eine Verbindung zwischen der queerlaufenden Vene der trichterförmigen Haut und zwischen deren Pulsadern. Dies sollte man aus ihrem

Taf. I.

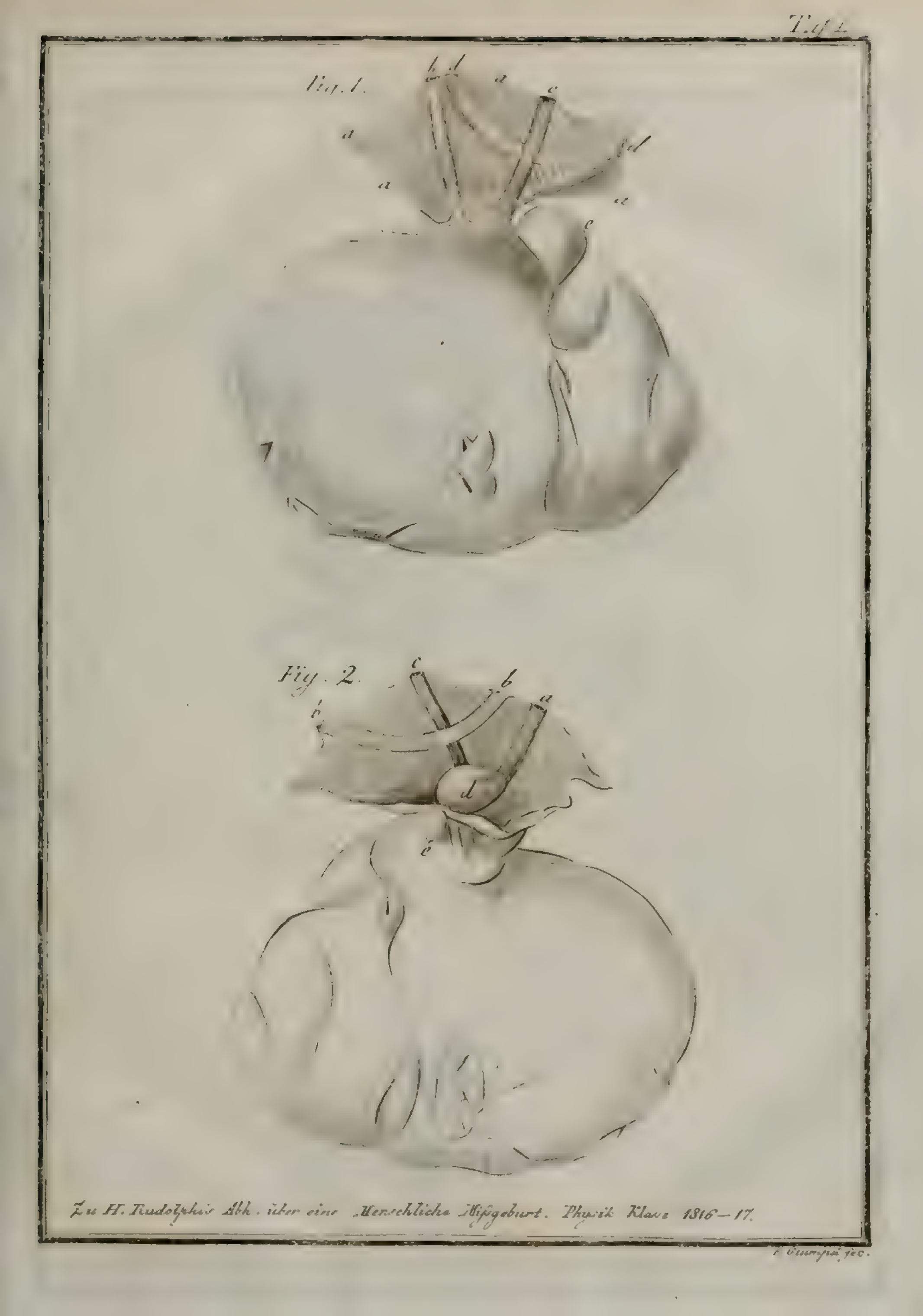
Fig. 1.



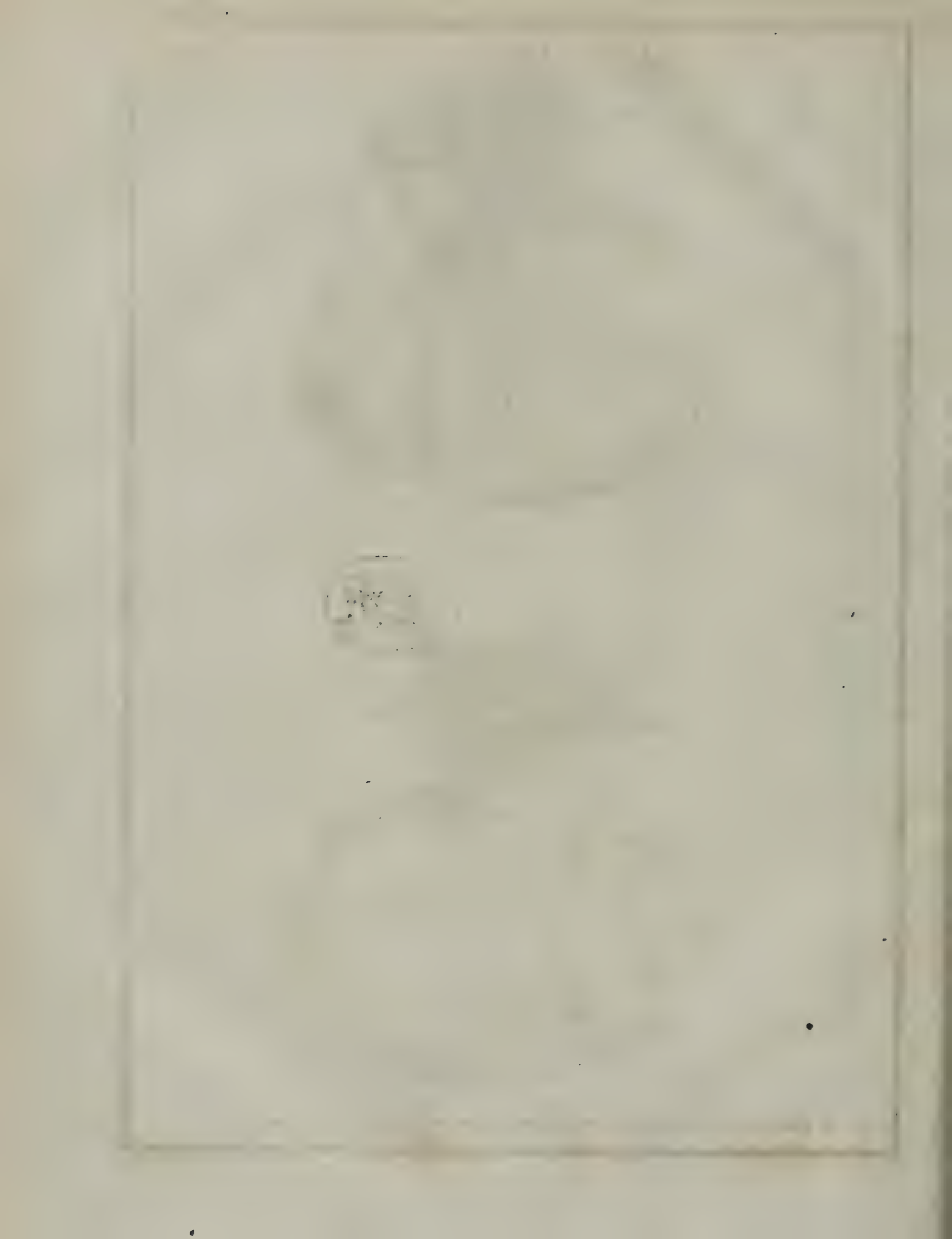
Fig. 2.



Zu H. Rudolphi's Abh. über eine Menschliche Mißgeburt. Physik. Klasse 1816–17.



Zu H. Rudolphis Abh. über eine Menschliche Mißgeburt. Physik Klasse 1816–17.



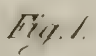
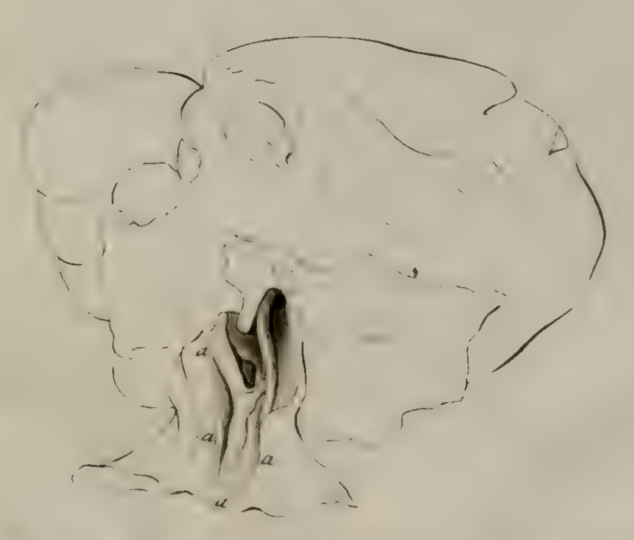




Fig. 2.



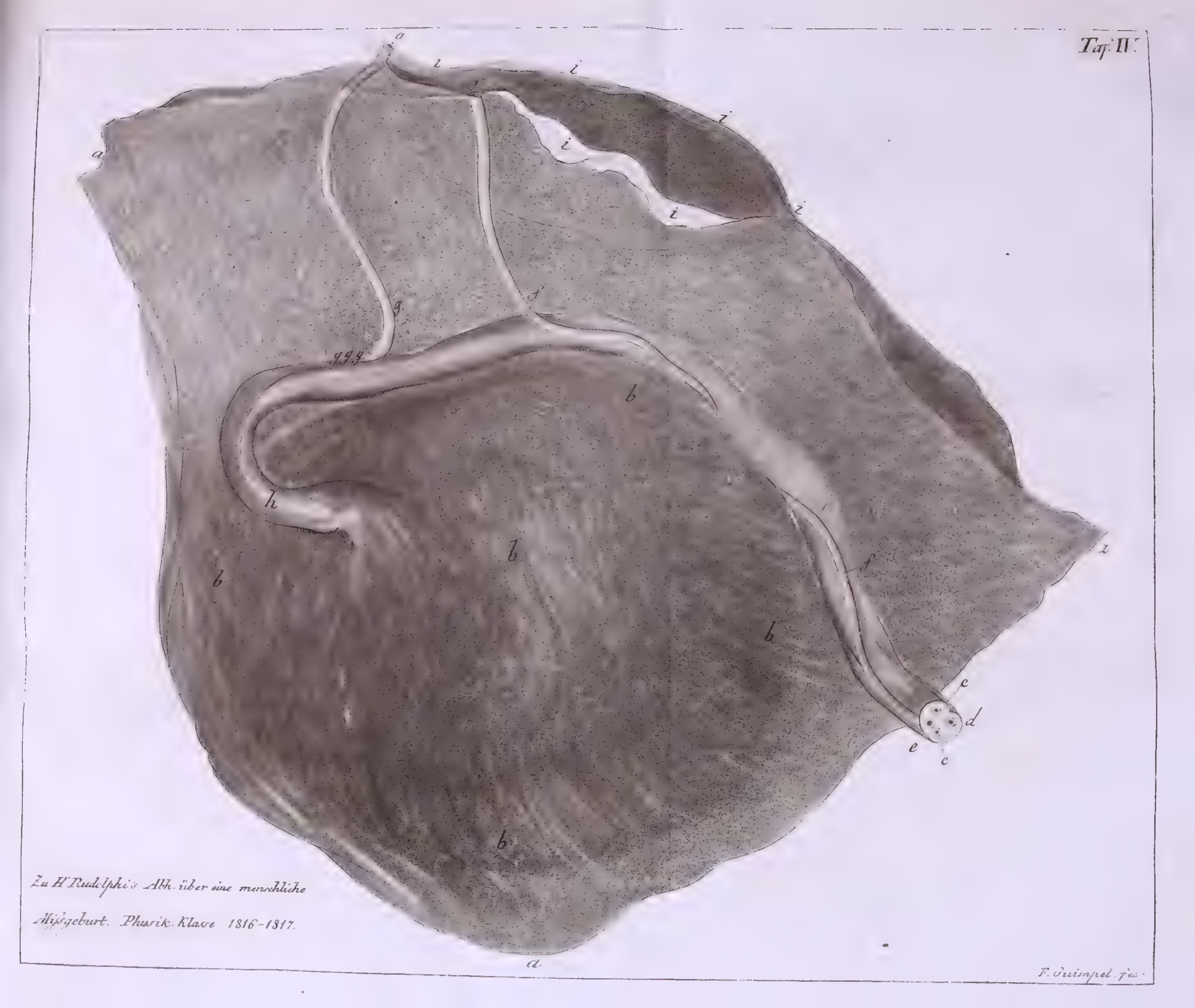
Zu H. Rudolphi's Abh. über eine Menschliche Mißgeburt. Physik Klasse 1816–17.

I. Guimpel fec.



Zu L

Hip.


Taf. IV.
Zu H. Rudolphi's Abh. über eine menschliche
Mißgeburt. Physik. Klasse 1816–1817.
F. Guimpel fec.

diesen entgegengesetzten Lauf beinahe schlieſsen können, so wie daraus, daſs dort zwei Pulsadern sind, und die Vene zwei Enden hat, während in den Eihäuten des Kopfs und im Nabelstrang demselben nur eine Vene wie eine Arterie angehört. Gegen diese Hypothese könnte man dagegen wieder anführen, daſs jene Venen und Arterien zu groſs sind, um sich so vereinigen zu können, so daſs in dem fehlenden Theil der Eihäute für den Kopf ein vermittelndes Netz kleinerer und kleinster Gefäſse (gleichsam eine *Placenta secundaria*) vorausgesetzt werden müſste.

Wenn ich durch dieses alles den Leser nicht befriedige, so hoffe ich, Nachsicht zu finden, da meine Data mangelhaft sind. Ich habe gegeben, was mir zu Gebot war.

Erklärung der Abbildungen.

Taf. I. Fig. 1. Die vom Herrn Doktor Elfes mitgetheilte sehr gute Abbildung des Kopfs in natürlicher Gröſse. a. Die blutige Sackgeschwulst auf der Basis des Schedels. b. Das zugerundete Halsende. c. c. c. Die trichterförmige Haut, durch welche der Kopf mit seinen Eihäuten zusammenhängt, und in denen er wohl zurückgeschlagen eingewickelt lag. d. e. Die beiden Pulsadern jener Haut. f. Eine kleine Breigeschwulst an der rechten Seite des Halsendes.

Fig. 2. Copie der von Lycosthenes mitgetheilten Abbildung des 1531 zu Augsburg gebornen Kopfs.

Taf. II. Fig. 1. a. a. a. Die trichterförmige Haut von auſsen. b. c. Die beiden Pulsadern. d. d. Die Vene derselben. e. Das Halsende des Kopfs.

Fig. 2. a. b. c. Dieselben Gefäſse der von innen zu sehenden trichterförmigen Haut. d. Der in die Haut hineinragende, mit einer breiigen Masse angefüllte (dem Rudiment eines Herzens ähnliche) Sack. e. Eine kleinere Geschwulst.

Taf. III. Fig. 1. Der Kopf von der rechten Seite mit ausgespritzten Pulsadern. a. a. a. Zurückgeschlagene Haut. b. Undeutliche Muskelsubstanz. d. d. d. d. Stellen, an denen die Injectionsmasse in das Zellgewebe getreten und die gröſstentheils mit dem Blutschwamm des Kopfs * * * zusammenhängen.

f. Das Halsende. 1. Die Carotis. 2. Die Wirbelarterie. 3. Die Vene der trichterförmigen Haut. 4. Die Carotis, wie sie hinter den Bogen des Atlas tritt. 5. Wie es scheint, ein Gesichtsnerve. 6. 6. Der vordere Bogen des Atlas. 7. Das rechte Seitenstück desselben. 8. Der Hintertheil desselben.

Fig. 2. a. a. a. a. Der dem Herzen ähnlich scheinende Beutel, dessen Oberfläche ein Paar Gefäfse aus der Carotis erhält.

Taf. IV. a. a. a. Die Eihäute des Zwillingskindes, womit der Kopf in Verbindung gestanden hat. b. b. Der Mutterkuchen desselben. c. c. Die Pulsadern des Nabelstrangs. d. Die Nabelvene des Zwillingskindes. e. Die Nabelvene, welche mit den Eihäuten des Kopfs in Verbindung steht. f. f. f. Der Fortgang der letztern Vene. g. g. Die Pulsader der Eihäute des Kopfs, welche sich bis g. g. g. hat ausspritzen lassen und bei h. sich in die Gefäfse des Mutterkuchens verliert. i. i. i. i. Der noch übrige Theil der Eihäute, worin der Kopf gelegen hat.

Anatomische Beobachtungen.

Von Herrn D. K. A. Rudolphi *).

Nebst zwei Tafeln.

I. Ueber den Knochen am Hinterhaupt des Seeraben, *Pelecanus Carbo Linn.*

Volcher Coiter, der vielleicht, wenn er minder jung gestorben wäre, schon im sechszehnten Jahrhundert die vergleichende Anatomie sehr reich ausgestattet hätte, ist der erste, welcher diesen sonderbaren Knochen beobachtet, und der einzige, der ihn bisher abgebildet hat **). Er beschreibt ihn mit folgenden Worten: „*Occiput in palmipedibus et palustribus locis degentibus est valde inaequale, inprimis in carbone aquatico, qui praeter hanc inaequalitatem os obtinet peculiare, utcunque longum et acutum occipitio adhaerens, in quem vero usum, me latet.*" Die Abbildung ist für die damalige Zeit sehr zu loben; jener Knochen ist gut ausgedrückt, nur ist der ganze Kopf des Vogels in der Figur zu sehr verkürzt.

Schwenckfelt ***) erwähnt dieses Theils ebenfalls: „*E cranio occipitis (Corvi aquatici mihi anno 1602 missi) nascitur ossiculum trium digitorum longitudine, quod tenue, latiusculum ab ortu sensim in acutum mucronem*

*) Vorgelesen den 27. März 1817.

**) *Lectiones Gabrielis Fallopii de partibus similaribus. His accessere diversorum animalium sceletorum explicationes iconibus illustratae auctore Volchero Coiter. Noribergae 1575. De avium sceletis Cap. 3. Tab. IV.*

***) *Theriotropheum Silesiae p. 246.*

gracilescit et musculis colli implantatur, quale in nulla ave hactenus videre contigit."

Der dritte Schriftsteller, welcher aus Autopsie von diesem Knochen spricht, ist Walbaum *). Bei der Beschreibung der äufsern Theile des Vogels sagt er, dafs an seinem Hinterhaupt ein pfriemenförmiger beweglicher Knochen hängt, welcher unter der Haut auf den drei ersten Halswirbeln ruhet. Weiterhin, wo er seine Zergliederung des Thiers mittheilt, sagt er: „An dem Hinterhauptsbein sitzt ein knochigter beweglicher Anhang, welcher sehr schmal, dreieckigt, vorne zugespitzt und anderthalb Zoll lang ist und im Nacken zwischen den Muskeln des Halses liegt."

Andere Schriftsteller, die diesen Theil untersucht hätten, habe ich nicht aufinden können. Blumenbach erwähnt desselben auf Coiter's, Bechstein auf Walbaum's Autorität. Cuvier sagt so wenig in seiner vergleichenden Anatomie, als in seiner eben erschienenen Zoologie **), ein Wort davon; auch Temminck gedenkt seiner nicht.

Lange hatte ich mich vergebens bemüht, einen Seeraben zu erhalten; endlich hatte der Herr Doktor Peterson in Kiel im Mai 1816 die Güte, mir drei frisch geschossene Exemplare zu übersenden ***). Sie waren alle drei weiblich, auch daher wahrscheinlich jener Knochen nicht so grofs, als ihn Schwenckfelt und Walbaum angeben, dahingegen die Abbildung von Coiter auch von einem Weibchen hergenommen zu seyn scheint, wenigstens stellt sie den Knochen nur sehr wenig gröfser dar, als ich ihn gefunden habe.

Der Knochen an dem Fig. 1. vorgestellten Schedel ist eilf, an dem Fig. 2. beinahe dreizehn Linien lang; an der Basis ist er drei Linien breit, nimmt aber gleich von derselben und bis zur stumpfen Spitze ab. Die Basis ist ausgehölt und articulirt mit dem Höcker des Hinterhauptbeins (*protuberantia ossis occipitis externa*), welcher einen rundlichen Kopf bildet, den man sehr füglich mit dem Gelenkhügel (*condylus occipitalis*) desselben Vogels

*) Naturgeschichte des Seeraben vom männlichen Geschlechte. Im siebenten Theil der Schriften der Gesellsch. Naturf. Freunde in Berlin. (1787.) S. 433 u. S. 445.

**) *Le regne animal distribué d'après son organisation. Paris* 1817. 4 B. in 8.

***) Von dem einen ist das Skelett jetzt auf dem anatomischen Museum; von dem andern ist der von mir präparirte Kopf mit den Muskeln, und sind auch andere Theile dort aufgehoben; der dritte Vogel war sehr zerschossen. Nach jenen beiden sind die hier mitgetheilten schönen Zeichnungen von dem jüngern H. Sprengel aus Halle angefertigt.

gels vergleichen kann. Der Knochen hat drei Flächen, welche sämmtlich ausgehöhlt sind, zwei obere oder Seitenflächen, und eine untere; drei Ränder (oder Leisten), wovon der obere schwachgewölbt, die seitlichen hingegen gerade auslaufend sind.

An diesem Knochen sitzen zwei Paar Muskeln. Auf jeder Seite nämlich kommt ein Muskel (Fig. 2. a.) mit einer sehr starken Sehne von dem Unterkiefer, und zwar aus einer flachen Grube auf einem Höcker, der dem Kronenfortsatz des Unterkiefers bei dem Menschen und den Säugthieren entspricht; diese Sehne geht hinter dem Jochbogen empor und in einen nach oben breiter werdenden platten, aber starken Muskel aus, der mit seinen sehnigen Endfasern die ganze seitliche Grube des Knochens bis zur Spitze desselben ausfüllt. Der zweite Muskel (Fig. 2. b. c.) geht auf jeder Seite von dem äufsern Winkel des Unterkiefers nach oben und hinten; bis c. bleibt er fleischig, hier geht er aber in eine dünne breite Sehne über, welche sich an die hintere Seite des vorigen Muskels so fest anlegt, dafs man sie nicht unverletzt trennen kann, und hört am Seitenrande der hintern Fläche beinahe auf, überzieht wenigstens die Mitte derselben so schwach, dafs der Knochen hier besonders an der Basis fast nur von der Beinhaut überzogen scheint.

Da die Muskeln schief, also nach der Spitze des Knochens schmaler auslaufen, so ist ihr Queerdurchmesser sehr verschieden; hart am Hinterhaupt mifst die Breite beider Muskeln (gleichviel, von a. oder b., denn diese haben einerlei Breite) 20 bis 21 Linien.

Das erste Paar Muskeln (a.) zieht den Knochen in die Höhe, oder richtet ihn auf; das hintere Paar wirkt auf entgegengesetzte Weise und senkt ihn nach dem Hals hinab. Weder der Knochen aber, noch dessen Muskeln, haben die geringste Verbindung mit dem Hals, so dafs Schwenckfelt's und Walbaum's oben angeführte Beschreibungen ganz falsch sind, und sich nur dadurch erklären lassen, dafs sie weder die Haut noch das Zellgewebe rein abgelöset und den Ansatz der Muskeln gar nicht untersucht haben.

Volcher Coiter sagt, er sehe den Zweck des Knochens nicht ein. Schwenckfelt und Walbaum schweigen darüber. Blumenbach *) führt

*) Handbuch der vergleichenden Anatomie. Göttingen 1805. 8. S. 81. Zweite Ausgabe das. 1815. S. 85. Wer derjenige sey, auf den das „man glaubt" geht, weifs ich nicht. Ich finde die Hypothese bei keinem Schriftsteller.

eine sonderbars Hypothese an; er sagt nämlich: „man glaube, der Knochen diene dem Thier als Hebel, um den Kopf zurückzuschlagen, wenn er die weggeschnappten Fische erst in die Höhe wirft, um sie dann mit offnem Rachen der Länge nach aufzufangen." Doch macht er selbst den Einwurf dagegen: „dafs manche andere fischfressende Vögel dies auch thäten, ohne mit diesem besondern Knochen versehen zu seyn."

Blumenbach stellt sich also wahrscheinlich wie Schwenckfelt und Walbaum vor, ob er gleich diese nicht nennt, dafs der Knochen seine Muskeln vom Halse bekomme, und dafs diese daher den Knochen und mit ihm den Kopf nach hinten bewegen könnten. Jenes ist aber falsch, und dieses daher unmöglich.

Mir scheint das Teleologische in diesem Fall sehr klar zu seyn. Der Muskel a. ist offenbar ein Beifsmuskel, und zwar der stärkste bei diesem Vogel, denn die andern beiden gewöhnlichen (Fig. 2. † †) sind viel schwächer. Der Knochen ist ein fortgesetzter Hinterhauptskamm (*crista occipitalis*), liegt auch mit diesem (Fig. 1. a.) in gleicher Richtung. Der Muskel b. ist der Antagonist, und, wie alle Antagonisten der Beifsmuskel, schwächer als diese, fixirt aber doch in der Gegenwirkung gegen a. den Knochen hinlänglich, so dafs dieser letztere Muskel (a.) sehr kräftig wirken kann.

Die Hauptform des Schedels hängt vom Gehirn ab, hier vom Gehirn eines Seeraben; hätten nun für dieses gefräfsige, den Rachen äufserst weit öffnende, mit andern Vögeln häufig kämpfende *) Thier die ihm individuell nöthigen starken Beifsmuskel angelegt werden sollen, so war am gewöhnlichen Pelicanschedel **) kein Platz dazu; jetzt ist dieser hingegen durch einen leichten, niederzulegenden, also gar nicht hindernden, Knochen gegeben, und der Schedel ist im Ganzen unverändert geblieben.

Das hat meine Zergliederung wenigstens bewiesen, dafs der eigentliche Schlafmuskel (*temporalis*), der sich an den *Processus coronoideus* setzt, von jenem Knochen entspringt, und daraus scheint mir alles Uebrige sehr ungezwungen zu folgen.

*) So haben die Seeraben, wie mir H. Peterson schreibt, bei Kiel einen langen heftigen Kampf mit den Reihern in Masse bestanden.

**) Ich kann aus Autopsie nur vom *Onocrotalus* sprechen, von dem ich ein schönes Exemplar durch die Güte meines Freundes, des Prof. Ledebour in Dorpat, erhielt. Ich untersuchte gleich den Kopf dieses Vogels, ihm fehlt jener Knochen aber. Das Skelett ist auf dem Museum. Wahrscheinlich fehlt aber dieser Knochen den mit *P. Carbo* mehr verwandten Arten nicht.

Erklärung der ersten Tafel.

Fig. 1. Der Schedel vom *Pelecanus Carbo.*

a. Der Vorsprung der *crista occipitalis.*

b. Der Höckerknochen, *ossiculum protuberantiae occipitali additum.*

c. Der Gelenkhügel, *condylus occipitalis.*

Fig. 2. † † Die gewöhnlichen Beiſsmuskeln.

a. Der sich an den beschriebnen Knochen setzende stärkste Beiſsmuskel.

b. c. Dessen Antagonist.

d. d. Der Hals des Vogels.

II. Bemerkungen über das Auge.

A. Ueber den gelben Fleck und das sogenannte Centralloch der Netzhaut.

Die Zergliederung des Auges hat mich stets vorzüglich angezogen, und es freut mich, einige, wie ich hoffe, nicht uninteressante Beobachtungen über das Auge im gesunden und kranken Zustande hier mittheilen zu können.

Das Centralloch der Netzhaut wagte ich früher nur problematisch zu nennen *); allein obgleich jenes schon von einigen Anatomen getadelt ward, so bin ich doch jetzt auf das vollkommenste überzeugt, daſs jenes Loch bei dem Zergliedern entsteht.

Präparirt man ein frisches menschliches oder ein solches Affen-Auge so, daſs man mit groſser Behutsamkeit die *Sclerotica* und die *Choroidea* ablöset, und zwar, wie ich voraussetze, indem das Auge in einer kleinen Schaale mit Wasser liegt, so hat die Netzhaut bestimmt kein Loch; ist man aber nicht vorsichtig genug bei dem Ablösen jener Häute, oder schneidet man die Netzhaut durch, um sie von vorne und innen zu betrachten, so entsteht das sogenannte Centralloch sowohl im menschlichen als im Affen-

*) In dem Aufsatz über das Auge in meinen: Beiträgen zur Anatomie und Physiologie. Berlin 1802. 8.

Auge sehr leicht, denn die Netzhaut ist an dieser Stelle am allerzartesten und sehr dünn.

Hat man einmal das Centralloch entstehen lassen, so wird man ferner sehen, dafs nie dessen Ränder ganz (*integerrimi*), sondern bald so, bald anders und gleichsam zerfliefsend sind, welches in den Abbildungen des Centrallochs, so viele ich kenne, nicht ausgedrückt ist, so wie auch dieselben das Centralloch zu grofs vorstellen.

Der gelbe Fleck der Netzhaut soll in den Augen der Blinden fehlen, allein dieser Satz ist wohl sehr einzuschränken. Es versteht sich, dafs er fehlt, wenn das Auge zusammengefallen, die *Sclerotica* in Falten zusammengelegt und im Innern des Auges ein Knochenconcrement erzeugt ist, welchen Fall ich schon ein Paarmal beobachtet habe. Dann ist aber auch die Netzhaut mehr oder minder aufgelöset und zerstört, und es ist sehr falsch, wenn man dies Concrement als eine verknöcherte Linse oder als die verknöcherte Netzhaut betrachtet. Zu der Annahme, dafs der gelbe Fleck auch in solchen Fällen der Blindheit fehlt, wo die Netzhaut nich desorganisirt ist, habe ich wenigstens keinen Grund.

In der Leiche eines Weibes, wo die Nase von der Mundhöhle ganz abgeschieden war, so dafs die Haut vom harten Gaumen ohne Unterbrechung in die hintere Wand des Schlundkopfs überging *), fand ich die Hornhaut an beiden Augen undurchsichtig und fast sehnenartig, im Innern derselben aber weder Linse noch Glaskörper, sondern eine gleichartige wässerige Feuchtigkeit vorhanden, also den Krankheitszustand, welchen die Aerzte *Synchysis* nennen. Beide Augen hatten den gelben Fleck, obgleich sie gewifs längere Zeit blind gewesen waren.

Diesen Winter fand ich beide Augen eines sehr alten Weibes wassersüchtig, so dafs die Gestalt der Augen von der gewöhnlichen nach den Seiten und hinten bedeutend abwich, indem hier die *Sclerotica* hervorgetrieben und sehr dünn geworden war; die Glasfeuchtigkeit war wässeriger wie gewöhnlich und vermehrt; die Netzhaut an beiden Augen, welche doch eben-

*) Diese Mifsbildung schien mir jedoch wegen der schwieligen ungleichen Beschaffenheit der Gaumenhaut nicht angeboren, sondern venerischen Ursprungs. Das Praparat davon ist auf dem Museum und von A. F. Rohowsky in seiner Inauguraldissertation: *De rariore choanarum obliteratione. Berol.* 1815 8 beschrieben. Einen ähnlichen Fall hat Otto in Breslau beobachtet und auch von der Lustseuche hergeleitet. S. dessen Handbuch der pathologischen Anatomie. Breslau 1813. 8. S. 203.

falls ausgedehnt seyn und gelitten haben mufste, war mit dem gelben Fleck versehen. Die Person war indessen nicht blind gewesen.

Es ist bekannt, dafs beim *Foetus* der gelbe Fleck fehlt, so wie dafs er dunkler wird, wenn das Auge, woran man ihn blofs gelegt hat, dem Licht ausgesetzt bleibt; dies scheint seine Entstehung einigermafsen zu erklären: aber warum kommt er nur bei dem Menschen und bei den Affen vor? Ist die Lichteinwirkung auf das Auge der übrigen Thiere so verschieden? Oder liegt diese Verschiedenheit in dem Bau der Netzhaut? Fragen, die uns die vergleichende und die pathologische Anatomie noch gewifs lösen werden.

B. Ueber die Pupillarhaut.

Mein geschätzter College Lichtenstein, dem das anatomische Museum so vieles verdankt, schenkte mir die Augen eines weifsen Hirsches, der auf der Pfaueninsel gehalten war, und nun im zoologischen Kabinet ausgestopft steht.

Mir waren die Augen sehr angenehm, weil unser Museum keine von gröfseren leucotischen Thieren *) besafs. Allein bei der Zergliederung fand ich noch mehr als ich erwartet hatte. Wie ich nämlich von dem einen Auge die *Sclerotica* mit der *Cornea* zurückgelegt hatte, um die *Iris* zu unsersuchen, fand ich sie ohne Pupille, also die ganze hintere Augenkammer verschliefsend, oder mit der sogenannten Pupillenhaut versehen. Ich liefs die Theile in ihrer Lage und ging zum andern eben so beschaffenen Auge; hier lösete ich einen Theil der *Choroidea* mit der undurchbohrten *Iris* ab, um sie auch von hinten zu untersuchen, und fand:

> dafs die Pupillenhaut nur der *Iris*, oder der vordern, nicht aber der *Uvea*, oder der hintern Lamelle angehörte.

Die *Uvea* endet nämlich nach vorne mit einem freien, von der *Iris* abstehenden Rande, und hat die grofse Pupille, wie sie gewöhnlich bei den wiederkäuenden Thieren vorkommt **).

Nachdem ich dies gefunden hatte, war ich so glücklich, einen menschlichen *Foetus* von ungefähr sieben Monaten zu erhalten, bei dem die Pupil-

*) Ich schlage die Namen *Leucosis* und *leucoticus*, Weifssucht und weifssüchtig, nach der Analogie von *Chlorosis* und *chloroticus*, vor, denn die jetzt üblichen Namen *Leucaethiopia* und *leucaethiopicus* sind wirklich unbrauchbar.

**) Diese sehr interessanten Praparate sind auf dem anatomischen Museum.

larmembran noch zum Theil vorhanden war, und fand sie auch hier nur mit der *Iris*, aber nicht mit der *Uvea* zusammenhängend. Die Pupillarränder der letztern waren rein und frei; die der *Iris* hingegen hatten die zerrissenen Ueberreste des mittlern Theils, oder der Pupillarmembran, an sich hängen.

Ich hoffe, daſs dies zu noch interessanteren Resultaten über die Bewegungsart der *Iris* führen soll.

An den Hirschaugen war übrigens wegen der trübe gewordenen Hornhaut äuſserlich nichts von der Pupillarhaut zu bemerken: allein auf Lichtenstein's gefällige Erkundigungen erfuhren wir auch, daſs der Hirsch recht gut gesehen hatte, welches auch bei der Dünnheit der Haut leicht begreiflich ist.

Bei einer andern Gelegenheit werde ich über diesen Fall, wie über andere Theile des Auges, Abbildungen mittheilen.

C. Ueber eine bisher nicht beobachtete krankhafte Beschaffenheit der Augen eines Affen.

Es ist bekanntlich nichts gewöhnlicher, als bei Affen scrofulöse Geschwülste zu finden, und ich habe bei verschiedenen Arten diese Geschwülste in sehr hohem Grade gesehen.

Am stärksten sah ich sie jedoch bei einem Affen, der mit *Simia sabaea Linn.* nahe verwandt ist, allein sich wohl nicht damit verbinden läſst. Hier waren alle Eingeweide des Bauchs, so wie die Lungen, voll scrofulöser Geschwülstn, und als ich die beiden Augen untersuchte, fand ich sie auch hier.

Als ich nämlich die *Choroidea* von der Netzhaut ablösen wollte, um den gelben Fleck zu untersuchen, fand ich jene beiden Häute an vielen Stellen nach hinten widernatürlich zusammenhängen, und zwar durch kleine kreisrunde, platte, ziemlich harte, weiſse Geschwülsre von einer halben bis drei Viertel Linie im Durchmesser. Die zurückgeschlagene *Choroidea* zeigt noch jetzt nach ein Paar Jahren kleine weiſse Flecke auf ihrer schwarzen Fläche sehr deutlich, und an der Netzhaut ist an den Stellen ein kleiner schwärzlicher Ring von dem Anheften der *Choroidea* zurückgeblieben. Die

übrigen Theile des Auges waren unverändert. Das Thier war jung und im Zahnwechsel gestorben, wie es bei den Affen oft beobachtet wird.

Nach der Zeit bin ich hierauf sehr aufmerksam gewesen; allein obgleich ich mehrere Affen verschiedener Arten späterhin zergliedert, so habe ich doch jene scrofulöse Ausartung der Augen nicht wieder angetroffen.

III. Eine seltene Art des *Hermaphroditismus* bei einem Affen, *Simia Capucina Linn.*

Der Herr General-Intendant Graf von Itzenplitz hatte diesen Winter die Güte, mir einen Schafbock, dessen Geschlechtstheile mifsgebildet waren, für das Museum zu schenken *). Es war ein vollkommner *Hypospadiaeus*; die Harnröhre nämlich war vom Mittelfleisch an bis zur Spitze der Eichel gespalten; übrigens aber waren vollkommen ausgebildete männliche Geschlechtstheile vorhanden.

Bald darauf sagte mir mein College Lichtenstein, er habe einen Capucineraffen gekauft, der keine Hoden, sondern eine Ruthe mit gespaltener Harnröhre zeige. Ich fand dies ganz bestätigt, und bat den geschickten Ausstopfer des zoologischen Museums, Rammelsberg, beim Abziehen des Fells die Haut um die Geschlechtstheile an dem Rumpf zu lassen, damit ich die Theile gehörig untersuchen könnte.

Dies geschah: nun fand ich äufserlich eine sehr grofse männliche Ruthe mit der dunkelbraunen Farbe des übrigen Fells versehen, die ganze Harnröhre der Ruthe aber von der Spitze der Eichel bis zum Mittelfleisch gespalten, und, wie in solchen Fällen gewöhnlich ist, die innere Haut zart und blafs. Ueberdies war aber an den Seiten unten in der Spalte noch eine kleine Längsfalte befindlich. Von einem Hodensack oder von Hoden keine Spur.

*) Der Herr Graf schenkte noch einen zweiten Bock, der äufserlich keine Hoden bemerken liefs, obgleich die Ruthe vollkommen wohlgebildet war: allein hier lagen völlig ausgebildete Hoden im Unterleibe, und es war sonst nichts Widernatürliches daran zu bemerken.

Bei der Untersuchung der innern Theile fand ich zu meinem Erstaunen eine völlig ausgebildete Gebärmutter nebst Eierstöcken und Fallopischen Röhren, allein nichts von männlichen Geschlechtstheilen.

Um allen Zweifel über die Beschaffenheit dieser Mifsbildung zu heben, habe ich sie durch mehrere Zeichnungen erläutern zu müssen geglaubt, und ich verdanke dieselben der Geschicklichkeit und Güte des Herrn Doktors W. Sprengel aus Halle, der sich hier gerade aufhielt, wie ich mit diesen Untersuchungen beschäftigt war.

Man sieht auf der ersten Figur den mit starken Haaren umgebenen und der Länge nach in der Harnröhre aufgeschlitzten *Penis*, so wie man auch die inneren weiblichen Geschlechtstheile deutlich erblickt, indem die Harnblase c. nach vorne zurückgeschlagen ist.

In der zweiten Figur sieht man den *Penis* von der Seite, und zugleich wie die Harnblase a. in die Harnröhre und diese in die Scheide b. übergeht. Bringt man die Sonde durch die Spalte der Harnröhre an der Ruthe ein, so dringt man damit nicht in die Harnblase, sondern immer nur in die Scheide ein; die durch die Harnblase eingebrachte Sonde tritt bei b. in die Scheide und so in die Furche der Ruthe.

Es könnte Jemand fragen, ob dies denn auch wirklich eine männliche Ruthe und nicht vielmehr eine vergröfserte und gespaltene *Clitoris* sey? Allein die Unmöglichkeit davon mufs einleuchten, sobald man jemals die weibliche Ruthe eines Affen gesehen hat; ich habe auch daher die fünfte Figur hinzugefügt, wo von einem wohlgebildeten Weibchen der *Simia Capucina* die äufsern Geschlechtstheile abgebildet sind. Die äufsere Oeffnung der Schaam ist mit a. a. und die *Clitoris* mit b. bezeichnet. Man erblickt hier zugleich das so ganz Eigenthümliche dieser *Clitoris*, dafs nämlich die Harnröhre an ihrer obern Fläche verläuft, und die Mündung der Harnröhre oben an der Spitze der *Clitoris* befindlich ist. Durch diese Oeffnung ist die Borste b. b. geführt, welche in die (hier nur zur Hälfte gezeichnete) Harnblase c. führt. Hier fehlen auch die starken Haare, welche um die männliche Ruthe stehen, auch ist die *Clitoris* weifs wie die Scheidenöffnung, während die Ruthe schwarzbraun ist. In so ferne ist jedoch hier die letztere unvollkommen, als ihr der Ruthenknochen fehlt.

Zur

Zur Vergleichung mit den innern Geschlechtstheilen jener Zwitterbildung habe ich auch eine Abbildung derselben Organe von einem wohlgebildeten Weibchen der *Simia Capucina*, und zwar in Fig. 3. von vorn und in Fig. 4. von hinten, gegeben *).

Man sieht sogleich, daſs bei dem Zwitter der *Uterus* und die Eierstöcke und die Fallopischen Röhren kleiner sind. Die Gebärmutter und die Eierstöcke fühlen sich auch bei dem Zwitter hart, ja die letztern beinahe als knorplig an. — Sonderbar ist es, daſs bei beiden die rechte Fallopische Röhre länger ist.

Einen ganz ähnlichen Fall kenne ich bei dem Menschen nicht, obgleich bei diesem so viele Zwitterbildungen vorkommen; der von Gallay beobachtete Fall **) indessen nähert sich ihm sehr. Er fand nämlich an einer Leiche eine wohlgebildete, an der Spitze mit der Harnröhrenöffnung versehene, männliche Ruthe, überdies aber eine Scheide, Gebärmutter, die Eierstöcke und Trompeten, ohne Spur von inneren männlichen Geschlechtstheilen. Eine genaue Untersuchung war ihm nicht erlaubt; er konnte jedoch durch die Oeffnung an der Eichel den Catheter in die Blase bringen; es war also hier nicht die Einsenkung der Harnröhre in die Scheide vorhanden, wie ich sie bei dem Affenzwitter beobachtet habe.

Wohl aber möchte ich vermuthen, daſs der vielgereisete Karl Derrier, über dessen Geschlecht sich noch immer die Aerzte streiten, eine ganz ähnliche Miſsbildung hat. Bei ihm ist nämlich die Harnröhre der männlichen Ruthe bis ans Mittelfleisch gespalten, und hier ist ein feiner Gang, der wahrscheinlich der Scheide angehört.

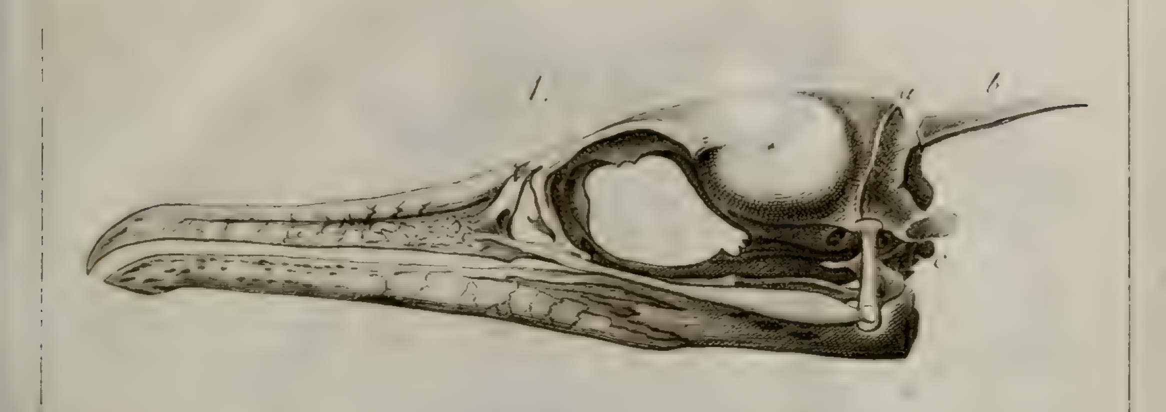
Eine viel gröſsere Vermischung der Geschlechter erwarte ich bei einem jungen Menschen, der den letzten Krieg als Soldat mitgemacht hat, und seiner Miſsbildung wegen verabschiedet ist, da seine Kameraden ihn für ein Weib hielten, und den ich im vorigen Jahr zu untersuchen Gelegenheit fand. Er hat eine gespaltene Harnröhre an der männlichen Ruthe; unter derselben liegt an jeder Seite in einer wulstigen Hautspalte ein Hoden; allein diese Hoden sind hart und ohne Gefühl, so daſs man sie stark drücken kann, ohne daſs es irgend einen Schmerz erregt, auch gehen sie spitz aus,

*) Die abgebildeten Präparate sind auf dem Museum befindlich.

**) Georg Arnaud Anatomisch-Chirurgische Abhandlung über die Hermaphroditen. A. d. Fr. Straſsburg 1777. 4. S. 50.

wenn sie übrigens gleich von ziemlicher Gröſse sind. Der Bau des Beckens und des Brustgewölbes ist weiblich; die Stimme ist fein; die Brüste sind groſs und hängend und ganz weiblich: denn wenn man auch bei Männern hin und wieder die Brüste (eigentlich das die Drüse bedeckende Fett) vergröſsert findet, so wird man sie doch nicht hängend finden, wenigstens sah ich sie nie so; die Schaamhaare sind ebenfalls weiblich. Es ist daher nicht unwahrscheinlich, daſs hier auch unvollkommene innere weibliche Geschlechtstheile vorhanden sind.

Einer besondern Erklärung der zweiten Tafel bedarf es nicht.





Zu Hrn. Rudolphi's anatomischen Beobachtungen.
Physikal. Klasse 1816–17.

W. Sprengel ad nat. delin.

C. Glaßbach sc.





Zu Hrn. Rudolphi's anatom. Bemerkungen. Physikal. Klasse 1816–17.

W. Sprengel ad nat. del. C. Glasbach sc.



Ueber

die ältere Geschichte der Getreidearten.

Von Herrn H. F. Link *).

Wir nennen Getreide solche Pflanzen aus der natürlichen Ordnung der Gräser, welche gebaut werden, damit ihre Körner zur Nahrung des Menschen dienen. Sie machen die vorzüglichste vegetabilische Nahrung des Menschen aus, und nur einige Hülsenfrüchte können ihnen in dieser Rücksicht an die Seite gesetzt werden.

Ihre Geschichte ist daher von Wichtigkeit nicht allein für die Geschichte der Natur überhaupt, sondern auch für die Geschichte der Menschheit besonders. Sie gehören zu den ältesten Pflanzen, von welchen die Geschichte Nachricht giebt; und wenn auch die Beschreibungen derselben in der Vorzeit zu wenig genau sind, um daraus Schlüsse ziehen zu können über ihre Veränderungen sowohl als die Veränderungen in der umgebenden Natur, so sind doch einige Züge, welche die Geschichte für uns aufbewahrt hat, nicht ohne Wichtigkeit, und die Vergleichung mit andern nicht gebaueten Pflanzen lehrt oft, was schriftliche Nachrichten nicht sagen. Aber noch folgenreicher ist ihre Kunde für die Geschichte der Menschheit. Die Verbindungen zwischen Ländern und Völkern in den frühern Zeiten, die Verbreitungen der Kenntnisse des Ackerbaues, die Zusammenstimmungen der Völker in der Wahl der Pflanzen zur Nahrung bei man-

*) Vorgelesen den 20. März 1817.

chen eben so merkwürdigen Abweichungen ergeben sich sogleich aus der Geschichte der Getreidearten, und wie viel daraus für die Geschichte der Menschheit folge, sieht man leicht ein.

Es ist höchst merkwürdig, dafs die Menschen in Rücksicht auf die Getreidearten seit Jahrtausenden nichts Neues gelernt haben. Wir bauen was die Alten baueten, und wenn wir auch Getreidearten haben, von welchen wir keine Nachricht bei den Alten finden, so bekamen wir sie doch von andern Völkern, und der Ursprung ihres Anbaues verliert sich in dem Dunkel der Geschichte. Die Sage nennt uns nur Gottheiten, wenn wir nach dem Erfinder des Anbaues mancher nützlicher Kräuter und Bäume fragen; ein Beweis, dafs die Kunde von jenen Erfindern über alle Geschichte hinaus reicht. Kein Denkmal, keine geschichtliche Nachricht nennt uns einen Menschen als einen solchen Erfinder, und eben so wenig die Zeit, in welcher jene höchst wichtigen und merkwürdigen Erfindungen gemacht wurden. Wo wir fragen und forschen, werden wir auf eine Zeit zurückgewiesen, in welcher höhere Wesen als die jetzigen Menschen auf der Erde wohnten und herrschten, und die Götter den Menschen näher waren als in den spätern weniger glücklichen Zeiten.

Es läfst sich nicht leugnen, der merkwürdige Umstand, dafs keine neue Getreidepflanze seit den frühesten Zeiten gefunden worden, verbindet sich mit vielen andern, wodurch es höchst wahrscheinlich wird, dafs schon früh ein Volk, oder vielmehr ein Völkerstamm, gewesen sei, welcher Naturkenntnifs und Natureinsicht in einem hohen Grade gehabt habe. Wir reden hier nur von Naturkenntnifs und Natureinsicht, und überlassen es andern, zu zeigen, dafs auch andere Kenntnisse und Einsichten in jener Zeit zu einer hohen Stufe von Vollkommenheit gestiegen waren. Dieser Völkerstamm ist von seiner Höhe gesunken, hat sogar seine Geschichte verloren, und lebt nur in den Mythen der Völker; aber Einsichten und Kenntnisse hat er verbreitet, entweder dadurch, dafs er selbst zerstreuet und verbreitet wurde, oder dafs andere Völker seine Kenntnisse benutzten und ihm nachahmten. So bauet der Amerikaner den Mais, der Abyssinier den Teff: Getreidearten, welche nicht von aufsen ihm zugeführt wurden, sondern in seinem Lande wild wachsen. Der Abyssinier ist seinem Lande fremd, von einem andern Volksstamm als die benachbarten Negervölker, und Geschichte und Aehnlichkeit lehren, dafs ein Mongolisches Volk nach Amerika sich

verbreitete und dorthin Erinnerungen seiner Einrichtungen aus einem andern Lande brachte.

Sobald man einmal wuſste, daſs sich eine Grasart bauen und zur Nahrung des Menschen anwenden lieſs, war es leicht, auf andere Grasarten zu verfallen. Auch hinderte nichts, auf diesem Wege fortzuschreiten. Da die Samen der Grasarten durchaus mehlig und, einige wenige, z. B. den Lolch, ausgenommen, nicht giftig sind, so konnte man eine Menge derselben zur Nahrung bauen. Aus mannigfaltigen Gattungen hat man die Arten des Getreides gewählt und keineswegs die eine oder die andere Gattung vorgezogen. Es ist deutlich zu sehen, daſs nur die Gröſse der Körner, oder, wenn diese fehlte, die Menge derselben Veranlassung war, diese Arten den übrigen vorzuziehen.

Der Same der Grasarten ist von zwei Blättchen eingeschlossen, welche Linné willkürlich aber bequem die Blume, *corolla*, nannte. In manchen, z. B. den eigentlichen Weizenarten, schlieſsen sich bei der Reife die beiden Blättchen nicht, sondern das Korn fällt nackt heraus; in andern hingegen, z. B. den Spelzarten, schlieſsen die beiden Blättchen fest zusammen, und fallen mit dem Korn heraus. Daher muſs das Spelzkorn auf einer Mühle oder durch Stampfen von seiner Hülle befreit werden, um es zu benutzen, welches beim Weizenkorne nicht nöthig ist. So sind auch Gersten- und Haferkörner in ihren Hüllen eingeschlossen; nur die Himmelsgerste oder nackte Gerste (*Hordeum nudum*) und der nackte Hafer (*Avena nuda*) machen hier eine Ausnahme; das Korn fällt bei der Reife aus der Hülle. Auſser diesen Blumenhüllen ist entweder jede Blume für sich oder mehrere zugleich sind von andern Blättchen umgeben, welche Linné Kelch (*calyx*) nannte, und diese bezeichnen die Gattungen des Getreides. Am Weizen, *Triticum*, wozu auch der Spelz gehört, besteht der Kelch aus zwei hohlen gegen einander über stehenden Blättchen, welche zwei bis drei Blumen mit ihren Körnern wenigstens unten umfassen; am Roggen, *Secale*, ist dieselbe Bildung, nur sind die Kelchblättchen nicht hohl und umfassen also die Blumen nicht; an der Gerste sind die Blättchen sehr schmal und zart, fast wie Borsten, und drei Blumen werden von sechs schmalen Borsten umgeben. Der Hafer ist wie der Weizen gebildet, nur sind die Kelchblättchen länger uud umhüllen die Blumen von allen Seiten. Dieses war nöthig vorauszuschicken, um mehrere miſsverstandene Stellen der Alten zu erklären.

Theophrast sagt (*Hist. plant. L.* 8. *c.* 4.): ὁ μὲν (πυρὸς) ἐν χιτῶσι πολλοῖς, ἡ δὲ (κριθὴ) γυμνὴ, μάλιστα γὰρ δὴ γυμνοσπέρματον ἡ κριθὴ, πολύλοπον δὲ καὶ ἡ τίφη καὶ ἡ ὄλυρα καὶ πάντα τὰ τοιαῦτα, καὶ μάλιστα πάντων, ὡς εἰπεῖν, ὁ βρόμος. Das Nacktsamige haben die Ausleger dieser Stelle auf die Blumen und das Enthülsen bezogen, und daher angenommen, die Alten hätten bloſs nackte Gerste gebauet. Auf den Spelz, τίφη καὶ ὄλυρα, paſst diese Erklärung wohl, aber keinesweges auf den Weizen. Wie kann Theophrast von dem Weizen, einem so bekannten Getreide, sagen, daſs er viele Hüllen habe, wenn die Hüllen sich auf die Blumenblättchen beziehen, welche das reife Korn einschlieſsen? Die Bestimmung des Nacktsamigen bezieht sich nicht auf die Blume, sondern auf den Kelch; an der Gerste scheint der Kelch zu fehlen, weil an seiner Stelle sehr schmale zarte Blättchen vorhanden sind, am Weizen ist er deutlich, am Hafer sehr ausgezeichnet. Mit Rücksicht auf diesen Kelch kann also Theophrast sagen, daſs die Gerste vorzüglich nacktsamig sei, der Weizen hingegen und der Spelz viele Hüllen habe, vorzüglich aber der Hafer. Dieses Vorzüglich, μάλιστα, bezieht sich nicht auf die Menge der Hüllen, sondern auf die Gröſse derselben; auch setzt Theophrast hinzu: ὡς εἰπεῖν, so zu sagen, und gebraucht den Ausdruck, mit viel oder mehr Hüllen an andern Stellen auf eine ähnliche Weise. Keine Getreideart, ja keine Grasart hat mehr als einen einfachen Kelch. Was hier gesagt worden ist, bestätigt eine Stelle beim Palladius (*Jun. c.* 2.): *nunc prima hordei messis incipitur, quae consummanda est, antequam grana arefactis spicis lapsa decurrant, quia nullis, sicut triticum, folliculis vestiuntur.* Pontedera (*Oper. posth. T.* 1. *p.* 18.) scheint die Sache nicht ganz unrichtig eingesehen zu haben; nur begreife ich nicht, wie er dennoch zu Columella's *Hordeum hexastichum* Linné's *Hordeum nudum* bringen kann. Schneider folgt der gewöhnlichen Meinung (Anmerk. z. Columell. p. 79. 80.), und Sprengel übersetzt κριθή mit *Hordeum nudum* und führt obige Stelle aus Theophrast's *Hist. plant.* dabei an, so daſs also Theophrast und die Römer, z. B. Palladius, nur nackte Gerstenarten, gerade die seltneren Arten oder Abarten, gekannt hätten (*Hist. Botan.* 1. *p.* 80.) *).

Plinius (*Hist. nat. L.* 18. *c.* 7. *s.* 10.) übersetzt die Stelle aus Theophrast's *Hist. plant.* nach seiner Art höchst flüchtig und den Sinn entstellend: *Tunicae frumento plures. Hordeum maxime nudum et arinca (al.*

*) In der neuern Geschichte der Botanik hat der Verfasser in dieser Rücksicht seine Meinungen nicht geändert.

alica) sed praecipue avena, wo der letzte Zusatz gerade das Gegentheil von dem ist, was Theophrast sagt. Solcher Beispiele hat man so viele, dafs kein Schriftsteller mit gröfserer Vorsicht anzuführen ist, als Plinius. Bald darauf sagt er richtig von der Gerste: *Rapitur omne statim a prima maturitate festinantius, quam cetera, fragili enim stipula et tenuissima palea granum continetur.*

Der Weizen (*Triticum hybernum et aestivum L.*, besser *Tr. sativum*), πυρὸς der Griechen, σῖτος bei den spätern Griechen (wie *frumentum, froment*), *triticum* der Römer, *chittah* der Ebräer, wurde schon in den frühesten Zeiten gebauet und kommt schon in den Homerischen und biblischen Schriften vor. Die Uebereinstimmung der Sprachen zeigt, dafs diese Wörter unsern Weizen bedeuten; die Römer übersetzen πυρὸς mit *triticum*, und in den Südeuropäischen Sprachen kommt noch *trigo* als ein Name für Weizen vor; *chittah* lebt noch jetzt im Arabischen *hinta.* Nur Galen zweifelt, ob πυρὸς immer Weizen bedeute (*de alimentor. facultat. L.* 1. *c.* 1.), denn Hektor sagt (*Iliad.* 8. *v.* 188.), seine Pferde hätten oft πυρὸς bekommen, und Weizen schadet den Pferden. Aber Andromache gab ihnen auch Wein dazu, und so mochten die Rosse der Heroen mehr vertragen können, als die gemeinen Pferde, wie sie jetzt sind. Sonst ist über die Bedeutung jener Wörter nur eine Stimme. Nicht allein in Europa, sondern auch in dem gemäfsigten Asien, und dem festen Lande von Vorderindien, wo Gebirge die Wärme mildern, ferner im nördlichen Afrika, wird der Weizen, so lange man diese Länder kennt, gebauet; nach den übrigen Theilen von Asien und Afrika und nach Amerika ist er erst durch die Europäer gebracht worden. Die Sanskritsprache nennt ihn *gnuthama* oder *gothama*, welches mit dem Worte Gott zusammenhängt. Es ist merkwürdig, dafs in den gebirgigten Gegenden von Hinterindien, den sundaischen Inseln und dem innern sowohl als südlichen Afrika kein Weizen gebauet wird, ungeachtet er an vielen Orten jener Gegenden wohl wachsen möchte. Wo der Weizen in den wärmern Gegenden der alten Welt aufhört die Hauptnahrung der Menschen zu machen, nimmt der Reis seine Stelle ein; wo er in den kältern Gegenden aufhört, der Roggen. Dafs sein Name in den verschiedenen Hauptsprachen vorhanden ist, hat er mit andern früh gebaueten Pflanzen, so wie mit den früh gezähmten Hausthieren, gemein. Dieser Umstand ist mit jenem zu verbinden, dafs man in einer und derselben Sprache jeder Abänderung des Pferdes, Hundes und anderer Hausthiere einen besondern Namen

giebt; daſs man in den nahgelegenen Provinzen des südlichen Deutschlands den Spelz mit andern Namen benennt. Nur auf eine doppelte Weise läſst sich jene Verschiedenheit erklären. Erstlich wenn man annimmt, daſs die Frucht sich mit den Völkern zugleich, aus einem und demselben Lande, wo sie viel gebauet und ein Reichthum von Wörtern für sie vorhanden war, verbreitete; oder wenn in spätern Zeiten bei groſser Verschiedenheit der Sprachen die Frucht von einem Volke zum andern kam. In dem letzten Falle ist doch nie die Verschiedenheit so groſs als in dem ersten, und die Namen bei verschiedenen Völkern sind nach der Aehnlichkeit schon bekannter Früchte gebildet worden. Ein Beispiel giebt die Kartoffel, welche die Franzosen mit Aepfeln (*pommes de terre*) verglichen, die Deutschen mit Trüffeln (*tartufoli*), die Engländer hingegen und andere Völker mit dem fremden Namen *potatoes* (nach *batatas*) benannten. Für den Weizen wird man die erste Erklärungsart annehmen müssen, denn nicht nach der Aehnlichkeit mit andern Früchten wurden die Namen gemacht, sondern nach verschiedenen Eigenschaften: Weizen von weiſs (dem weiſsen Brodte), *πυρὸς* von der gelben oder röthlichgelben Farbe, *triticum* von *terere* u. s. w.

Die Alten hatten Sommer- und Winterweizen. Den ersten nannten sie *τρίμηνος* oder *δίμηνος*, weil er in drei oder zwei Monaten nach der Saat in jenen wärmern Gegenden reif wird. Eine Menge von Abänderungen giebt Theophrast (*Hist. plant. L.* 8. *c.* 1.) an; einige werden nach den Ländern benannt, woher sie kamen, setzt er hinzu, andere nach andern Umständen, z. B. *καγχρύδιος, στλέγγος, ἀλεξάνδρειος*. Die Namen erklärt er nicht, und die Bemühungen der Ausleger, sie zu erklären oder auf bekannte Abarten zu bringen, sind vergeblich gewesen. Columella führt drei Abarten als ausgezeichnet an (*L.* 2. *c.* 6.): *robus, quoniam et pondere et nitore praestat, siligo et trimestre. Id genus est siliginis*, setzt er hinzu. Targioni Tozzetti in seinen Bemerkungen über den Ackerbau in Toskana (S. 125.) redet viel von den Abarten des Weizens, und meint, *siligo* sei der gemeine Weizen, in Italien *grano nostrale* genannt, welcher feuchten Boden liebt, weiſses Mehl, aber leichte Körner giebt; *robus*, welches nur bei Columella vorkommt, sei *grano duro* der Sicilianer. Aber alle diese Erklärungen sind Vermuthungen, auf schwachen Gründen beruhend. Die Abänderungen des Weizens, welche die Römer anführen, werden von den Schriftstellern selbst nicht einmal auf die Griechischen zurückgeführt, wie viel weniger wird man die jetzt gebaueten Abarten auf die Römischen zurück-

rück-

rückführen können! Dieser Umstand scheint die grofse Veränderlichkeit der Abarten zu beweisen, und ein Nebengrund zu seyn, dafs sie wirklich Abänderungen, nicht Arten sind.

Eben dieses möchte man von den verwandten Arten des Weizens sagen, welche unter den Neuern Hornemann im *Hortus Hafniensis* am besten unterschieden hat. Von den meisten finden wir bei den Alten keine Spur. *Triticum turgidum* Linn. führt zuerst Joh. Bauhin an. *Triticum compositum* L. mag das *Triticum ramosum* beim Plinius seyn (*Hist. nat. L.* 18. *c.* 10). *Triticum polonicum* L. ist wegen seiner grofsen Kelchblättchen vielleicht der Thracische Weizen beim Theophrast, welcher vorzüglich πολύλοπος seyn soll.

Die Nachrichten der Alten von wildem Weizen sind oft mifsverstanden. Wenn in der Odyssee (IX. v. 110) gesagt wird, um den Aetna wachse Weizen und Gerste ohne Pflügen und ohne Säen, so will der Dichter nur die Fruchtbarkeit des Bodens rühmen. Dahin gehört auch die Stelle in Platon's Menexemus, wo Aspasia sagt, die Gegend um Athen habe zuerst den Menschen die Nahrung von Weizen und Gerste gegeben. Nach Creta versetzt Diodor (*Bibl. hist. L.* 5. *c.* 69. 70) das wilde Getreide, doch nur, wie Heyne (*Opusc. acad. Vol.* 1. *p.* 382) schon bemerkt, weil er einem Schriftsteller folgt, welcher dieses Land auf alle Weise rühmen wollte. Eben so verhält es sich mit der Stelle beim Diodor (*L.* 1. *c.* 14), worin Aegypten als das Vaterland des Weizens gerühmt wird. Strabo versichert, eine dem Weizen ähnliche Pflanze, also nicht Weizen selbst, wie Heyne gleichfalls schon erinnert, finde sich wild am Indus bei den Musikanen (*L.* 15. *p.* 1017 *ed. Casaub.*). Wenn auch diese Stelle das Vaterland des Weizens richtig bezeichnen mag, so darf man sie doch nicht als Beweis anführen. Babylonien soll nach Berosus (*Syncell. Chronogr. p.* 28) Weizen, Gerste und andere efsbare Pflanzen wild hervorbringen, und Heyne giebt dieser Nachricht besonders Beifall, ohne zu bedenken, dafs hier dasselbe zutrifft, was er gegen den Creter beim Diodor erinnerte. Ueber den wilden Weizen in Sicilien führt man noch zwei Stellen als sehr wichtig an. In dem Buche von wunderbaren Dingen, welches gewöhnlich Aristoteles zugeschrieben wird, heifst es folgendermafsen: „An diesem Orte (um eine Höhle in Sicilien) soll sich Weizen finden, nicht dem einheimischen gleich, dessen sich die Einwohner bedienen, auch nicht dem eingeführten, sondern von eigenthümlicher Gröfse. Hiedurch beweisen sie, dafs bei ihnen zuerst

der Weizen gewachsen sei, auch machen sie Ansprüche auf die Demeter, als eine einheimische Göttin (*ed. Beckmann p.* 167)." Es ist klar, dafs man eine verwandte Weizenart für den wirklichen ansah, und damit die Sage von der Geburt der Ceres auf dieser Insel verband. Die andere Stelle ist beim Diodor (*L.* 5. *c.* 12), wo die Fruchtbarkeit von Sicilien gerühmt und hinzugefügt wird: *μεχρὶ τοῦ νῦν φύεσθαι τοὺς ἀγρίους ὀνομαζομένους πυρούς.* Offenbar hängt diese Stelle mit der beim Aristoteles zusammen, und es ist von einem sogenannten Weizen die Rede.

Die Nachrichten der Neuern vom wilden Weizen sind meistens eben so unbestimmt. Riedesel (Reise durch Sicilien S. 79) behauptet, Weizen wachse wild in Sicilien; aber er war kein Pflanzenkenner und der alte Ruf täuschte ihn. Honorius Bellus redet von wildem Weizen auf Creta (*Clus. rar. stirp. hist. p. CCCXII.*), dort *agriostari* genannt; aber offenbar verwechselte er damit eine andere Grasart, wie auch die Beschreibung, besonders des Korns, deutlich zeigt. Was Linné aus einer ungedruckten Flora von Sibirien eines gewissen Heinzelmann anführt (*Amoen. acad. V.* 7. *p.* 455), dafs der Weizen in dem Lande der Baschkiren wild wachse, hat sich nicht bestätigt, und Pallas leugnet es (Nordisch. Beitr. B. 2. S. 357). Wahrscheinlich ist es hingegen, dafs unser Weizen von derselben Art mit dem Bergeweizen sei, welcher in Butan und auf den niedrigen wärmern Bergen von Tibet wild wächst (*Sir Joseph Banks in Transact. of the Horticultural Society V.* 1.). Sage und Geschichte führen die Anfänge unserer Künste, unserer Wissenschaften, unsers Menschenstammes selbst, nach jenen Gegenden zurück, so dafs die Angabe dieser Heimath des wichtigsten Nahrungsmittels aller Völker jenes Stammes die gröfste Wahrscheinlichkeit hat.

Die Spelzarten unterscheiden sich dadurch von den eigentlichen Weizenarten, dafs die Körner bei der Reife nicht aus den Blumenblättchen ausfallen, sondern von diesen fest umschlossen sich mit ihnen zugleich ablösen. Die Körner müssen daher auf irgend eine Weise von jener Hülle befreiet werden, ehe man sie zur Nahrung gebrauchen kann. Ursprüngliche Arten des eigentlichen Weizens mögen nur zwei seyn, *Triticum sativum* und *Tr. polonicum;* die übrigen scheinen nur Unterarten, wenn sie auch jetzt nicht mehr sich verändern und also keine Abänderungen sind. Spelzarten kann man wohl drei ursprüngliche annehmen: *Triticum Spelta Linn.* mit dicht gedrängten Blüthen; *Tr. Zea. Host.* mit locker stehenden Blüthen und *Tr. monococcon Linn.* Alle diese Arten werden im südlichen Europa,

auch schon im südlichen Deutschland, häufig gebauet. Bei den Griechen kommen drei Namen vor, *ζεία*, *ὄλυρα* und *τίφη*, über deren Bedeutung die Meinungen sehr verschieden sind. Einige, z. B. Dodonäus und neuerlich Sprengel (*Hist. Bot.* 1. *p.* 80), halten *τίφη* für Roggen *); dagegen ist die Stelle beim Theophrast (*Hist. pl. L.* 2. *c.* 5), wo gesagt wird, *τίφη* verwandele sich in Weizen, wenn die Körner enthülset gesäet werden. Da nun Roggen nicht enthülset wird, so muſs *τίφη* eine Spelz- oder Gerstenart seyn. Ferner sagt Galen bestimmt (*de aliment. facult. L.* 1. *c.* 2), daſs *τίφη* eine Hülse habe, wie *ὄλυρα* und Gerste. Zu den Gerstenarten gehört aber *τίφη* nicht, denn in der oben angeführten Stelle beim Theophrast wird die Gerste als nacktsamig der *ὄλυρα* und *τίφη* entgegengesetzt. Es ist also kein Zweifel, daſs *τίφη* und *ὄλυρα* zu den Spelzarten gehören, auch werden diese Getreidearten für sich und mit *ζεία* gewöhnlich zusammengestellt. Was bedeutet aber *ζεία*, ein Wort, welches schon in den ältesten Schriftstellern vorkommt, welches mit dem Worte *ζῆν*, Leben, zusammenzuhängen scheint, und welches in *ζείδωρος ἄρουρα* den Ruhm der Fruchtbarkeit bezeichnet? Alle drei Wörter, *ζεία*, *ὄλυρα*, *τίφη*, bezeichnen Spelzarten, aber ihr Gebrauch war zu verschiedenen Zeiten und wahrscheinlich auch in verschiedenen Gegenden verschieden. In den Homerischen Gedichten kommen *ζεία* und *ὄλυρα* an verschiedenen Stellen immer als Pferdefutter zugleich mit *κρῖ* vor, so daſs sich über den verschiedenen Gebrauch dieser Wörter nichts entscheiden läſst; *τίφη* haben die ältern Griechen nicht. Zu Herodot's Zeiten waren *ζεία* und *ὄλυρα* gleichbedeutend, wie dieser Schriftsteller bestimmt (*L.* 2. *c.* 34) sagt. Die Aegypter nährten sich allein von diesem Getreide, und verschmähten Weizen und Gerste als Nahrungsmittel, ungeachtet sie von Gerste schon ein Getränk machten. Theophrast führt *ζεία*, *ὄλυρα*, *τίφη* an, oft alle drei Wörter zugleich, oft nur zwei zusammen, aber aus keiner Stelle ergiebt sich der Unterschied deutlich. Nach *L.* 8. *c.* 9 scheint es indessen, als ob *ὄλυρα* eine Mittelart zwischen *ζεία* und *τίφη*, und jene die bessere, diese die schlechtere Art gewesen sei. Dioskorides (*L.* 2. *c.* 110. 111) unterscheidet nur *ζεία* von *ὄλυρα*, schweigt aber von *τίφη*. Von *ζεία* sagt er, einige sei *ἁπλῆ*, andere *δίκοκκος*, wo es augenscheinlich ist, daſs er das Einkorn (*Triticum monococcum*) darunter versteht, wovon eine Abän-

*) Sprengel hat diese Meinung geändert in einem besonders darüber verfaſsten Programm, und in der neuern Deutschen Ausgabe seiner Geschichte der Botanik. Er hält *τίφη* auch für Spelz.

derung zwei Körner in einer Blüthe (*flos*) hat. Galen unterscheidet (a. a. O.) ὄλυρα von τίφη; diese gab ein schlechteres Brot. Aber das Wort ζεία hatte zu Galen's Zeiten einen ungewissen oder ganz unbekannten Gebrauch. Er führt eine Stelle von Mnesitheos an, wo es heißt, das Brot von ζεία sei schwer zu verdauen, und nur die Bewohner kalter Gegenden wären gezwungen, dieses Getreide zu säen und zu essen. Galen setzt hinzu, er habe in Thracien und Macedonien wohl Getreide gesehen, welches schwarzes und übelriechendes Brot gebe, aber nirgends habe man es ζεία genannt, sondern βρίζα. Dieses haben manche auf Roggen gedeutet, und Ruellius glaubte sogar, der Französische Ausdruck *pain bis* rühre daher. Aber Galen sagt an derselben Stelle, dieses Getreide sei nicht allein im Halm, sondern auch in der Aehre der in Asien gebaueten τίφη sehr ähnlich (ὁμοιότατον) gewesen, und das würde er nicht vom Roggen gesagt haben. Andere rathen auf *Triticum monococcum*, welches eher möglich ist. Auf alle Fälle wird hier von einer Spelzart geredet, welche schlechtes Getreide gab. Nach Galen verschwand das Wort ὄλυρα aus dem Gebrauche und ζεία nahm dessen Stelle ein, wie die *Geoponica* beweisen; ζεία bezeichnete das bessere, schwere Korn, und τίφη das leichtere. So verschieden waren Gebrauch und Bedeutung dieser Wörter.

Die Römer kannten den Spelz seit den frühesten Zeiten; es war ihr ältestes Getreide (*Plin. Hist. nat. L.* 18. *c.* 8). Er heißt kurz *far*, *ador*, *adoreum*, *semen adoreum*, auch wohl *semen* allein, welches allerdings das hohe Alterthum und den allgemeinen Gebrauch dieses Getreides bei jenen Völkern beweiset. *Expinsi far* sagt Cato (*c.* 2). Vier Arten führt Columella an. Zuerst *far Clusinum* von schöner weißer Farbe, nach Pontedera τίφη der Griechen, und Bauhin's *Zea major* oder *dicoccos*; dann *far venuculum*, und zwar *rutilum* und *album*, nach Pontedera ὄλυρα der Griechen, Bauhin's *Zeocrithon*, der Italiäner *Spettone*; und endlich *semen trimestre* oder *halicastrum*, nach Pontedera ζεία der Griechen. Aus dem Vorigen erhellt schon, wie unbestimmt und willkührlich Pontedera's Deutungen sind; ζεία ist Winterfrucht nach Theophrast, also gewiß nicht *halicastrum*. Die Verwirrungen beim Plinius, was diese Gegenstände betrifft, sind groß. *Arinca*, sagt er *L.* 18. *c.* 8, *Galliarum propria, copiosa et Italiae est. In Aegypto autem ac Syria, Cilicia et Asia ac Graeciae parte peculiares zea, olyra, tiphe. Qui zea utuntur, non habent far.* Dann *c.* 10. *Ex arinca dulcissimus panis — haec enim est quam olyram vocant. Tiphe*

et ipsa ejusdem generis, ex qua fit in nostro orbe oryza. Apud Graccos est zea. Vorher war *arinca* nur in Gallien und Italien, dann ist sie *olyra*, welche Kleinasien und Griechenland eigenthümlich seyn soll. Aus diesen ungleichen Behauptungen sieht man, dafs bald dieser, bald jener Schriftsteller ausgezogen wurde, ohne sie mit einander zu vergleichen. Soviel erkennen wir aus jenen Stellen deutlich, dafs die Griechischen Wörter ζεία, ὄλυρα, τίφη durchaus keine bestimmte Bedeutung im Lateinischen haben.

Der Ackerbau der Römer in seinen beiden Hauptzweigen, dem Baue des Weizens und des Spelzes, war ihnen eigenthümlich, nicht durch Griechische Weisen bestimmt oder verändert. Die Griechen hatten nicht einmal ein Wort für das feinste Brot, *panis siligineus*, wie Galen gesteht, und eben so wenig für die Weizenart *Siligo*. Keine Art des Spelzes trifft mit den Griechischen Arten zusammen, kein Wort ist aus dem Griechischen genommen, als etwa *trimestre*, und doch setzt Columella beim Weizen hinzu: *id genus est Siliginis*, beim Spelz: *quod vocatur halicastrum*. Sie hatten das Getreide nicht von den Griechen; es war beiden Nationen früher aus Einem Lande gekommen; es war auf Italienischem Boden mit einheimischer Kunst gepflanzt und gewartet. Nur die Cultur der Gerste scheint sich aus Griechenland nach Rom verbreitet zu haben.

Von der Heimath des Spelzes haben wir wenige Angaben. Am wichtigsten ist die Nachricht des ältern Michaux, welcher den Spelz einige Tagereisen nordwärts von Hamadan in Persien wild gefunden haben will (*Encycl. méthod. Botan. T. 2. p.* 560). Wenn auch die kurze Angabe nicht allen Zweifel hebt, so hat sie doch des Landes wegen viel innere Wahrscheinlichkeit.

Die Gerste, κρίθη, κρῖ bei den alten Dichtern, *hordeum*, *searah* der Ebräer, *yava* im Sanskrit, wurde schon früh gebauet. In den Homerischen Gesängen kommt κρῖ λεύκον oft vor, auch in den biblischen Schriften ist nicht selten davon die Rede. Das Gebiet von Athen wird wegen der guten Gerste gerühmt; andere Feldfrüchte kamen dort nicht gut fort. Dafs die Alten nicht blofs nackte Gerste, sondern diese nur selten baueten, ist oben gezeigt worden. Beim Hesychius wird der nackten Gerste erwähnt, und Galen redet bestimmt von γυμνόκριθον (*de alim. fac. L.* 1. *c.* 10), welches in Cappadocien gebauet werde. Diese Stelle beweist ebenfalls, dafs die Alten nicht blofs nackte Gerste hatten. Die Arten der Gerste zählt Theophrast auf: *distichon*, *tristichon*, *tetrastichon*, *pentastichon*, *hexasti-*

chon; die letztere wurde besonders gebauet. Ohne Zweifel hat Theophrast oder haben die Abschreiber sich die Sache leicht gemacht und die Arten nach der Zahlenfolge gebildet, denn von einer dreizeiligen und fünfzeiligen Gerste hat man sonst nicht die geringste Nachricht. Columella redet nur von zwei Arten, *distichum* oder *galericulatum* und *hexastichum* oder *cantherinum*; das erste wurde im Herbst gesäet, war also Wintergerste, das letzte im Frühling. Wir sehen daraus, dafs *Hordeum hexastichum* wirklich dieselbe Art war, welche wir jetzt so nennen, und nicht *Hordeum vulgare*, welches nicht selten sechszeilig, aber Sommerfrucht ist. Plinius rechnet die Gerste überhaupt unter die Winterfrüchte. Theophrast sagt (*Hist. pl.* L. 8. *c.* 1), die Gerste sei Winterfrucht, ausgenommen diejenige, welche man τριμήνη nenne. Die gewöhnliche Gerste bei den Alten war also *Hordeum hexastichon*, dann folgte *Hordeum distichum*, und unsere gewöhnliche Gerste; *Hordeum vulgare* wurde seltener gebauet, bei den Römern vielleicht gar nicht. Sollte man daher nicht vermuthen, *Hordeum vulgare* sei eine neue Art, aus *Hordeum hexastichon* in nordlichen Ländern dadurch entstanden, dafs man es zum Sommergetreide machte? Von der Bartgerste, *Hordeum zeocrithon*, finde ich bei den Alten keine Nachricht, und es ist eine blofse Vermuthung der ältern Botaniker, dafs *oryza* der Römer diese Gerste sei.

Die Gerste soll nach Diodor in Aegypten, nach Homer in Sicilien, nach Berosus in Babylonien, nach Platon in Attika, nach Linné in Sibirien mit dem Weizen zugleich wild wachsen. Alle diese Angaben sind schon oben untersucht worden. Noch kommen zwei Angaben hinzu, denen es nicht an innerer Wahrscheinlichkeit fehlt. Moses von Chorene, der Armenische Geschichtschreiber, sagt, die Gerste wachse wild in Armenien am Flusse Kur; Plinius versetzt die Heimath der Gerste nach Indien (*Hist. nat. L.* 18. *c.* 7).

Der Roggen (*Secale cereale*) wird in den nordlichen Gegenden von Europa und Asien, auch in den Gebirgen der südlichen Länder da gebauet, wo Weizen nicht wohl fortkommt. In Indien und Afrika wird er, so viel mir bekannt ist, nicht gebauet, die Oerter ausgenommen, wohin die Europäer ihn später gebracht haben. Die Nachrichten der Alten vom Roggen sind zweifelhaft. Dafs τίφη und βρίζα nicht Roggen, sondern Spelzarten

waren, ist oben gezeigt worden. Eben so wenig kann *Siligo* Roggen seyn; diese Frucht gab vorzüglich weifses Mehl, welches gerade Roggen nicht giebt. Pontedera hatte den Einfall, *Hordeum hexastichon* könne Roggen seyn, wozu kein Grund vorhanden ist. *Olyra* und *Zea* sogar, von den Alten als Spelz deutlich bezeichnet, hielt Moschopulos nach du Fresne's *Glossarium* für Roggen, und dieser kommt in den ältern Kräuterbüchern zuweilen unter jenem Namen vor. Beim Theophrast, Dioskorides, Galen, sogar in den *Geoponicis* wird von keinem Getreide geredet, welches man auf Roggen deuten könnte. Nur allein Plinius spricht (*L.* 18. *c.* 16) von *Secale*, welches gewöhnlich mit Roggen übersetzt wird. *Secale*, sagt er, *Taurini sub alpibus asiam vocant, deterrimum et tantum ad arcendam famem utile, fecunda sed gracili stipula, nigritia triste, sed pondere praecipuum; admiscetur huic far ut mitiget amaritudinem ejus et tamen sic quoque ingratissimum ventri est. Nascitur qualicunque solo cum centesimo grano; ipsumque pro lactamine est.* Man mufs bemerken, dafs Plinius dieses *Secale* zwischen *Foenum graecum*, *Farrago*, *Medica* und *Cytisus* stellt. Betrachten wir diese Stelle ohne vorgefafste Meinung, so werden wir darin keine Beschreibung des Roggens finden. *Nigritia triste* kann doch nur auf die Farbe des Korns gehen, und Roggen ist nicht schwarz. *Pondere praecipuum* ist Roggen ebenfalls gar nicht, und *nascitur cum centesimo grano* widerspricht der bei weitem nicht so grofsen Ergiebigkeit des Roggens gar sehr. Auch sind die Beschreibungen von der Bitterkeit, dem schlechten Geschmacke und der Unannehmlichkeit jenes *Secale* von der Art, dafs man sie auf den Roggen angewandt für höchst übertrieben halten müfste. Kurz, *Secale* bei Plinius ist nicht Roggen, sondern ein Gewächs, welches seiner Natur nach nur zwischen den Futterkräutern steht. Auch der Name scheint nur ein Kraut zu bedeuten, welches für das Vieh geschnitten wird. Das Schwanken in den Benennungen, indem schon früh *Olyra* und *Zea* auf Roggen angewandt wurde, zeigt, wie wenig bekannt der Roggen bei seiner Erscheinung im Abendlande war. Ich halte ihn für eine den Alten ganz unbekannte Getreideart, welche erst im Mittelalter nach Europa gebracht wurde. Damals kam auch der Büffel, ein vorher in Europa nie gesehenes Hausthier, nach Italien; man fing an Buchweizen zu säen, man pflanzte Spinat in den Gärten, man würzte die Biere mit Hopfen, und die Katze verdrängte das Wiesel aus den Häusern.

Der Roggen wächst nach Marschall von Bieberstein in der Kaukasisch-Kaspischen Steppe, ferner bei Feodosia in der Krimm und bei Sarepta im Sande wild, *certissime spontaneum*, wie der Verfasser sagt. Schon Linné sagte, der Roggen finde sich wild bei Samana an der Wolga. Ungeachtet der Grund dieser Nachricht, wie Beckmann gezeigt hat, sehr unsicher war, so ist sie doch durch Bieberstein's Angabe höchst wahrscheinlich geworden. Diese Gegenden wurden in den frühern Zeiten von Tatarischen und Mongolischen Nationen bewohnt, bei denen der Roggenbau vielleicht schon seit frühern Zeiten eingeführt war. Die benachbarten Völkerstämme hatten nur wenig Verkehr mit ihnen, und manche Künste, z. B. die Destillation, wurden lange bei ihnen ausgeübt, ehe das Abendland etwas davon erfuhr, und was dieses erfuhr, kam erst durch Vermittelung der Araber dahin.

Der Hafer, *avena*, *βρῶμος* oder *βρόμος*, wurde von den Alten, wie jetzt, mehr zum Viehfutter als zur Nahrung der Menschen gebauet. Aber in den ältern Zeiten ist keine Spur von dem Gebrauche dieses Getreides; in den Homerischen Gesängen erhalten die Pferde immer Gerste, nie Hafer. Mir ist auch keine Stelle bekannt, welche lehrt, daſs die Griechen Hafer gebauet hätten. Hafergrütze kannten ihre Aerzte durchaus nicht. Plinius redet allein von einer *Avena graeca*, welche man dem Mengfutter (*ocymum*) zusetzte (*L.* 18. *c.* 16). Schneider (*ad Columell. p.* 100) meint, es sei der *αἴγιλος* beim Theophrast; aber dieses Gras ist wahrscheinlich *Avena fatua* oder *sterilis*, ein gefährliches Unkraut, welches wohl nicht gebauet wurde. Von den verschiedenen Arten und Abarten des Hafers, die wir jetzt säen, *Avena strigosa, orientalis, nuda*, finden wir keine Spur bei den Alten. Vielleicht war der Haferbau vormals nur bei den Germanischen und Keltischen Völkern üblich, und kam von dort zu den Römern. Die Deutschen lebten, wie Plinius sagt (*L.* 18. *c.* 17), von Haferbrei. Noch jetzt bauet man im südlichen Europa selten Hafer; man behauptet in Spanien und Portugal, er schade den Pferden, und nimmt statt dessen überall Gerste zum Viehfutter. *Avena* scheint ein Keltisches Wort, dem die Namen dieses Getreides in neuern Sprachen, auch Hafer, nachgebildet wurden. Allerdings ist die Uebereinstimmung der Sprache einer der Hauptgründe, daſs *avena* Hafer und *βρόμος avena* war, da hingegen das Aushülsen den Spelz und die Zeilen die Gerste deutlich bezeichnen.

Ver-

Verwildert sieht man den Hafer in vielen Gegenden, ob aber ursprünglich wild, ist schwer zu entscheiden. Auch wissen wir nicht, ob die verschiedenen Arten von Hafer, welche wir zu bauen pflegen, in verschiedenen Ländern wild sind. Aufser dem gemäfsigten und nördlichen Europa wird der Hafer nur in Sibirien gebauet. Man sollte also nicht glauben, dafs er aus wärmeren Gegenden zu uns gekommen sei. Und doch sind alle gebaueten Haferarten, vielleicht *Avena strigosa* ausgenommen, wohl nicht einheimisch; denn auch verwildert halten sie sich nicht lange an einer und derselben Stelle. Aufklärungen über den Ursprung des Hafers können für die Geschichte der Natur und Menschheit sehr wichtig werden.

Der Anbau der kleinen Hirse (*Panicum italicum*, wovon *P. germanicum* ursprünglich gewifs Abänderung ist) ist nicht allein im gemäfsigten uud wärmern Europa gewöhnlich, sondern auch in Asien, durch ganz Indien bis zu den Molukkischen Inseln, wie Rumph's *Herbar. Amboin.* (*T.* 5. *p.* 202) lehrt. Nicht weniger verbreitet ist der Anbau der grofsen Hirse (*Panicum miliaceum*), welche man in Ostindien ebenfalls in den mannigfaltigsten Abänderungen bauet. Vermuthlich wächst also die Hirse in den wärmern Gegenden von Asien wild, obwohl wir noch keine Nachrichten von wilder Hirse haben. Zu den Pflanzen wärmerer Gegenden gehören diese Grasarten, denn der geringste Frost schadet ihnen, und nur weil sie schnell wachsen, blühen und reifen, kann man sie in kältern Gegenden bauen. Die Uebereinstimmung der Sprachen sagt nur allein, dafs *Panicum* und *Milium* der Alten unsere Hirse waren. *Panicum* (von *panicula*, wie Plinius sagt) würde unsere grofse Hirse (*Panicum miliaceum*) seyn, *Milium* also die kleinere (*Panicum italicum*), obgleich für die letztere der Name *Panicum* sogar in das Deutsche, Fench, übergegangen ist. Die Griechen haben für diese Wörter κέγχρος und μέλινη oder ἔλυμος. Fast immer nennt Theophrast beide zusammen, und nur da, wo von sehr kleinem Samen die Rede ist (*De caus. plant. L.* 2. *c.* 17), wird κέγχρος allein gebraucht; ein Beweis, dafs dieses Wort die kleine Hirse bedeutet. Dagegen ist eine andere Stelle beim Theophrast, wo es heifst, der Reis bilde keine Aehre, sondern eine Rispe, wie κέγχρος und ἔλυμος. Nun hat aber die kleine Hirse keine Rispe. Aber κέγχρος ist ohne Zweifel eine in den Text aufgenommene Glosse, indem man das seltene Wort ἔλυμος durch κέγχρος erklärte. Ferner

sagt Dioskorides (*Mat. med. L.* 2. *c.* 118. 119), ἔλυμος oder μελίνη gebe weniger Nahrung als κέγχρος, da doch dieser kleinern Samen hat. Aber ich vermuthe einen Fehler des Abschreibers, der ἀτροφώτερα statt τροφιμώτερα setzte, und zwar darum, weil beide Wörter kurz hintereinander oft wiederholt werden, und also eine Verwechslung leicht möglich war. Auch sagt Dioskorides vom κέγχρος schon ἀτροφώτερα τῶν λοιπῶν σιτηρῶν, welches ohne jene Veränderung der Lesart durchaus widersprechend seyn würde. Uebrigens mufs κεγχρος früh in Griechenland gebauet seyn, denn das Wort kommt schon beim Hesiodus im Schild des Herkules vor. Doch es ist noch nicht ganz ausgemacht, ob nicht die Alten noch andere Grasarten als Hirse baueten, z. B. *Panicum Crus galli*, ein in unsern Gegenden häufig wildes Gras, welches noch jetzt in China gesäet wird, wenn das Chinesische Gras nicht eine verwandte Art ist. Die περιγλώαιδες scheinen auf *Panicum Crus galli* zu deuten.

Die Mohrhirse (*Holcus Sorghum*) wird durch den ganzen Orient bis tief in Indien gebauet, ferner auf der Afrikanischen Ost- und Westküste, endlich im südlichen Europa, vorzüglich in Portugal. Wäre der Bau im Orient vormals so verbreitet gewesen als jetzt, so würden wir mehr Nachrichten von diesem Getreide bei den Alten finden, als der Fall ist. Sprengel vermuthet, der grofse Weizen, welcher in Baktrien wachsen und Körner wie Oliven haben soll, sei dieses *Sorghum*, so wie das Getreide mit Blättern vier Zoll breit, wovon Herodot redet (*Hist. Rei herb.* 1. *p.* 79). Aber die erste Deutung ist unwahrscheinlich, denn die Körner der Mohrhirse sind noch nicht so grofs als Weizenkörner. Beide Nachrichten scheinen fabelhafte Uebertreibungen. Mir scheint vielmehr das βόσμορον beim Strabo (*L.* 15. *p.* 694), ein Indisches Getreide, dessen Körner kleiner als Weizenkörner seyn sollen, hieher zu gehören. Sehr treffend hat Beckmann (Geschichte der Erfindungen B. 2. S. 244) die Nachricht beim Plinius (*L.* 13. *c.* 7): *Milium intra hos decem annos ex India in Italiam advectum est, nigrum colore, amplum grano, arundineum culmo* u. s. w., von *Holcus Sorghum* erklärt. Es scheint aber diese Getreideart sich damals nicht weiter verbreitet zu haben, denn nachher verschwinden alle Spuren davon. D[illegible]re Verbreitung im Morgenlande ist durch die Araber geschehen, in [illegible]lande durch die Schifffahrten der Portugiesen. Eine genaue Angabe

der Heimath dieses Getreides haben wir nicht. Es werden viele Arten und Abarten der Mohrhirse gebauet: *Holcus saccharatus*, *cernuus*, *bicolor*, sogar *halepensis*, und *H. Sorghum* mit weifsen, bunten, schwarzen Samen. Eine Abänderung wie die letztere war die von Plinius angegebene.

Der Reifs (*Oryza sativa*), *oryza* der Griechen und Römer, *achu* im Sanskrit, ist ein im ganzen wärmern Asien häufig gebauetes Getreide, und jetzt auch im südlichen Europa, besonders in Italien, nicht selten. Die Alten erwähnen seiner nur als eines Indischen Getreides. Heyne deutet eine Stelle im Herodot (*L.* 3. *c.* 100) auf den Reifs, aber der Same wird mit κέγχρος verglichen, woraus hervorgeht, dafs er kleiner war als Reifskörner, auch kochte man den Samen mit dem κάλυξ, welches bekanntlich gar nicht auf den Reifs pafst. Herodot redet hier höchst wahrscheinlich von einem *Hibiscus*, wovon mehrere Arten, z. B. *Hibiscus Sabdariffa*, *esculentus* u. a. m., in Indien gegessen werden, so nämlich, dafs man die unreife Frucht, Samen, Kapsel und Kelch zugleich kocht; ja, man macht sogar den Kelch von *Sabdariffa* ein. Die reifen Samen sind ungefähr von der Gröfse der grofsen Hirse, die unreifen kleiner. Theophrast beschreibt den Reifs sehr genau als ein Indisches Getreide. Dioskorides nennt den Reifs unter den Nahrungsmitteln, dessen man sich auch als einer anhaltenden Arznei bediente; Galen führt ihn ebenfalls unter den Nahrungsmitteln an. Aber nirgends finden wir eine Nachricht, dafs er in Europa oder in Asien, so weit es die Alten genauer kannten, gebauet wurde; sie erhielten dieses Getreide nur durch den Handel. Der Name *oryza* bedeutet aber auch bei den Alten, und wahrscheinlich ursprünglich, Graupen, welche man aus Gerste oder aus Spelz bereitete. Dieses erhellt aus vielen Stellen beim Plinius, besonders *L.* 18. *c.* 8. Da er nun die Nachrichten von dem Indischen Reifse mit der ursprünglichen *oryza* und andern Indischen Pflanzen zusammenwirft, so ist eine grofse Verwirrung bei ihm über diesen Gegenstand. Das Vaterland des Reifses scheint in Ostindien, und zwar in den wärmern Gegenden dieses Landes, zu seyn; genaue Nachrichten von wildem Reifse haben wir nicht.

Indien hat manche Getreidearten, welche sich nicht über seine Gränzen verbreitet haben. Vorzüglich sind zu nennen: *Eleusine coracana*, welche durch ganz Vorderindien sehr häufig gebauet wird, und *Panicum fru-*

mentaceum Roxb. In den frühesten Zeiten, vor aller Geschichte, stand das Abendland mit dem Morgenlande in einer Verbindung, welche Weizen und Gerste und manche Hausthiere verbreitete. Dann schloſs sich der Osten; aber in ihm selbst gingen Veränderungen vor, wodurch Reiſs und Büffel und die südlichen Gegenden bekannter wurden. Alexander's Zug nach Indien brachte nur Nachrichten von dort. Aber kurz vor und zu Augustus Zeiten schlieſst sich Indien den Römern auf, Gesandte der Indier kommen nach Rom, der Handel wird lebhaft, Gewürze, Arzneimittel, Reiſs werden daher gebracht, und sogar der Sorgsame wird nach Italien verpflanzt. Mit der Zeitrechnung des Vikramaditza, 57 vor C. G., entsteht eine Veränderung in Indien, von welcher jene Begebenheiten herzurühren scheinen. Mittelbar durch die Hunnen und ähnliche Züge kommt der Indische Büffel nach Italien; darauf öffnen die Araber den Osten, endlich folgen die Portugiesen, und erst seit einigen Jahren haben wir Hoffnung, daſs die Engländer mehr aus Indien holen werden, als Geld.

Auch Abessinien hat seine einheimische Getreideart, den Teff, *Poa abessinica*, welcher auſser diesem Lande nicht gebauet wird. Die Abessinier sind, wie die Nordafrikaner, diesem Welttheile fremd, denn die ursprünglichen Bewohner desselben trieben nirgends Ackerbau. In den Abessinischen Gebirgen muſste man mit einem so zarten Grase, welches nur kleine Körner giebt, vorlieb nehmen. Ausländer haben daher auch keine Veranlassung gefunden, diesen Bau von den Abessiniern anzunehmen.

Man führt unter den Getreidearten ein Gras an, welches in Deutschland häufig wild wächst und vormals gebauet seyn soll, *Panicum sanguinale Linn.*, *Digitaria sanguinalis* der Neuern. Ich finde nur, daſs Matthiolus sagt, er höre, dieses Gras werde in einigen Gegenden von Böhmen gebauet. Aber es ist zu vermuthen, daſs der Name Schwaden oder Mannagras zu einer Verwechslung mit *Festuca fluitans* geführt habe. Dieses letztere Gras giebt die Mannagrütze, welche in einigen Gegenden von Preuſsen und Polen gesammelt wird, aber nur von der wilden im Wasser wachsenden Pflanze. Noch in neuern Zeiten ist darüber ein Streit in den Böhmischen Provinzialblättern entstanden, indem man behaupten wollte, die Mannagrütze komme von *Digitaria sanguinalis.* Matthiolus

ist aber ein unzuverlässiger Schriftsteller, dem man nur zu oft nachgeschrieben hat.

Amerika hat sein besonderes Getreide, den Mais, welcher über ganz Indien, einen Theil von Afrika und das südliche Europa verbreitet worden ist. Es giebt davon einige Arten: den frühen, kleinen Mais, *Zea praecox*, den gemeinen, *Zea Mais*, und den grofsen Karolinischen, *Zea elatior*, auch viele Abarten. Die Europäer fanden den Maisbau sowohl in Nord- als Südamerika, bei der Entdeckung dieser Länder, allgemein eingeführt; die entferntesten Nationen hatten ihn, und das vorher unbekannte Volk der Mandanindianer, gegen die Quellen des Missuri, bauete, als man vor nicht gar langer Zeit dorthin kam, eine besondere Abart des Mais. Aber es ist merkwürdig, dafs man noch nicht weifs, in welcher Gegend von Amerika der Mais wild wächst, und ihn trifft dasselbe, was von vielen Getreidearten der alten Welt gesagt wurde. Es würde über die Verbreitung der Völker in Amerika viel Aufschlufs geben, wenn man die Heimath dieses Getreides wüfste. Der Mais ist ein so nutzbares ergiebiges Getreide, dafs er gewifs nach der alten Welt schon früher gekommen wäre, wenn irgend ein genauer Verkehr zwischen dieser und der neuen Welt in den frühern Zeiten Statt gefunden hätte. Sobald aber jener Verkehr lebhaft wurde, verbreitete sich der Maisbau, und schon seit anderthalb Jahrhunderten herrscht er auf den Indischen Inseln. Dafs der Mais den Alten ganz unbekannt war, versteht sich von selbst. Seine Geschichte hat Humboldt in seinem Werke über Neuspanien geliefert.

Der Buchweizen (*Polygonum Fagopyrum*) ist zwar keine Grasart, doch aber dem Getreide in Rücksicht auf seine mehligen Körner so ähnlich, dafs man ihn als einen Anhang derselben anführen kann. Die ältere Geschichte desselben hat Beckmann in der Geschichte der Erfindungen 4. St. geliefert, und gezeigt, dafs er den Alten unbekannt, weder ihr *Erysimum*, noch ihr *Ocymum* war; er führt *Bruyeri Champieri Dipnosophia s. Sitologia* an, worin 1530 Buchweizen als eine Frucht angegeben wird, welche vor Kurzem aus Griechenland und Asien nach Europa gekommen war. Die Polen nennen ihn *Tatarka*, weil sie ihn von den Tataren erhielten, die Russen *Greczicha*, weil er aus Griechenland zu ihnen kam.

Wie lange er aber in Kleinasien und Griechenland gebauet wurde, ist unbekannt. Marschall von Bieberstein führt ihn in der *Flora taurico-caucasica* nicht an, auch fehlt er in der *Flora sibirica.* Da er noch sehr häufig in China gebauet wird, so mag er aus diesem Reiche abstammen. Vermuthlich hat er sich schon im Mittelalter weiter nach Westen verbreitet. Eine verwandte Art, *Poligonum tataricum*, wächst im südlichen Sibirien wild, und wird auch dort gebauet. Doch ist der Anbau dieser Pflanze wohl nur eine Nachahmung des Anbaues des wahren Buchweizens, und vielleicht ein Beispiel einer neu erfundenen Getreideart.

Ueber

die Gattung *Gracula* aus der Familie der Krähenvögel (*Coraces*).

Von Herrn Lichtenstein *).

Der gegenwärtige Zustand der systematischen Zoologie, und vor vielen andern des Theils, welcher sich mit Aufzählung und Beschreibung der Vögel beschäftigt, scheint nichts dringender zu fordern, als eine genaue und gewissenhafte Feststellung der alten Gattungsbegriffe, die bei der unseligerweise überhand nehmenden Neigung, die Zahl der Gattungen zu vermehren, um so mehr verloren gehn, je weniger bei diesem Geschäft eine gewisse historische Kritik angewendet wird, und je leichtfertiger man sich dabei von dem augenblicklichen Eindruck einer eben angestellten Betrachtung und Vergleichung leiten läſst. Es ist diese Neigung hauptsächlich bei denen zu Hause, die sich mit einem abgesonderten Theil der Zoologie eine längere Zeit mühsam beschäftigen, und dann in ihren Schriften vor der Welt ein Zeugniſs ablegen möchten, mit welcher Genauigkeit sie untersucht haben; sie muſs aber nothwendig zuletzt zu einer wahrhaften Sprach- und Ideen-Verwirrung führen und schon jetzt der geistvollern Bearbeitung der Wissenschaft Eintrag thun, indem nun alle Unterscheidung wieder auf leeres Messen und Zählen hinausläuft, und das freiere Auffassen des Totalcharakters, nebst dem Bestreben, Ausdrücke für denselben in der Sprache zu

*) Vorgelesen den 18. Juli 1816.

finden, immer mehr erschwert wird. Was soll man (um nur ein Beispiel von vielen anzuführen) dazu sagen, wenn in dem neuesten Werk über die einheimischen Vögel (Koch's System der Baierschen Zoologie, Nürnb. 1816) allein aus den Deutschen Arten der Gattung *Motacilla* Linné's nicht weniger als eilf *genera* gemacht, und die Kennzeichen derselben hin und wieder von nichts anderm, als den Papillen am hintern Seitenrande der Zunge, entlehnt werden? Nach meiner Ueberzeugung sollte das Aufstellen neuer Gattungen, da es, zu oft wiederholt, eine dem Studium höchst hinderliche Wandelbarkeit der Form der Wissenschaft zur Folge hat, nur unter drei Bedingungen gestattet sein. Erstlich nämlich, wenn wirklich ganz neue Bildungen beschrieben werden sollen, die einer bisher bekannten Gattung, nicht ohne dem Charakter derselben Gewalt zu thun, zugesellt werden können; dann: wenn dies wirklich früher mit solchen neu entdeckten Formen aus zu blinder Anhänglichkeit an alte systematische Ansichten geschehen und dadurch der alte Gattungsbegriff unwahr und trübe geworden ist; und endlich, wenn die Zahl der Arten einer Gattung durch die allmähliche Bereicherung der Wissenschaft so angewachsen ist, daſs sie nicht bequem mehr übersehn werden kann, und man sich nach Ruhepunkten in der Betrachtung der ganzen Reihe umzusehn genöthigt ist.

Die Gründe der zweiten Art haben ganz besonders Antheil an den Umgestaltungen, welche einzelne Theile der Zoologie in den neueren Zeiten erfahren haben, indem man sich überall bemüht hat, fehlerhafte Zusammenstellungen aufzuheben und durch Sonderung des Fremdartigen mehr Klarheit in das Ordnungsgebäude zu bringen. Doch scheint man mir durchgängig mehr darauf auszugehn, die neu aufgestellten Gattungen recht ins Licht zu setzen, als das Wesen der alten, zu denen sie bisher gehörten, und die Gründe, warum sie billig ihnen nie hätten zugerechnet werden sollen, fest zu bestimmen; und doch wird Niemand leugnen, daſs eigentlich damit das ganze Geschäft hätte beginnen sollen. Vorzüglich muſs man in dieser Hinsicht vielen Neuern eine unverantwortliche Gleichgültigkeit gegen das, was Linné wuſste und lehrte, vorwerfen, gleichsam als sei dies Alles nun schon so veraltet, daſs es gar nicht mehr lohne, danach zu fragen, was er unter diesem oder jenem Namen verstanden, oder wie man seine Worte zu deuten habe. Beweise für die Wahrheit dieser Behauptung finden sich, wie fast überall, so auch in der Abtheilung der Ornithologie, von welcher ich hier zu reden habe.

Die

Die Raben und Krähen, nebst den übrigen ihnen verwandten Formen unsers Vaterlandes, vergegenwärtigen die hier gemeinte Familie sehr gut, nicht nur als die bekanntesten, sondern auch als die, welche den Charakter derselben am reinsten und am vollständigsten darstellen. Daher schon Aldrovand sehr richtig von ihnen unter einem eignen Abschnitt: *de genere corvino*, handelt, und Blumenbach sie zuerst zu einer eignen Ordnung unter dem Namen *Coraces* erhoben hat. Bekannt ist, wie ihre Stellung im System bisher schwankte; Linné stellte sie mit den Spechten und übrigen Klettervögeln in eine und dieselbe Ordnung, deren Charakter nun dadurch, soweit er auf extensiven Merkmalen beruhte, jede allgemeine Gültigkeit verlor, und selbst Blumenbach, und nach ihm Daudin, scheinen den rechten Weg verfehlt zu haben, indem sie ihre Ordnung der Krähenvögel nicht rein begränzten, sondern durch Hinzuziehung der entfernter, und oft nur durch Aufenthalt und Ernährungsart verwandten Vögelgattungen die Aufstellung eines, für alle gültigen, allgemeinen Begriffs sich unmöglich machten. Auch in dieser Hinsicht verdient daher Illiger's Bearbeitung der Ornithologie vorzügliches Lob, denn bei ihm erscheinen nun zuerst die Krähenvögel nicht als eigne Ordnung, sondern als eine Familie der Gangvögel, der nach Aussonderung alles Fremdartigen ein sehr bestimmter, von der Schnabelbildung entlehnter Charakter gegeben werden kann. An dieser Form des Schnabels, deren Eigenthümlichkeit schon Linné mit dem Ausdruck *rostrum cultratum* bezeichnete, nehmen aber nur die eng verwandten Gattungen *Corvus*, *Coracias*, *Paradisea* und *Gracula* Theil, und nur sie gehören daher mit vollem Recht in diese Familie, die man nicht durch Hinzuziehung von *Sitta*, *Oriolus*, *Cassicus*, *Sturnus*, *Buphaga*, *Glaucopis* u. s. w. verwirren darf. Es ist nicht zu leugnen, daſs eine jede dieser letztgenannten Gattungen bald in Lebensart, bald in allgemeiner Körperbildung mit den Krähenvögeln in gewisser Verwandtschaft steht, und man darf es in dieser Hinsicht beklagen, daſs Illiger in seinem System die Familie der Schaarvögel (*Gregarii*) nicht näher an die Krähenvögel zu rükken gewuſst hat; allein immer bleiben doch die generischen Hauptkennzeichen derselben so bestimmt abweichend, daſs über die Richtigkeit der Begründung dieser Familie kein Zweifel übrig bleiben kann.

Weniger möchte der Ornithologe, der Illiger's Buch bei seinen Arbeiten zu Rathe zieht, mit den Bestimmungen zufrieden sein, die er von den Gattungen dieser Familie im Einzelnen gegeben hat, und diese Unzu-

länglichkeit entsteht daher, daſs der Verfasser bei seinen Beschreibungen nicht immer die Gegenstände in Natur vor Augen hatte, sondern sich hin und wieder auf Abbildungen oder Beschreibungen stützen muſste, die ihn irre leiteten. Als sein Werk zuerst in Paris bekannt ward, erstaunten die dortigen Zoologen über die Kühnheit, solches zu unternehmen, ohne ihre Sammlungen zuvor kennen gelernt und dazu benutzt zu haben, muſsten aber doch gestehen, daſs er seine Aufgabe mit besonderm Glück gelöst, seine Quellen gut zu wählen und mit ungemeinem Scharfsinn zu benutzen verstanden. In der That sind dergleichen Miſsgriffe in seinem Buch höchst selten zu ſinden; aber um so mehr ist es Pflicht des Freundes, diese Mängel zu ergänzen, wie ich das in Hinsicht auf die oben genannte Abtheilung im Folgenden zu thun versuche.

Es betrifft besonders die Gattung *Gracula*, deren Kennzeichen Linné einzig in die Gestalt des Schnabels stellte, indem er dieselbe in den allgemeinen Ausdrücken: *rostrum convexo cultratum, basi nudiusculum*, den sehr nahe verwandten Gattungen *Corvus* und *Coracias* entgegen zu setzen versuchte. Aus der Behandlung dieser Gattung in der zehnten Ausgabe des Linnéischen Systems, in welcher sie zum erstenmale als neu aufgestellt erscheint, läſst sich abnehmen, daſs Linné nur die Hauptart derselben (*Gr. religiosa*) aus eigener Ansicht gekannt, die übrigen aber nur nach Abbildungen und Beschreibungen zu beurtheilen im Stande gewesen. Daher darf man wohl schlieſsen, jener Gattungscharakter sei besonders nach Ansicht dieser Hauptart entworfen, und sie sei gleichsam das Urbild dazu. Die übrigen Arten, von welchen einige in den Profilzeichnungen allerdings der Hauptart ähneln, scheint Linné, ohne daſs ihm eine genauere Prüfung möglich gewesen wäre, hinzugezogen zu haben, dabei ganz seinem glücklichen Gefühl vertrauend, das ihn in zweifelhaften Fällen das Rechte schon so oft hatte finden helfen. Diesmal hatte ihn aber doch dieses Vertrauen miſsleitet, und wenn man die verschiedenartigen Gestalten, die er hier, dem angenommenen Gattungsbegriff zuwider, zusammenstellte, mit einander vergleicht, so scheint es fast, als habe er diese eine Gattung im Zusammenwerfen alles Unbequemen gleichsam aufopfern und Preis geben wollen, um sich die übrigen rein zu erhalten. Das muſste seine Schüler natürlich irre machen, und es war kein Wunder, nachher noch manches Andre *Gracula* genannt zu sehn, was eben so wenig zu dem ursprünglichen Begriff dieser Gattung als zu dem paſste, was miſsbräuchlich aus ihr geworden war. Da-

her auch **Gmelin** in der 13ten Ausgabe des Linnéischen Systems in einer Note den Gattungscharakter zu berichtigen versuchte; aber indem er ihn gerade von den Arten entlehnte, die keine *Graculae* waren, trug er mehr zur Verwirrung als zur Aufklärung der streitigen Punkte bei. **Daudin** faſste endlich die richtige Ansicht und verwies die unächten *Gracula*-Arten aus dieser Gattung. Jedoch half er dadurch dem Uebel nicht ab. Denn er gab keine Kennzeichen für das, was er nun so genannt wissen wollte, und wer die von ihm hierunter begriffenen Vögel nicht schon aus der Natur kannte, lernte aus seinen Beschreibungen gewiſs nicht, warum sie allein hier zusammengestellt wurden. Dann setzte er an die Stelle des einen aufgehobenen Fehlers sogleich einen neuen, indem er die von *Gracula* verwiesenen Species zu *Sturnus* brachte, wohin sie eben so wenig zu rechnen waren. Diese Miſsgriffe verleiteten **Illiger**, die Sache anzusehn, als ob noch nichts darin geändert wäre, und in seinem *Prodromus*, so wie in der Abhandlung über die geographische Verbreitung der Vögel, sie so zu nehmen, wie er sie bei **Gmelin** und **Latham** vorfand, was er gewiſs nicht gethan haben würde, wenn er zuvor eine wahre *Gracula* mit Aufmerksamkeit hätte betrachten können. Daher passen denn auch seine, schon der Unsicherheit wegen sehr allgemein ausgedrückten Kennzeichen, soweit sie die Schnabelbildung betreffen, kaum auf die ächten Gracula-Arten, und das eine hinzugefügte Merkmal von den carunculösen Stellen am Kopfe kommt nun wieder den unächten, die er fast vorzugsweise vor Augen gehabt zu haben scheint, die er wenigstens sehr gut kannte, da sie schon damals im Berliner Museum waren, ganz und gar nicht zu. Er gesteht jedoch redlich, daſs ihm die Gattung dunkel sei. Sieht man nun nach meinen obigen Voraussetzungen *Gracula religiosa calva*, *cristatella* u. s. w. als die eigentlichen Repräsentanten der Gattung an, nach welchen auch **Linné** ursprünglich seine Kennzeichen derselben entwarf, so wird es nothwendig, danach endlich, den gegenwärtigen Kräften und Bedürfnissen der Wissenschaft gemäſs, den Charakter derselben fester zu stellen. Es wird dies am besten in Ausdrücken der Illigerschen Terminologie geschehen, nicht nur weil eine Unvollkommenheit seines Handbuches ergänzt werden soll, sondern weil das Charakteristische hier in Schnabeltheilen liegt, für welche die bisherige Sprache noch keine Ausdrücke hatte, wie denn überhaupt **Illiger's** vorzügliches Verdienst bei Bearbeitung der ornithologischen Kunstsprache darauf beruht, daſs er es möglich gemacht hat, eines Gegenstandes allgemeine Gestalt in

wenigen Worten klar vorzustellen, gleichsam sein Profil in einfachem deutlichen Umrifs zu zeichnen, oder wenigstens über die Theile desselben, worauf es besonders ankommt, sich kurz und unzweideutig auszudrücken.

Es wird nicht undienlich sein, die wesentlichen Merkmale der übrigen Gattungen dieser Familie vorauszuschicken.

Corvus: *Rostrum crassiusculum validum cultratum. Nares basales, plumis mastacalibus setaceis recumbentibus tectae. Tarsus digito medio longior.*

Coracias: *Rostrum mediocre cultratum, maxillae apice subadunco, mandibulam superante. Gnathidia gonyde breviora. Nares basales laterales nudae lineares. Tarsus digitum medium aequans.*

Paradisea: *Rostrum mediocre cultratum, acuminatum, mandibulis fere aequalibus. Nares basales laterales, superne membrana plumulis holosericeis densis erectis obsita, semiclausae.*

Nun der Charakter von *Gracula* ausführlicher.

Gracula: *Rostrum porrectum mediocre convexo-cultratum mandibulis aequalibus, tomio maxillari ante apicem vix emarginato; mandibula recta, gonyde subascendente, gnathidiis hac longioribus aut eam aequantibus, angulo mentali acuto. Rictus amplior, malis ad angulum oris, usque sub ipsis oculis, implumibus.*

Nares mediae laterales ovatae concavae.

Caput depressum antice plumosum, antiis ad nares usque pertingentibus, postice et ad genas saepius deplumatum, caruncularum.

Cauda mediocris aequalis rectricibus decem.

Pedes ambulatorii, mediocres (tarsis digito medio vix longioribus) validi. Acropodia scutulata.

Illiger führt in einer Anmerkung an, dafs mehrere Arten von *Turdus* und *Ampelis* fälschlich zu *Gracula* gerechnet würden. Ich habe kurz anzugeben, was ich davon halte.

Die wirklich vollkommen reinen *Graculae* sind folgende:

1) *Gr. religiosa Lin.*
2) *Gr. calva Lin.*
3) *Gr. tristis Latham (Paradisea tristis Lin. Gmel., Grac. gryllivora Daudin).*
4) *Gr. Pagodarum Daud. (Turdus Pagod. Lin. Gmel. Lath.).*

5) *Gr. cristatella Lin.* und

6) *Gr. caruncul ata Gmel.* (*Sturnus gallinaceus Lath., Gracula gallinacea Daud., Gracula larvata Shaw.*).

Zweifelhaft bleiben wegen mangelhafter Beschreibung *Gr. grisca* Daud., nach Le Vaillant's Abbildung mehr zu *Turdus* gehörig; ferner die bei Sonnerat beschriebenen *Gr. ginginiana* und *malabarica*, ebenfalls den Drosseln verwandt, auch von Gmelin und Latham dahin gerechnet; endlich Latham's *Gracula Icterops*, die mit grofser Wahrscheinlichkeit hieher zu zählen ist.

Gracula longirostra bei Pallas *) kann ferner nicht hieher gerechnet werden, sondern wird mit *Gr. cyanotis* Lath., *Gr. calva* Lin. Gmel., *Buceros corniculatus* Temminck, *Certhia novae Hollandiae* Lath. und vielen andern Vögeln aus mancherlei Familien eine neue ziemlich zahlreiche Gattung, die zwischen *Merops* und *Turdus* mitten inne zu stehn kommt, vermehren helfen **). Latham's *Sturnus caruncnlatus*, den Daudin auch zu *Gracula* stellt, gehört höchst wahrscheinlich eben dahin.

Alle die oben genannten wahrhaften *Graculae* sind bis auf die eine, sonst auch merkwürdig ausgezeichnete, *Gr. caruncnlata* (die im südlichen Afrika entdeckt wurde) asiatisch und in den Eigenthümlichkeiten ihrer Lebensart mit einander übereinstimmend. Ich glaube mich nicht zu irren, wenn ich vermuthe, dafs sie in der heifsen Zone der alten Welt das vorstellen, was in der Südamerikanischen Fauna die wahren Ampelis-Arten, die auch ganz auf dieses Land beschränkt sind und dieselbe Art der Ernährung und des Beisammenlebens zeigen. Die Verwandtschaft zwischen beiden ist so grofs, dafs Linné eine Ampelis-Art unter dem Namen *Gracula foetida* dieser Gattung zugesellte, und in der That dafür mehr Verzeihung verdient, als für die gleich näher zu rügenden Mifsgriffe. Denn bis auf den

*) *Spicilegia zool. Fasc. VI. Tab. 2.*

**) Herr Cuvier, in seinem 1817 erschienenen *Règne animal*, hat ebenfalls die Nothwendigkeit dieser neuen Gattung anerkannt und sie mit dem Namen *Philedon* belegt. Derselbe trennt (wie es mir scheint, unnöthigerweise) die *Gr. religiosa* als eigne Gattung (*Eulabes*) von den übrigen, die er, sehr übereinstimmend mit der obigen Darstellung, unter der Gattung *Gracula* läfst. Was ich weiter unten *Quiscala* nenne, ist bei ihm eine Unterabtheilung der Tronpials und führt den Gattungsnamen: *Icterus*, der nicht wohl pafst, weil alle Arten schwarz sind. Ueber die Widersinnigkeit der bisherigen Behandlung der Gattung *Gracula* äufsert er sich auf ähnliche Weise, wie oben geschehen ist, und sagt am Schlufs: *Il est certain, que des genres ainsi composés peuvent excuser, sinon justifier, l'humeur des ennemis des méthodes* (*Règne animal, I. p.* 360, 362, 384 *et* 401).

einen Umstand, daſs der Queerdurchmesser des Schnabels an der Basis gröſser ist als der Höhendurchmesser (worin eben das Charakteristische dieser Amerikanischen Gattung liegt), stimmen die übrigen Verhältnisse, aus der Profilansicht genommen, fast vollkommen zu einander. Le Vaillant und Temminck haben zuerst jener *Gracula foetida* (die bei Gmelin und Latham auch noch einmal unter dem Namen *Corvus nudus* vorkommt) ihren rechten Platz angewiesen, und Illiger ist ihnen darin in der Anmerkung zur Gattung *Cephalopterus* von Geoffroy gefolgt. Wenn er aber an eben dieser Stelle den *Corvus calvus* Linn. auch zu *Ampelis* ziehen will, so scheint sich das, wenigstens aus der LeVaillantschen Abbildung (*Oiseaux nouveaux tab.* 49.), nicht rechtfertigen zu lassen, und im Text ist eben so wenig etwas, das eine Aenderung der alten Benennung erforderlich zu machen schiene. Uebrigens ist es allerdings wohl zu tadeln, daſs Geoffroy aus jedem dieser beiden eine eigne neue Gattung macht.

Shaw hat die Verwirrung noch vergröſsert, indem er einige Neuholländische, mehr zu den Racken gehörige Vögel, unter den Namen *Gracula strepera*, *Gr. Tibicen* und *Gr. varia*, hinzuzog. Auch diese werden wohl in der Folge ein eignes Genus bilden. Die von Gmelin eingeführte *Gracula cayennensis*, so wie Shaw's *Gracula picoides* (*Oriolus picus* Lin. Gmel.), hat schon Herrmann vor 20 Jahren zu einer eignen Gattung erhoben und *Dendrocolaptes* genannt.

Jetzt bleibt noch von den Arten der Gattung *Gracula* zu reden, die theils schon von Linné, theils von seinen Schülern fälschlich dazu gerechnet wurden, und sich bei der Reinigung der Gattung nicht zu irgend einer andern schon bekannten verweisen lassen; denn wie sehr Daudin gefehlt, indem er, wie ich schon oben bemerkte, diese zu *Sturnus* brachte, wird aus dem Folgenden den Ornithologen deutlich genug werden, und von allen andern verwandten Gattungen stehn sie eben so weit entfernt, wiewohl sie nach der allgemeinen Körperform, besonders nach der Gestalt des Kopfes, so wie nach der Lebensart, den Racken und Krähen näher verwandt sind, als es die ächten *Gracula*-Arten waren.

Da sie nun alle unter sich in den generischen Kennzeichen übereinstimmen und ihre Zahl nicht ganz unbedeutend ist, so ist hier wohl einer von den oben angedeuteten Fällen, in welchen die Aufstellung einer neuen Gattung gerechtfertigt erscheinen muſs. Ich stehe nicht an, ihr den Namen Quiscala, mit welchem Daudin sie als eine *tribus* der Staar-Gattung über-

schreibt, zu lassen, wiewohl ich über die Ableitung desselben mich nicht habe aufklären können. Da aber schon eine der Hauptspecies bei Linné diesen Namen führt, so ist er gewiſs verständlicher und bezeichnender, als eins der noch unbenutzten Synonyme der Krähen und Racken aus der Griechischen Sprache sein würde.

Der Charakter dieser Gattung wäre nun folgender:

Quiscala: *Rostrum mediocre gracilius sub-cultratum, apice attenuatum et paulisper curvatum, tomiis integerrimis; mandibula brevior, gonyde apice deflexa gnathidiis multo longiore; Angulus mentalis rotundatus. Rictus congruus.*

Nares basales laterales ovales nudae, antiis brevibus vix basi tectae.

Caput convexum ubique plumatum.

Cauda gradata aut rotundata, rectricibus 10 — 12.

Pedes ambulatorii longiusculi (tarsis digito medio omnino longioribus) congrui. Acropodia scutulata.

Zu dieser Gattung gehören nun folgende Species:

1) *Qu. purpurea* n. *Gr. Quiscala* Lin. Lath.
2) *Qu. fulgida* n. *Qu. vulgaris* oder *Sturnus Quiscala* von Daudin, der diese Art unrichtigerweise für die Linnéische Quiscala hält.
3) *Qu. navicularis* n.; Latham's bootschwänzige Atzel, auf welche er und mit ihm die übrigen Ornithologen, vielleicht zu voreilig, bloſs des Namens wegen, Linné's *Gracula Barita* beziehn, da doch Linné's Beschreibung keinesweges paſst, und wahrscheinlich ein Vogel aus einer ganz andern Gattung, vielleicht ein *Oriolus* oder dgl. gemeint ist.
4) *Qu. Saularis*, *Gr. Saularis* Linn.
5) *Qu. jamaicensis*, *Sturnus jamaic.* Daudin's, der aber unrichtig Gmelin's *Turdus Labradorus* und *Corvus mexicanus* dazu citirt, von welchen ersterer sicher auf *Oriolus ferrugineus* zu beziehen ist, letzterer aber wegen seiner Gröſse nicht mit diesem Vogel einer Art sein kann.

Dunkel bleiben wegen mangelhafter Beschreibung des Schnabels *Gracula Atthis* Lin. und Daudin's *Sturnus Zanoë* und *Sturnus Curaeus*, von denen er selbst vermuthet, daſs sie entweder andern schon beschriebenen Arten oder verwandten Gattungen angehören mögen. Die *Gracula sturnina*

von Pallas, die Daudin nun consequent genug, aber widersinnig, *Sturnus sturninus* nennt, ist wirklich ein *Sturnus*, und von Pallas in seinen spätern Schriften auch dafür erkannt und *St. dauuricus* genannt.

Wenn man nun die Reihe der nach den äufsern Kennzeichen mit Gewifsheit zu dieser neuen Gattung zu rechnenden Formen durchläuft, so findet man, dafs sie wieder fast alle einem Welttheil angehören, und indem man die Linnéischen *Gracula*-Arten in die Asiatischen und Amerikanischen abtheilt, hat man auch die generisch verschiednen Vögel gesondert.

Uebrigens ist wohl zu merken, dafs die Verschiedenheit zwischen *Gracula* und *Quiscala* so grofs ist, dafs sie nicht mehr neben einander in einer Familie stehn bleiben dürfen. *Gracula* bleibt an seinem Ort, den Uebergang von den Paradiesvögeln und Racken zu den Cotingas und Schwalben vermittelnd. *Quiscala* dagegen kommt in die Familie *Gregarii* in die Mitte zwischen *Oriolus* und *Sturnus*, unter deren Species einige allerdings nahe zu ihr hinüberneigen, so dafs sie als ein recht nothwendiges und bisher fehlendes Bindeglied zwischen beide eintritt. Selbst in der Art des Farbenglanzes ist so viel Uebereinstimmendes, dafs selbst ein ungeübtes Auge in ihnen die nahen Verwandten nicht verkennen wird.

Ich kann diesen Gegenstand nicht verlassen, ohne noch Einiges über die von den Alten entlehnten und auch hier, wie so oft, unrichtig gebrauchten Namen hinzuzufügen. Linné liebte, seine generischen Namen aus solchen Griechischen und Lateinischen zu bilden, deren Bedeutung ihm schwankend schien und denen er damit eine gewisse Beständigkeit zu geben hoffte. Nicht selten glückte es ihm damit, wenn ihn die Ueberzeugung, man werde auf die wahre Urbedeutung eines Namens doch mit aller Mühe nicht zurückkommen, nicht betrog. Oft aber fehlte er auch hierin aus blofser Uebereilung. Das Wort *Gracculus* *) wird aus sich selbst und dem Gebrauch, den die classischen Schriftsteller der Lateiner davon machen, nicht so deutlich, als aus der Art, wie es die Uebersetzer der Griechischen Naturhistoriker anwenden **). Da erscheint es denn bei Plinius für das

χολοιός

*) Auch *Graculus*, *Graccus* und *Gracchus*.

**) Man vergleiche Gefsner unter *Corvus*, *Graculus* und *Asio*, wo viel Lehrreiches über diesen Gegenstand zusammengestellt ist.

κολοιός des Aristoteles, daſs diesem als ein generischer Ausdruck für die kleinern oder dünnschnäbligen Krähenvögel gilt. Denn es heiſst hier *): κολοιῶν δ'ἐστὶν εἴδη τρία. ἓν μὲν ὁ κορακίας. οὗτος ὅσον κορώνη, φοινικόρυγχος. ἄλλος ὁ λύκος καλούμενος. ἔτι δὲ ὁ μικρος, ὁ βωμολόχος. ἔστι δὲ καὶ ἄλλό τι γένος κολοιῶν περι τὴν Λυδίαν καὶ Φρυγίαν, ὁ στεγανόπουν ἐστὶ.

Was damit gemeint sei, läſst sich ziemlich ausmitteln. Die rothschnäblige κορακίας ist offenbar die sogenannte Schweizerkrähe, der Linné sehr willkührlich den Namen *Graculus* vorzugsweise beilegte, obgleich derselbe, abgesehn von jener Uebersetzung des κολοιός, vielmehr der ursprüngliche lateinische Name der Dohle gewesen zu sein scheint. Denn ehe man sie wegen ihrer Liebe zum blinkenden Metall *Monedula* nannte, führte sie, vielleicht damals noch mit mehreren ihrer Verwandten, den Namen von der Stimme, was schon theils aus der Verwandtschaft mit *Crex*, *Crax* und *Corax*, theils daher glaublich ist, weil eine andre Ableitung fehlt. Die zweite Art λύκος ist die Dohle selbst, wie bekannt genug, wenn gleich auch sie hin und wieder vorzugsweise κολοιός genannt wird. Die dritte Art, der kleine βωμολόχος, wird schwer auszumitteln sein, wenn nicht wieder die Dohle selbst damit gemeint ist, für welchen Vogel die mehrsten Ausleger den βωμολόχος bei andern Schriftstellern geradezu erklären. Einige, z. B. Gaza, lassen daher auch die Worte ἔτι δὲ weg und nehmen das folgende als Apposition von λύκος, aus dem Grunde, weil sonst vier Arten von κολοιός herauskommen, Aristoteles aber nur drei ankündigt; was Einiges für sich haben würde, wenn der folgende Satz nicht sehr wohl zu erkennen gäbe, daſs in demselben von einer ganz eignen, zu jenen dreien nicht zu rechnenden Art die Rede sei. Diese mit Ruderfüſsen ist nämlich gewiſs nichts anders als die Scharbe, *Pelecanus Carbo* Lin., den auch Plinius *Corvum aquaticum* nennt.

Jenes Wort κορακίας, das Linné nach allem diesen fehlerhaft durch *Graculus* übersetzte, wendete er aber noch übler an, indem er mit demselben eine Gattung *Coracias* überschrieb, die von Rechtswegen *Colius*, (κολιός) hätte heiſsen müssen. Denn dieser übrigens so oft mit κελεός und κολοιός verwechselte Name läſst sich nur auf den Pirol oder Wiede-

*) *Arist. hist. anim. lib. IX. cap.* 24. Sogar den Fisch, den Aristoteles (*Lib. VI. cap.* 17 u. an andern Stellen) κορακῖνος nennt, belegen seine Uebersetzer mit dem Namen *Graculus*. Linné deutet diesen Namen nach Artedi auf *Sciaena Umbra*.

wal deuten, der dieser Gattung ist. Es hat mir nicht gelingen wollen, von den eigentlichen Racken (*Coracias garrula* Lin.) etwas bei den Alten aufzufinden; auch Gefsner handelt davon ganz kurz unter *Cornix coerulea*, ohne weitere Nachweisung. Unrichtig ist daher auch Linné's Gattung *Colius* benannt, denn sie hat es mit Vögeln zu thun, die den Finken sehr nahe verwandt sind, und als Südafrikanische und Ostindische Vögel den Alten wohl schwerlich bekannt gewesen sein können. Und so ist es denn auch nicht zu verwundern, wenn sich der *Gracculus* der Alten es mufste gefallen lassen, mit weiblicher Endung einen Gattungsnamen für Ostindische Vögel abzugeben.

Die

Werke von Marcgrave und Piso

über

die Naturgeschichte Brasiliens,

erläutert

aus den wieder aufgefundenen Original-Abbildungen.

(Fortsetzung *)).

Von Herrn Lichtenstein **).

II. Vögel.

Die Zahl aller bis jetzt bekannten Säugethierarten verhält sich zu der der bisher entdeckten Vögel wie 2 zu 9, und aus der Reihe der letztern enthält Brasilien wenigstens viermal soviel als Europa; kein Wunder also, dafs die Ausbeute, welche uns die Prüfung der ältesten Nachrichten über die Thiere Brasiliens bietet, mit Hülfe der vom Prinzen Moritz von Nassau veranstalteten bildlichen Darstellungen, für diese Klasse viel reicher, aber auch mühsamer wird, als sie es bei den Säugethieren war. Ich werde daher, um meiner Arbeit auch für diesen Theil die beabsichtete Brauchbarkeit zu geben, hier einen ganz andern Weg einschlagen müssen, indem ich zuerst die Angaben der oft genannten alten Gewährsmänner, zum Nutzen für die, welche ihre Werke besitzen und bei ihren Untersuchungen an-

*) S. den vorhergehenden Band S. 201 ff. des physikalischen Theils.

**) Vorgelesen den 17. April 1817.

zuwenden gewohnt sind, in der bei ihnen vorhandenen Folge, ohne Rücksicht auf das System, aus meinen Quellen erläutere, und nachher erst in systematischer Ordnung auch von dem Rechenschaft gebe, was diese Quellen selbst, über jene gedruckten Werke hinaus, Neues und Interessantes für die Erweiterung der Ornithologie bieten. Es wird wohl kaum nöthig sein, zu bevorworten, daſs ich hier nur die Resultate der Untersuchungen, nicht aber Rechenschaft von dem Wege geben kann, auf welchem ich zu ihnen gelangt bin. Ich darf nicht fürchten, dabei anmaſsend zu erscheinen, da es mehr die Autorität meiner Beweismittel als meiner besondern Einsicht ist, für die ich Achtung fordre; und da die Quellen, aus denen ich schöpfte, auch andern offen stehn, so mag Jeder nachprüfen, dem meine Entscheidung nicht gefällt. Der Zweck meiner Arbeit (um es noch einmal herauszuheben) ist also: völlige Feststellung der von Marcgrave gegebnen Namen, mithin Berichtigung der früher ihnen irrig untergeschobenen Bedeutungen, und Entfernung aller auf solche Irrthümer gebauten Annahmen, die sich seit anderthalb Jahrhunderten in den naturhistorischen Werken vererbt haben.

Zuvörderst einige Bemerkungen über das Verhältniſs jener Werke zu den Original-Abbildungen in Hinsicht auf den Reichthum beider. Marcgrave nennt 122 Arten Brasilischer Vögel und liefert von 55 derselben die Abbildungen, die denn wieder, wie bei den Säugethieren, gar häufig an unrechter Stelle in den Text eingeschaltet sind, und so die Commentatoren zu Irrthümern verleitet oder ihnen die Zuverlässigkeit der Beschreibungen zweifelhaft gemacht haben. Piso, dem man besonders zum Vorwurf machen muſs, daſs er die Irrthümer, die er gar wohl hätte entdecken können, unberichtigt lieſs, führt nur 38 Vögel mit Namen auf, unter welchen keiner ist, der bei Marcgrave nicht auch beschrieben wäre, liefert aber zu jedem derselben eine Abbildung, und bringt zuweilen, noch sorgfältiger als Marcgrave, Notizen über den Aufenthalt, die Nahrung und Farbenänderungen bei, die nun erst, wenn man bestimmt erfährt, welch ein Vogel mit jedem Namen gemeint ist, Bedeutung und mitunter Wichtigkeit haben.

Dagegen sind in dem zweiten Bande des von Mentzel gesammelten *Thesaurus rerum nat. Bras.* allein 110 Abbildungen von Vögeln, von welchen 56 im Marcgravischen Text oder bei Piso ihre Erklärung finden, die übrigen aber mit unbekannt gebliebenen Namen bezeichnet und zum Theil noch jetzt als neue Entdeckungen zu betrachten sind.

In der kleinern Sammlung von Abbildungen (in Wasserfarben), die ich mit Mentzel durch L. P. (*liber principis*) bezeichne, finden sich zusammen 103 Darstellungen von Vögeln, meistens in gar zu kleinem Maafsstab, doch kenntlich, und mit durchgängig von des Prinzen eigner Hand hinzugefügter Bestimmung der Gröfse durch Vergleichung mit irgend einem bekannten Europäischen Vogel. Diese Abbildungen sind für die Holzschnitte bei Weitem häufiger zum Muster genommen, als die gröfsern und bessern Oelgemälde der Mentzelschen Sammlung, und schon dadurch mufsten wiederum mancherlei Irrthümer entstehen, zumal da die richtige Farbengebung, die sie im Original, oft trotz der schlechten Umrisse noch kenntlich macht, ihnen hier entzogen werden mufste. — Es finden sich also im Ganzen etwa viertehalbhundert Namen von Vögeln, von denen sehr viele aber sich in allen genannten Werken wiederholen, daher gewifs kaum 200 Arten als unterschieden zu betrachten sein werden. Wie arm ist dieser damals für fast erschöpfend gehaltene Vorrath, wenn wir ihn mit der muthmafslichen Zahl aller Südamerikanischen Vögelarten, die auf nahe an 1200 hinansteigt, vergleichen!

Jetzt zuerst eine Erläuterung der Marcgravischen Beschreibungen.

Cap. I. p. 190.

Der erste Vogel, *Nhanduguaçu*, ist *Struthio Rhea* Lin. (*Rhea americana* Lath.), die Beschreibung richtig bis auf das, was von der Hinterzehe gesagt wird. Piso hat p. 84 eine schlechte Abbildung davon gegeben, die nach der viel bessern in L. P. II. p. 194 sorglos kopirt ist.

Unter dem Namen *Jaçana* begreifen diese alten Schriftsteller eine grofse Reihe von Sumpfvögeln, so dafs man Linné tadeln mufs, der diesen Namen auf eine bestimmte Species von *Parra* anwendete, da doch hier schon vier Arten davon angeführt werden. Gleich die erste, neben welcher die sehr verfehlte Abbildung von *Parra Jassana* Lin. steht, ist nach der Beschreibung nicht diese, sondern *Crex martinica*, die in der Mentzelschen Sammlung, wo sich zwei vortreffliche Abbildungen davon finden, auch vorzugsweise *Jaçana* genannt wird. Hier ist also das Bild am unrechten Ort eingefügt, und gehört es zu der vierten Art p. 191, wo *Parra Jassana*

ganz deutlich beschrieben ist. Die Abbildung aber findet sich in der Mentzelschen Sammlung p. 53 mit dem Namen *Aguapeaçoca*. Nun aber giebt Marcgrave einen ganz ähnlichen (*Aguapeçaca*) seiner zweiten Art, die man für nichts andres als das Junge der *Parra Jassana*, aus welcher Linné die eigne Species *P. variabilis* macht, ansehn kann. Gmelin's *Parra viridis* und Buffon's *Jaçana vert*, die nach dieser Beschreibung von Marcgrave als eigne Species angenommen ist, fällt also weg, und eben so *Parra brasiliensis* Lin. und *Jaçana péça* Buffon's, denn die erste ist einerlei mit *Crex mart.* und die letztere mit *P. variabilis*.

Die dritte Art bezeichnet ebenfalls eine *Parra*, und die Kennzeichen, die angegeben werden, sind so bestimmt, daſs Ray, Brisson und mit ihnen Buffon und Latham kein Bedenken gefunden haben, daraus eine eigne Art, *Parra nigra*, zu machen. Doch ist sie seit Marcgrave's Zeit nicht wiedergefunden und auch keine Abbildung davon unter unsern Materialien anzutreffen. Möglich wäre allerdings noch ein Versehn in der Beschreibung, denn wenn man die Angabe, daſs der Kopf und Rücken schwarz und die Unterseite des Körpers braun sei, umkehrt, so paſst wieder alles gut auf die *Parra Jassana* Linné's.

Der folgende Vogel, *Cariçaca*, ist *Ibis albicollis*, die Abbildung (L. P. II. p. 202), so wie Marcgrave's und Piso's Beschreibungen, lassen darüber keinen Zweifel.

Die kleinere Art, hier *Matuitui* genannt, kann *Ibis grisea* sein; doch ist auf den Brasilianischen Namen kein Werth zu legen, da er nachher noch auf Vögel aus den unterschiedensten Gattungen angewendet wird. Brisson hat seine Beschreibung wieder nur nach dieser Marcgravischen Angabe gemacht. Es ist daher ein Bedenken, ob diese *Ibis grisea* als eigne Species wirklich existire, und nicht vielmehr für ein Junges von *I. albicollis* zu halten, wohl rege zu machen, zumal da Azara nichts von einer solchen erwähnt.

Cap. II. p. 192.

Tijepiranga ist *Tanagra Brasilia*, wie aus der Beschreibung und den Abbildungen (L. P. II. p. 208 f. 1. und J. M. p. 125, wo sie *Tijeguaçu piranga* heiſst) klar erhellt. Die Abbildung daneben gehört nicht hieher, sondern zu *Jacapu*.

Alia hujus species ist *Tanagra Sayaca;* die Abbildung (L. P. II. p. 246) führt den Namen *Çai-iuçu*, woraus *Sayaca* entstanden zu sein scheint. Zugleich wird hier auch schon das braungefärbte, dem Männchen ganz unähnliche Weibchen dargestellt.

Jacapu. Obgleich man bei diesem Namen zunächst an *Tanagra Jacapa* denken möchte, so paſst doch die Beschreibung nicht sowohl auf diesen Vogel, als auf einen bisher unbekannten derselben Gattung, den wir neuerlich aus Brasilien erhalten haben und der unter dem Namen *Tanagra loricata* bei uns aufgestellt ist. Hieher gehört die obere Abbildung, deren Original (L. P. II. p. 276 f. 1) den Namen *Guira-una* führt.

Jambu. Die Aehnlichkeit dieses Namens mit *Inambu*, welches in der Mentzelschen Sammlung (p. 281) neben dem Bilde von *Crypturus variegatus* steht, leitet auf die Vermuthung, daſs hier dieser Vogel gemeint sei, und die kurze Beschreibung bestätigt dies vollkommen (L. p. II. p. 254 *Inambu-guaçu*).

In der *Gallina africana* und dem danebenstehenden Bilde erkennt ein Jeder leicht das gemeine Perlhuhn. Wer aber beide noch genauer erwägt, gelangt hier zu der interessanten Bemerkung, daſs die beiden ungewöhnlichen Abweichungen von der gemeinen Form dieses Thiers, die Pallas zuerst unter den Namen *Numida mitrata* und *cristata* in den *Spicilegiis zoologicis* (*IV. Tab.* 2 *et* 3) beschrieb, wirklich schon unserm Marcgrave bekannt gewesen sind, und das ist deshalb wichtig, weil immer noch Zweifel blieb, ob diese Abweichungen nicht bloſser Ausartung des Perlhuhns zugeschrieben werden können, und Pallas selbst hat für das Gegentheil, das er doch annimmt, keinen so bündigen Grund, wie er gefunden haben würde, wenn er auf diese Stelle des Marcgrave aufmerksam geworden wäre und die Abbildung (L. P. II. p. 206) gekannt hätte. Denn hier ist ganz die *rutila galea*, durch welche schon Columella seine *Gallina numidica* von der *Meleagris* unterschied, und alles zeigt, daſs Afrika diese Thiere wenigstens schon in der ersten Hälfte der 17ten Jahrhunderts, ehe bei uns an ihre Zähmung gedacht wurde, und ehe also unser Clima Einfluſs auf ihre Umbildung gewinnen konnte, in diesen Abweichungen, die nunmehr für ursprünglich und specifisch gehalten werden dürfen, hervorbrachte.

Guira-tangeima ist *Oriolus Icterus*, wie wenig auch die Figur im Holzschnitt dazu zu passen scheint. Das Bild (J. M. p. 141) entspricht

aber dem Vogel selbst und der an sich ziemlich guten Beschreibung vollkommen. Ganz unrichtig aber ist es, wenn Marcgrave bei dem folgenden, *Japujuba* oder *Japu*, bemerkt, es sei das Weibchen von diesem, denn hiemit ist deutlich *Oriolus* (*Cassicus*) *persicus* gemeint (J. M. 147, L. P. II. 242). Was Marcgrave vom Nesterbau dieses Vogels beibringt, wird nun doppelt interessant. In der Parenthese (*vidi quoque totaliter nigras, dorso sanguinei coloris*) wird offenbar *Oriolus* (*Cassicus*) *haemorrhous* gemeint.

Nun folgt der Name *Sayacu*, unter ähnlichen Kennzeichen, wie die der Art, auf welche ich schon vorhin die Linnéische *Tanagra Sayaca* gedeutet habe. Die glänzende Rückenfarbe, der schwarze Schnabel und die angegebne Gröſse wollen jedoch auf keine der mir bekannten *Tanagra*-Arten zutreffen. Man müſste Miſsverständnisse und Irrthümer im Text vermuthen und zu verbessern suchen, wenn man wahrscheinlich machen wollte, daſs hier *T. Episcopus* gemeint sei. Eine Abbildung ſindet sich nicht dazu.

Ani — *Crotophaga Ani* (L. P. II. p. 250).

Guira Guainumbi. Eine der ausführlichsten Beschreibungen, aus welcher sich auch ohne die beigefügte Abbildung (nach L. P. II. p. 258, wo es *Oieruba* heiſst) *Prionites* (*Ramphastos*) *Momota* sehr wohl erkennen läſst.

Cap. III. p. 194.

Jaguaça-tiguaçu — *Alcedo amazona* Lin. Gm. Die Abbildung nach L. P. II. p. 268. Im Text ist statt *ferruginei* gewiſs zu lesen *aeruginei*.

Mitu vel Mutu ist *Crax Mitu* Linné's, welcher dieselbe wegen Aehnlichkeit der Zeichnung, da ihm die groſse Verschiedenheit der Schnabelbildung nicht deutlich geworden war, mit dem Männchen von *Penelope* (*Crax*) *Alector* verwechselte, das hier gleich daneben unter dem Namen *Mitu-Poranga* abgebildet und beschrieben wird. Die Abbildung (L. P. II. p. 192) läſst vermuthen, daſs Marcgrave ein junges, nach dem Schnabel noch nicht vollkommen ausgebildetes Thier vor sich gehabt, und es ist wohl möglich, daſs Linné, der auf seine Autortät fest bauete, dadurch eben zu dem oben gerügten Miſsgriff verleitet worden.

Caprimulgus brasiliensis ist hier unter dem Namen *Ibijau* zweimal abgebildet (nach L. P. II. p. 260 und I. p. 97). Auch in der Mentzelschen Sammlung kommt eine Abbildung davon vor (p. 221).

Cap. IV. p. 196.

In diesem Abschnitt beschreibt Marcgrave die ihm bekannt gewordenen Arten der Colibris, und zwar ausführlicher, als er es bei den übrigen Vögeln zu thun pflegt. Für sie alle hat er keinen andern Namen, als *Guainumbi*, und nur von der ersten giebt er eine Abbildung (nach L. P. II. p. 284). Aus dem Original davon und der Beschreibung erkennt man mit ziemlicher Bestimmtheit den *Trochilus leucogaster* Linné's, der vielleicht nur des Weibchen einer andern Art ist, vielleicht derjenigen, die Audebert (*Oiseaux dorés tab.* 37) *l'Oiseau-mouche Maugé* nennt. Seine beiden Abbildungen *tab.* 38 und 43 fielen dann auf einen Vogel zusammen.

Die zweite Art scheint nichts anders als eben das Männchen dieses weifsbäuchichen Colibris zu sein, und die Abbildung (L. P. II. p. 286) stimmt auch sehr wohl mit jener so eben citirten Audebertschen des *Maugé*.

Die Beschreibung der dritten Art fängt gleich mit einem bösen Druckfehler an, indem es hier heifst: *minor reliquis omnibus*, statt: *maior*; denn es werden dem Vogel nicht weniger als sechs Zoll Länge gegeben, und nun pafst alles auf das vollkommenste auf den *Trochilus macrourus* Lin., auf welchen auch Alle diese Beschreibung gedeutet haben. Die Abbildung (I. M. p. 101) stellt den Vogel im Fluge dar, wie er auf die von Marcgrave sehr charakteristisch beschriebene Art den Schwanz fächerförmig, wie ein zweites Flügelpaar, ausbreitet, um sich über den Blüthen schwebend zu erhalten. Dadurch gewinnt die Aehnlichkeit, welche ohnehin schon zwischen dem Flug dieser Vögel und dem der gröfsern Schmetterlinge Statt findet, eine neue Beziehung.

Die vierte Art ist ohne Zweifel *Trochilus dominicus* Lin. Gm., den die Neuern, durch einen sonderbaren Mifsgriff verleitet, alle mit dem *Tr. hirsutus* verwechseln. Die Abbildung (L. P. II. p. 294) gehört zu den besten.

Die fünfte ist sehr klar *Tr. Mango*, altes Männchen.

Die sechste stimmt sehr wohl mit *Tr. viridis* Lath. und *Tr. aurulentus* Aud. (*tab.* 12).

Die siebente ist ein Junges, wahrscheinlich von *Trochilus moschitus*; welcher dann selbst in der Beschreibung der achten Art deutlich zu erkennen ist.

In der neunten Art glaube ich den *Trochilus viridissimus*, so weit aus der kurzen Beschreibung geurtheilt werden kann, besonders aus dem, was von dem Schwanze gesagt ist, wieder zu erkennen.

Cap. V. p. 198.

Hier ist die erste Art *Jacupema*, welche von allen bisherigen Ornithologen auf die *Meleagris cristata* Lin. oder die *Penelope cristata* der Neuern bezogen ward, bis wir den Vogel, welchen Marcgrave hier meint und deutlich beschreibt, neuerlich selbst aus Brasilien erhielten, und Illiger ihn unter den Namen *Penelope superciliaris* von der *cristata* völlig unterschied. *Jamacaii* gehört wieder in die Gattung *Oriolus*, und ist eine der gewöhnlicheren und hier so gut beschriebenen Arten, daſs Linné, und seitdem Alle, ihr diesen Brasilianischen Namen gelassen haben.

Jacurutu ist *Strix magellanica*, die nach Azara (No. 42), der sie *Nacurutu* nennt, denn doch wirklich wesentlich von unserm *Schuhu* unterschieden und nicht bloſse Varietät desselben ist, wie man bisher wohl glaubte (L. P. II. p. 256 und I. M. p. 199).

Soco oder, wie es an einem andern Orte heiſst, *Içoco* ist *Ardea brasiliensis*.

Matuitui. Dieser Name, hier auf *Charadrius collaris* unseres Museums angewendet, oben schon auf *Ibis grisea*, nachher noch einmal auf einige *Bucco*-Arten, und endlich von Azara auf mehrere Arten von Strandläufern, beweist, wie wenig Werth und Bedeutung man überhaupt den Brasilianischen Namen beizulegen habe, und wie sie immer nur ganz allgemeine Eigenschaften, wie etwa: besondere Gröſse oder Kleinheit, dunkle Farbe, Aufenthalt am Wasser u. s. w. bezeichnen; dasselbe ist der Fall mit den Worten *Ara*, *Ajuru*, *Çai*, *Guira* (welches einen Vogel überhaupt bedeutet), *Japa* und *Japu*, *Tui* und vielen andern. Ich bevorworte dies nur ein für allemal, um möglichen Fehlschlüssen auf Verwandtschaft der Vögel aus Verwandtschaft der Namen vorzubeugen. Dieser hier beschriebene *Matuitui* wurde übrigens bis jetzt als Varietät der *Hiaticula* betrachtet, bis wir auch ihn in den unterschiedenen Lebenszuständen, in welchen ihn schon die Abbildungen (p. 29 und 31) der Mentzelschen Sammlung darstellen, aus Brasilien erhalten und unter dem Namen *Charadrius collaris* in unserm Museum aufgestellt haben.

Cap. VI. p. 200.

Drei grofse Brasilianische Vögel sind von den Schrifstellern durchgängig mit einander verwechselt: der oben erwähnte *Nandu* (*Rhea americana*), der *Jabiruguacu* oder *Nandhu apoa* (*Tantalus Loculator*) und der *Jabiru* selbst (*Ciconia Mycteria*). Daran ist eines Theils schon die hier wieder erhellende Unbestimmtheit und Gleichtönigkeit der Brasilianischen Namen, andern Theils aber und vorzüglich die Verwechslung der sonst nicht ganz tadelhaften Abbildungen Schuld, welche auch hier, wie so oft, gerade da in den Text eingefügt sind, wo der andere, ihm im Allgemeinen ähnliche, beschrieben steht. Vollständig aber klärt sich die Sache auf, sobald man die Original-Abbildungen (I. M. p. 61. F. 2. und L. P. II. p. 174) vergleicht, denen die Namen richtig beigefügt sind. Bei Piso springt der Nachtheil dieser Verwechslung noch mehr in die Augen, da er nur einen, nämlich den *Jabiru*, abbildet, aber dazu die Beschreibung des *Nandhu apoa* fügt. Eine andere Verwechslung ist die, nach welcher dieser letztere Vogel von Ray, Willugbhy, Buffon und andern *Curiçaca* genannt wird, unter welchem, wie wir schon oben gesehn haben, *Ibis albicollis* zu verstehn ist. So beruhet auch der Name *Toujou*, mit welchem die Französischen Ornithologen die *Rhea* bezeichnen wollen, und der doch der *Mycteria* zukommt, auf derselben Verwechslung. Marcgrave's *Jabiru* (p. 200) ist also *Ciconia Mycteria*, und dazu gehört das Bild von p. 201. Sein *Jabiru-guacu* ist *Tantalus Loculator*, den die Figur auf p. 200 vorstellt.

Der gleich darauf beschriebene Paradiesvogel ist, wie aus der Abbildung (L. P. II. p. 180) erhellt, *Paradisea fulva*. Hier ist nichts befremdend, als dafs Marcgrave, der doch sonst immer treulich anführt, wenn Gegenstände aus einem andern Welttheile nach Brasilien gebracht wurden, dieses hier unterläfst, ja sogar durch die Worte hinter *Paradisea: cuius aliquot reperiuntur species*, auf die irrige Vermuthung bringt, es gäbe dergleichen hier in Südamerika; möglich aber auch, dafs dieser Zusatz, da er überdies cursiv gedruckt ist, nur dem Uebersetzer von Marcgrave's Manuscripten, de Laet, zugeschrieben werden mufs, der auch an andern Stellen, nicht immer sehr treffend, drein redet.

Cap. VII. p. 201.

Guirapunga. Die ziemlich vollständige Beschreibung dieses Vogels in beiden Geschlechtern hat allen Ornithologen bei Beschreibung des *Ave-*

rano *), wie ihn Buffon nennt, der *Cotinga naevia* von Brisson und der *Ampelis variegata* von Gmelin zum Muster gedient. Ich zweifle, ob er in irgend einer Europäischen Sammlung anzutreffen sein mag, und suche vergebens nach einem Werk, in welchem er nach der Natur abgebildet wäre. Die recht gute Abbildung in der Mentzelschen Sammlung (p. 183) hat also um so gröſsern Werth, und kann noch in der Folge zu einer bessern Darstellung dieses Vogels benutzt werden. Doch muſs ich hier gleich mein Bedenken zu erkennen geben, daſs dieser Vogel ein noch nicht ausgefärbtes Junges einer andern Art sein könne, indem nach meinen neueren Erfahrungen manche dieser Gattung, z. B. *Ampelis nudicollis*, auf dem Uebergange vom jugendlichen Zustand zum alternden, scheckig erscheinen, wie dieser hier beschrieben wird. Von den beiden, hier und bei Piso p. 93 gegebnen Abbildungen ist übrigens nur die erste dem Original (L. P. II. p. 184) einigermaſsen kenntlich nachgebildet, die zweite aber durchaus ohne allen Werth; beide sind überdies in gröſserem Maſsstab als die Originale.

Guira-querea. Die etwas undeutliche Abbildung ist aus des Prinzen Sammlung (L. P. II. p. 164. Fig. 2.) entlehnt, wo man die Gestalt der Beschreibung ganz angemessen findet, und aus beiden den *Caprimulgus torquatus* sehr gut erkennt.

Jacamaciri. Marcgrave hat hier ein jüngeres männliches Exemplar von *Galbula viridis* vor sich gehabt, wie sie seltener vorkommen, daher scheinen die Kennzeichen anfangs nicht zu passen. Es ist die Varietät nämlich, welche neuere Französische Schriftsteller unter dem Namen *Jacamar à gorge rousse* als eigene Species unterscheiden.

Cariama. Die merkwürdige, mit dem wehrbaren Hornvogel oder *Anhima* unrichtig für verwandt gehaltene Gestalt, die nachher in den Systemen unter dem Namen *Palamedea cristata* aufgeführt wird, und die zuerst von Illiger als ein Vogel eigener Gattung erkannt und mit dem Namen *Dicholophus cristatus* belegt ist. Abermals ist die Abbildung, die in der Mentzelschen Sammlung (p. 35) vorkommt, die einzige Original-Abbildung, die von diesem Vogel existirt. Der Holzschnitt ist schlecht gerathen,

*) Marcgrave sagt nämlich, die Portugiesen nennen ihn *Ave de verano*, Sommervogel, weil er nur in dieser Jahrszeit seine starke Stimme hören laſst. Buffon übersetzt die ganze hier gegebne Beschreibung, und fügt nur aus Piso hinzu, das Weibchen habe keine Kehllappen. Sehr willkührlich giebt Gmelin die Zahl derselben auf zwei an, da in unserm Text ausdrücklich gesagt wird, es seien ihrer mehrere von unbestimmter Zahl.

besonders in Hinsicht auf den Schnabel, aus welchem Buffon schloſs, er sei mit den Raubvögeln verwandt, da er doch nach allen Merkmalen den Trappen am nächsten steht. Auch hier ist also diese Original-Abbildung von besonderer Wichtigkeit, denn auch diesen Vogel hat seit jener Zeit Niemand wieder gesehn.

Cap. VIII. p. 203.

Guara ist *Ibis rubra* n. *Tantalus ruber* Lin. Vortrefflich abgebildet bei Mentzel p. 85.

Urutaurana. Ein groſser Raubvogel und bisher von allen Schriftsteller zu *Falco Harpyia* Lin. gezogen, welcher Vogel, wie an sich etwas fabelhaft, es noch mehr geworden ist durch die unbedenkliche Benutzung des hier gegebenen Holzschnitts, zu welchem ich in unsern Materialien kein Original ſinde, daher vermuthe, daſs hier irgend ein vorräthiger Holzschnitt aus einem andern Werke gebraucht worden ist. Bei der unbestimmten Angabe von der Gröſse dieses Vogels, bei der vielfachen Deutung, die man, wenn von so wandelbaren Formen die Rede ist, den Worten des Beschreibers geben dürfte, wäre hier wohl schwerlich aufs Reine zu kommen, wenn wir nicht in der Mentzelschen Sammlung (p. 201) eine wirklich vorzügliche Abbildung des *Urutaurana* fänden, welche in allen ihren Merkmalen gar wohl mit Le Vaillant's *Autour huppé* (*Ois. d'Afrique I. Tab.* 26), Azara's *Epervier pattu* (No. 22), dem *Falco ornatus* von Daudin übereinstimmt.

Maguari. Dieser Name ist den Ornithologen längst bekannt, als einer Species von Störchen angehörig, welche unter allen bisher bekannten unserm gemeinen Storch am nächsten verwandt ist (*Ciconia Maguari*); aber wiederum sind diese wenigen Zeilen Marcgrave's alles, was bis jetzt irgend über dieses Thier gesagt worden ist, und wo andere Schriftsteller seiner gedenken, ist es nur im Nachhall dieser Worte, die sich, ohne daſs die Quelle zuletzt noch genannt wird, immer von einem auf den andern vererbt haben. Da Marcgrave keine Abbildung giebt, so ſindet sich auch sonst nirgends eine, und unser Original (I. M. p. 95) bekommt dadurch noch höhere Wichtigkeit, als selbst in den vorhin berührten Fällen.

Fast dieselbe Bewandniſs hat es mit dem folgenden: *Guarauna*, den Linné, mit allen frühern Ornithologen, Beschreibung und Abbildung immer (mittelbar oder unmittelbar) aus Marcgrave schöpfend, zu den

Schnepfen zählte, und als *Scolopax Guarauna* an die Spitze der ganzen Gattung stellte. Dieser Vogel aber ist, wie die Abbildung (I. M. p. 61) deutlich lehrt, ganz derselbe, den eben diese Ornithologen, nach einem von Buffon zuerst beschriebenen Exemplar, unter den Reihern mit dem Namen *Ardea scolopacea* aufführen, und den wir, seinen Platz in der Reihe der Vögel besser erkennend, in unserm Museum den Rallen zugesellt und *Rallus Gigas* genannt haben. Die Marcgravische Beschreibung paſst auf unser Exemplar vollkommen.

Ayaya ist *Platalea Ayaya* Lin.

Nun folgen zwei Tauben: die eine, *Picuipinima*, bezieht Temmink auf seine *Columba squamosa*, welches doch der Gröſse wegen sein Bedenken hat, mehr aber noch widerlegt wird, wenn man die Abbildung betrachtet, welche Illiger's *Columba pusilla*, die wir in der Natur damit vergleichen konnten, auf das treffendste darstellt. Die andere Taubenart, *Picacuroba*, ist zu unvollständig charakterisirt, als daſs man sie, bei dem Mangel einer Abbildung, völlig zu deuten im Stande wäre; doch scheint sie noch am nächsten mit Temmink's *Columba Erythrothorax* verwandt.

Tuidara. Eine Eule; stimmt mit Illiger's *Strix perlata* gut überein, doch bleibt es zweifelhaft, ob diese neue Art nicht bloſse Spielart von unserer Europäischen *Strix flammea* sei.

Guaca-guacu. Eine Art von Möven, die in Brasilien nicht selten zu sein scheint, dennoch bisher den Ornithologen in ihrer ganzen Eigenthümlichkeit unbekannt blieb, indem man eine Deutung dieser Marcgravischen Angabe gar nicht versuchte. Erst Azara beschreibt ein Paar ähnliche unter den Namen *Hatis à tête noire* nnd *Hatis à bec court;* doch trifft keine seiner Beschreibungen so gut auf die Merkmale der aus Brasilien uns zugekommenen Exemplare, als die, welche Marcgrave hier von seinem *Guacaguacu* mittheilt. Eine Abbildung dieses Vogels, der bei uns *Sterna magnirostris* heiſst, findet sich in unsern Gemäldesammlungen nicht.

Tapera ist *Hirundo Tapera* Lin.

Cap. IX. p. 205.

Hier werden die unterschiedenen Arten von Papagayen aufgezählt. Zuerst drei Arten von sogenannten *Aiurus:* die erste, *Aiuru-curau*, ist die gemeinste Brasilische Art *Psittacus ochrocephalus;* die zweite nur eine Varietät von diesem so veränderlichen Vogel; die dritte, *Aiuru-curaca*, eine Ab-

änderung des *Psittacus aestivus.* Der Kunst, die Papagayen durch Ausrupfer einzelner Federn und Eintröpfeln von Färbestoffen an deren Stelle buntscheckig zu machen (des Tapirirens), erwähnt Marcgrave allerdings, doch nicht, daſs man das Blut von Amphibien dazu gebrauche. Nun folgen sieben Arten von *Tuis* oder kleinen Papapayen. Die erste ist wegen der kurzen Beschreibung schwer zu errathen. Man möchte bei *Cauda longissima* an *Ps. rufirostris* denken, wenn der Schnabel nicht ausdrücklich schwarz genannt würde. Doch könnte dies auch wohl ein Uebersetzungs- oder Druckfehler sein, da *Ps. rufirostris* bei Mentzel p. 265. Fig. 2. gut abgebildet ist, ohne daſs seiner sonst noch von Marcgrave erwähnt würde. Er heiſst hier *Tui-iuparaba.* Die zweite Art, *Apute-juba*, ist *Psittacus aureus*; die dritte, *Tirica*, ward von Vielen unter diesem Namen als eigene Art aufgeführt, ist aber nichts als das Weibchen des *Psittacus passerinus*; die vierte, ohne Namen, ist *Psittacus Tui* Latham's; die fünfte ist unter dem hier gebrauchten Namen *Jendaya* in die Systeme übergegangen, doch gehört sie auch zu den verschollenen Arten, und ist Alles, was von ihr nur irgend erzählt wird, immer aus dieser Stelle von Marcgrave geschöpft; eine Abbildung davon steht L. P. II. p. 292. Dagegen ist die sechste, *Tui-ete*, der bekannte *Psittacus passerinus*, das Männchen von *Tirica*, und die siebente, eben so bekannt unter ihrem hier gebrauchten Namen: *Tuipara.* Hierauf läſst Marcgrave die groſsen sogenannten *Aras* oder richtiger *Araras* folgen; unter dem ersten, *Arara-Canga*, beschreibt er nicht den unter diesem Namen bekannten, sondern den auch neuerlich wieder oft mit diesem verwechselten *Psittacus Macao* Linn. Das Bild gehört nicht hieher, sondern zum folgenden, *Arara-Una*, der gar keinem Zweifel unterworfen ist. In dem folgenden, *Anaca*, fallen *Psittacus Anaca* Lin. Gm. und *Ps. Versicolor* Latham's zusammen, auch Buffon's *Perruche à gorge tachetée* gehört hieher.

Maracana ist *Psittacus severus*, wie Le Vaillant (*Perroquet tab.* 8, 9 *et* 10) schon sehr gut dargethan. Mit *Quijuba-tui* ist der ächte (Linnéische) *Guaruba* und Latham's *Psittacus luteus* gut bezeichnet. Wir erhielten ihn unter dem Namen *Cura-Juba.*

Der *Paragua* ist wieder eine räthselhafte Art; was Marcgrave hier in drei Zeilen von ihm sagt, liegt allen nachherigen Beschreibungen einzig zum Grunde; auch hier ist die Abbildung (I. M. p. 249) noch völlig unbenutzt geblieben, wie denn überhaupt nie eine von ihm gegeben ist. Buf-

fon's Vermuthung, dafs dieser Vogel kein Amerikaner sei, weil er den Afrikanischen *Loris* so nahe träte, scheint mir ganz treffend, und bei dem lebhaften Verkehr, welches zu den Zeiten, wo die Holländer die Brasilischen Küsten beherrschten, zwischen diesen und ihren Afrikanischen Niederlassungen Statt fand, könnte auch dieser Vogel, wie so viele andere bereits genannte, wohl von dorther herüber gebracht sein.

Tarabe ist unter diesem Namen in die Systeme aufgenommen, doch auch seit Marcgrave nicht wieder gesehn. Die Abbildung (I. M. p. 247) zeigt noch manches, wovon in der Beschreibung nichts steht, z. B. einen kurzen, am letzten Drittheil schön rothen Schwanz. Gröfse und Gestalt sind die der gemeinen Amazonen.

Aiuru-catinga ist *Ps. Macavuanna*, wofür ihn noch Niemand erkannt hat, vielleicht weil ihm in der Beschreibung ein weifser Schnabel zugeschrieben wird, da er doch auf der schönen Abbildung (I. M. p. 241) einen schwarzen hat und dadurch mit obigem übereinstimmend wird. Buffon schöpfte die erste Notiz von diesem Vogel aus Barrere, und schrieb diesem unrichtigerweise die Entdeckung desselben zu.

Aiuru-apara. Die Abbildung (I. M. p. 239) widerspricht der kurzen Beschreibung, denn jene stellt deutlich eine Varietät des *Ps. ochrocephalus* dar, nur in etwas verjüngtem Maafsstab, da diese ihn einfarbig grün nennt.

Cap. X. p. 207.

Ipecu ist *Picus comatus* unseres Museums und der *Charpentier à dos blanc* von Azara; dafs Linné Unrecht hatte, ihn zum *lineatus* zu ziehn, lehrt die Abbildung (L. P. II. p. 188).

Urubu ist *Cathartes* (*Vultur*) *Aura*; schwerlich aber möchte man diesen Vogel in dem Holzschnitte, der die gute Abbildung (L. P. II. p. 254) verunstaltend copirt, wieder erkennen.

Tamatia. Die Beschreibung ist kurz genug, um Mehrerlei darauf deuten zu können, noch dazu von einem mangelhaften (nämlich schwanzlosen) Exemplare entnommen; es ist daher nicht zu verwundern, dafs Linné, diese Marcgravische Beschreibungen nach dem damaligen Umfang der Wissenschaft für viel erschöpfender haltend als sie sind, den ersten ähnlichen Vogel, der ihm aus Brasilien zukam, für diesen *Tamatia* nahm und in seinem System mit diesem Namen belegte; nun aber passen denn doch die

Merk-

Merkmale, die Marcgrave angiebt, im Ganzen nur sehr unvollkommen auf diesen Linnéischen Vogel, und es ist keinem Zweifel unterworfen, dafs der *Tamatia* von Marcgrave derselbe Vogel sei, den wir als neue Species aus Brasilien erhielten, und den Illiger mit dem Namen *Bucco somnolentus* belegte. Derselbe Name *Tamatia* bezeichnet nun gleich einen Vogel ganz anderer Ordnung, die *Cancroma cochlearia*, in der, wie man aus der Abbildung (L. P. II. p. 288) sieht, seltenern Abweichung, die ganz alten Thieren eigen zu sein scheint.

Guira-ienoia ist *Motacilla cyanocephala* als ganz alter Vogel.

Guiraru-Nhengeta. Alle Schriftsteller haben diesen Namen richtig auf *Lanius Nhengeta* Linné's oder eigentlich *Muscicapa Nhengeta* gedeutet.

Cap. XI. p. 209.

Zunächst einige Sumpfvögel. Mit dem oft für dieselben im Allgemeinen gebrauchten Namen *Çocoi* wird hier zunächst diejenige der grofsen Reiherarten genannt, welcher auch Linné und die übrigen Systematiker den Namen *Cocoi* gelassen haben; dann zweitens, ohne eigenen Namen, die Art von Rohrdommeln, welche in der letzten Ausgabe des Linnéischen Systems unter dem Namen *Ardea tigrina* beschrieben ist, ohne jedoch die Stelle von Marcgrave darauf zu beziehn. Die Abbildung, welche hier hinzugefügt ist, gehört nicht hieher, sondern zu dem vorigen *Cocoi.* Die Abbildung (I. M. p. 65) beweist dieses deutlich.

Guira-tinga. Ein ganz weifser Reiher; die Beschreibung eines andern sehr ähnlichen kommt am Ende dieses Abschnitts (p. 220) bei Marcgrave vor, und so finden sich auch zwei Abbildungen: die erste (I. M. p. 79) scheint mir zu dieser Stelle zu gehören, obgleich sie mit dem Namen *Guacara* bezeichnet ist, und die andere gröfsere (p. 81) führt den Namen *Guira-tinga.* Wenn sie wirklich unterschieden sind, so wäre die hier von Marcgrave abgehandelte am nächsten auf *Ardea Egretta* zu beziehn, die andere aber wohl für einerlei mit Brisson's *Ardea brasiliensis candida* zu halten, die bei uns *Ardea Leuce* heifst.

Ardeola ist, wie die mit der Beschreibung gut übereinstimmenden Abbildungen (I. M. p. 67 und L. P. I. p. 87, II. p. 232) lehren, unsere *Ardea scapularis*, Azara's *Héron à cou brun*, in welchen mehrere Linnéische Synonyme zusammenfallen.

Jacarini ist *Tanagra Jacarina* Linn.

Guira-tirica ist *Fringilla* (*Loxia*) *dominicana* Lin. Gm.

Guira-nheemgatu, eine Species von *Emberiza*, nämlich *E. brasiliensis* Linn., von welcher *E. ardens* Ill. wohl schwerlich verschieden sein möchte.

Cap. XII. p. 211.

Curucui stimmt wohl mit *Trogon Curucui*, dessen mit einem weifsen Halsbande versehene Abart nicht zu einer besondern Species zu erheben ist, wie Illiger gethan hat.

Caracara ist *Falco brasiliensis* Gm., eine freilich durchaus räthselhafte, ganz allein auf dieser Stelle bei Marcgrave beruhende Species, von der ich nur bemerken will, dafs sie nach der Abbildung (L. P. II. p. 212) am nächsten mit unserm *Falco rufus* verwandt ist.

Tijeguacu ist *Pipra pareola* (I. M. p. 125); doch gehört hieher keinesweges weder der Holzschnitt, welcher, wie aus Piso (p. 86) erhellet, die Taube *Piracuroba* vorstellt, noch die Abbildung bei Mentzel (p. 125), welche dem Weibchen von irgend einer *Tangara* zukommt. Zu jener *Piracuroba*, so wie überhaupt zu den vier schlechten Abbildungen bei Piso (p. 86), finde ich die Original-Abbildungen nicht.

Teitei ist *Tanagra violacea* Linn., wie man sie leicht aus der Abbildung (L. P. II. p. 208) erkennt; auch was Marcgrave von der Verschiedenheit der beiden Geschlechter anführt, trifft gut mit den Berichten neuerer Reisenden zusammen.

Guira-guacu-beraba ist ohne allen Zweifel *Matacilla Guira* Linn. Der Holzschnitt gehört nicht hieher, dagegen findet sich eine gute Abbildung (L. P. p. 168. Fig. 1.).

Guira-coereba, ebenfalls von Linné schon auf *Nectarinia* (*Certhia*) *cyanea* bezogen; die Abbildung (L. P. II. p. 166. Fig. 2.) führt den Namen *Çaii-curiba*.

Guira-perea ist *Tanagra flava* Linn.; der Abbildung (L. P. II. p. 166. Fig. 1.) ist der Name *Çaii-cupoucaya* beigefügt.

Japacani. Aus der Beschreibung schlofs Linné, dieser Vogel gehöre zur Gattung *Oriolus*, und unter dem Namen *Oriolus Japacani* steht er denn in allen Systemen. Neuerlich erst machte Latham einen *Turdus brasiliensis* bekannt, als neue Species, und dies ist unser Vogel, wie sich aus der Uebereinstimmung der Vögel in unserer Sammlung mit der Abbildung (L. P.

II. p. 162. Fig. 1.), wo er *Çabia-goacu* heifst, leicht beweisen läfst. *Oriolus Japacani* ist nunmehr auszustreichen.

Cabure. Strix brasiliana Lin. Die ganze Kenntnifs von diesem Vogel ist wieder allein aus dieser Stelle geschöpft. Die Abbildung (I. M. p. 195) ist noch neu und unbenutzt.

Cap. XIII. p. 213.

Macu-cagua ist *Crypturus (Tetrao) maior*, denn ihn zu einer eigenen Species zu erheben, dazu sind wohl nicht Gründe genug vorhanden. Azara's *Mocoicogoe* ist auf jeden Fall nahe mit ihm verwandt. Die Taubenart, deren dann als einer von der Insel St. Thomas nach Brasilien gebrachten Seltenheit gedacht wird, ist in die Systeme mit dem Namen *Columba Sancti Thomae* aufgenommen. Unter den Abbildungen von Tauben, die sich noch ohne nähere Bezeichnung unter unsern Materialien finden, ist keine, die ich hieher zu ziehn wagen möchte. Die darauf beschriebene Ente ist deutlich *Anas moschata:* die später in unsere Hühnerhöfe eingeführte sogenannte Türkische Ente. In der Mentzelschen Sammlung (p. 15) ist sie in der Färbung des wilden Vogels abgebildet, in der Sammlung des Prinzen aber (II. p. 250) schon in der weifsen und grauen Färbung, die sie in der Zähmung gewonnen hat. Dies ist das einzige Beispiel von Farbenänderung, das in der ganzen Reihe der vorliegenden Abbildungen und Beschreibungen vorkommt, und es verdient wohl bemerkt zu werden, dafs unter den Vögeln der Tropenwelt die Erscheinung des Weifswerdens, wie wir sie an vielen unserer einheimischen wilden Vögel (z. B. den Lerchen, den Sperlingen, Drosseln, Racken und Schnepfen) kennen, auch noch nicht in einem einzigen Beispiel bekannt ist.

Urubitinga. Diesen Namen, der eigentlich, wie Marcgrave auch selbst sagt, den schon oben erwähnten Aasgeyern zukommt, sehen wir hier auf einen Adler angewendet, von dem (L. P. I. p. 91) eine sehr gute mit der Beschreibung wohl stimmende Abbildung gegeben wird, von dem man aber auch in den Systemen bisher weiter nichts als den Namen *Falco Uribitinga* nebst dieser von Marcgrave gegebenen Notiz vorfand. Daudin wagt es deshalb noch nicht, diese Stelle auf einen im Pariser Museum befindlichen, aus Brasilien übersandten Falken anzuwenden, welchen er in seiner Ornithologie (II. p. 58) beschreibt. Da wir nun zu der Abbildung auch ein sehr wohl erhaltenes Exemplar, das auf das vollkommenste damit

übereinstimmt, besitzen, so kann ich die Frage dahin entscheiden, dafs Daudin's Falke zwar sehr nahe mit dem *Urubitinga* verwandt, aber doch durch die Haube, von der sich hier keine Spur findet, genug unterschieden ist.

Mareca ist *Anas bahamensis.*

Mareca alia species. Daraus ist in den Systemen *Anas brasiliensis* gemacht, die aber noch eine sehr zweifelhafte Species bleiben mufs, da sie hier dunkel beschrieben und in den vorliegenden Sammlungen nicht abgebildet ist.

Tije-guacu-paroara. Man hat diesen Namen immer zu *Fringilla dominicana,* die schon oben (p. 211) unter dem Namen *Guiratirica* gut beschrieben ist, gezogen, doch mit Unrecht, indem es keine Varietät, sondern eine constante specifische Verschiedenheit ist, wie uns etwas ähnliches von Azara über einen andern Verwandten dieses *Cardinals von Domingo* gelehrt wird. Diesen letztern unterschied schon Latham in seinem Supplement mit dem Namen *Loxia cucullata.* Dieser Marcgravische aber, dessen Verschiedenheit aus der Abbildung (I. M. p. 177), wo beide Geschlechter dargestellt sind, erst recht deutlich wird, hat Illiger mit dem Namen *Fringilla (Loxia) saucia* belegt; was aber Buffon unter dem Namen *Paroare,* mit Beziehung auf diese Stelle Marcgrave's, abbildet, ist nichts weiter als die ächte *Fringilla dominicana.*

Der folgende, hier als erste Art der Brasilischen Tangaras aufgeführte Vogel, führt auf der guten Abbildung (I. M. p. 125) abermals den eben für den Cardinal gebrauchten Namen. Es ist wohl ziemlich bestimmt *Tanagra Tatao* Linn., über deren wahre Verschiedenheit von *Tanagra tricolor* mir nach Betrachtung einer bedeutenden Menge von Individuen Zweifel entstanden sind, daher wohl beide Theile Recht haben können, nämlich auch die Andern, die die gegebene Beschreibung auf *Tanagra tricolor* beziehen. Die Abbildungen (zumal L. P. II. p. 182) passen besser zu *Tatao;* der Holzschnitt, der hier angefügt ist, gehört auf keinen Fall hieher.

Die zweite Species ist *Pipra erythrocephala*, und zwar die Varietät, die Gmelin unter β aufführt.

Cap. XIV. p. 215.

Anhima ist *Palamedea cornuta*, gut beschrieben und nach (L. P. II. p. 170) abgebildet; die Abbildung (I. M. p. 35) gehört zu den wenigen et-

was verfehlten, woran die gezwungene Stellung Schuld ist, die man dem Vogel gegeben hat, um auf dem engen Raum auch das Horn sichtbar zu machen.

Pitangua-guacu. Von Allen auf *Lanius Pitangua* oder richtiger *Muscicapa Pitangua* bezogen. Bei der grofsen Manchfaltigkeit nahe verwandter Formen, wie sie Brasilien aus dieser Abtheilung hervorbringt, läfst sich darüber nicht wohl streiten, sonst möchte man freilich den *Lanius sulphuratus* Linn. mit der nicht sonderlich genauen Beschreibung übereinstimmender finden; dann würde mit den beiden unter dem Namen *Cuiriri* bezeichneten Vögeln der ächte *Lanius Pitangua* und *Lanius* (*Corvus*) *flavus* gemeint sein können. Der Holzschnitt ist wieder durchaus fehlerhaft, und kann auf keinen Fall von der Abbildung (L. P. II. p. 252) copirt sein.

Atingaçu-camucu ist sehr deutlich *Cuculus cayanus* Linn. Es ist zu verwundern, dafs Brisson und Linné sich durch den elenden Holzschnitt verleiten liefsen, aus diesem Vogel, trotz der guten Beschreibung, die eigene Art *Cuculus cornutus* zu machen, die denn jetzt wegfallen mufs. Die Abbildung (I. M. p. 285. Fig. 1.) nennt diesen Vogel *Tingaçu.*

Guira-acangatara. Auf die gewöhnliche Weise ist auch dieser Vogel nach Marcgrave's Beschreibung zuerst von Willugbhy in seine Ornithologie aufgenommen, dann von Ray, nächstdem von Brisson, und von diesem auf Buffon vererbt, mit welchem gleichzeitig Linné und seine Schüler ihn in das System einführten. Wie es schon bei so vielen der obengenannten Vögel der Fall ist, so giebt auch hier ein jeder dieser Schriftsteller dem Vogel einen oder den andern Theil seines Brasilischen Namens und wiederholt die Marcgravische Beschreibung in kürzern oder längern Worten, ohne zur genauern Kenntnifs des Thiers, oder auch nur zur Aufklärung des in dieser ältesten Angabe Vorhandenen, etwas beizutragen. So ist denn der Artikel *Cuculus Guira* Linn., zusammt der Diagnose und der ganzen langen Reihe von Citaten, nichts mehr als was hier Marcgrave giebt. Ueber die wahre Eigenthümlichkeit dieses Vogels kann ich keine Rechenschaft geben, denn auch die Originalzeichnung (I. M. p. 286. Fig. 2.) läfst mich durchaus in Zweifel. Wir haben also nähern Bericht über die Existenz und die Eigenschaft dieses und vieler andern Marcgravischen Thiere von den jetzt in Brasilien beschäftigten Naturforschern noch zu erwarten. Zum Schlufs dieses Abschnitts noch eine Bemerkung über einen durch-

gängig vorkommenden, hier aber recht auffallenden Fehler, der darin besteht, dafs man sich auf Marcgrave's Maafse nicht verlassen kann, indem er theils ganz allein nach Fingern mifst, und darunter bald Fingerslänge, bald Daumenbreite versteht, theils aber in den Zahlen dieses Maafses ungemein sorglos ist, so dafs, wenn man danach zusammensetzen oder abbilden wollte, die wunderlichsten Gestalten herauskommen müfsten. Ich kann diesen Fehler bei dem sonst so treuen und in Angabe anderer Punkte so genauen Marcgrave nicht anders erklären, als dafs die Geheimschrift, in der er Alles aufzeichnete, für diese Maafse sehr undeutlich gewesen, und dafs es dem Doctor de Laet entweder nicht gelang, sie völlig zu entziffern, oder dafs er es für nicht wichtig genug hielt, darauf grofse Mühe zu verwenden.

Cap. XV. p. 217.

Wir finden hier zuerst den schon bekannten vieldeutigen Namen *Matuitui* wieder. In dem darunter beschriebenen Vogel haben Willughby, Brisson, Buffon und die ganze Reihe ihrer Abschreiber einen Eisvogel zu erkennen geglaubt (den Gmelin als *Alcedo maculata* in das System einführte), und sich dabei offenbar mehr von dem schlechten Holzschnitt, als der ziemlich guten Beschreibung leiten lassen, in welcher deutlich gesagt ist, die Spitze des Oberschnabels sei über die untere Spitze hergebogen. Hält man nun dieses Kennzeichen fest und vergleicht dann noch die Original-Abbildung bei Mentzel (p. 179. Fig. 2.), so überzeugt man sich aus den deutlichen Kletterfüfsen und dem ganzen Habitus bald, dafs man es hier mit einem Vogel aus der Gattung *Bucco* zu thun habe. Welche Species es dann sei, ist nicht leicht zu entscheiden. Man könnte sie, ohne grofsen Vorwurf zu besorgen, als bisher unbekannt mit einem neuen Namen in die Verzeichnisse einführen; doch würde ich dabei, seit ich den Farbenwechsel dieser Vögel einigermafsen kennen gelernt habe, immer Bedenken finden. Denn wenn ich von andern *Bucco*-Arten auf diese schliefsen darf, so ist es ein junger Vogel, und ich glaube mich nicht zu betrügen, wenn ich vermuthe, er sei das Junge von eben dem *Tamatia* p. 208, zu welchem der Holzschnitt nach einem schlecht ausgestopften und schwanzlosen Exemplar in Holland gemacht zu sein scheint, da eine in Brasilien nach dem Leben gezeichnete Abbildung dieses *Tamatia* in unsern Materia-

lien sich nicht findet. Vergleicht man beide Beschreibungen, die des *Tamatia* und *Matuitui*, genau mit einander, so findet man sie sehr übereinstimmend und wird geneigt, die des ersten dem Herausgeber, diese letztere aber dem wackern Marcgrave selbst zuzuschreiben. In dieser ist nun auch von der rostfarbnen Brust die Rede, die der alte *Tamatia* hat, die aber auf der Abbildung fehlt, weshalb ich diese eben auf ein jüngeres Individuum deute und auf diese Weise die Identität des *Matuitui* mit Illiger's *Bucco somnolentus* erweisen zu können glaube. Ich werde nachher noch einmal auf diesen Gegenstand zurückkommen müssen.

Aracari (*Ramphastos Aracari*); so gut beschrieben und abgebildet, daſs darüber nie Zweifel gewesen. Das Original zu dem Holzschnitt steht p. 186. L. P. II.

Tucana; eine sehr mangelhafte, undeutliche Beschreibung, die auf mehrere Arten zugleich sich anwenden läſst, auf keine aber ganz paſst. Die Abbildung (I. M. p. 59) löst allen Zweifel, indem sie ganz deutlich den *Ramphastos dicolorus* darstellt. In der Beschreibung muſs man nun statt *rostrum flavum* lesen *r. nigrum*, so paſst Alles. Dieser eine Fehler ist aber Schuld daran, daſs wir in den Systemen einen *Ramphastos Tucanus* haben, zu welchem Namen gar kein Vogel wirklich vorhanden ist. Er muſs also jetzt gestrichen werden.

Anhinga. Plotus Anhinga Linn.; Marcgrave beschreibt ein Junges, wie man aus der Angabe von den silberweiſsen Bauchfedern abnehmen kann. Die Abbildung (I. M. p. 11) gehört zu den mittelmäſsigen und ist in den Umrissen weniger getreu als der Holzschnitt. Eine andere viel bessere Abbildung (L. P. I. p. 153) stellt das alte Männchen (mit ganz schwarzem Hals und Bauch) dar. Daneben steht der Name *Migua.*

Ipecati-apoa. Eine Art von Gänsen, die trotz ihrer auffallenden Gestalt übersehen und von Niemand in das System gebracht worden ist. Buffon beschrieb zuerst eine ganz ähnliche unter dem Namen *Oie bronzée*, die von der Küste Coromandel gebracht war und als *Anas melanotos* in die 13te Ausgabe des Linnéischen Systems kam. In der That sind beide sich

so ähnlich, dafs man glauben könnte, auch dieser Vogel sei dem Prinzen Moritz vielleicht aus Ostindien übersandt und so von Marcgrave in seine Beschreibungen aufgenommen worden. Eines Bessern belehrt uns aber Azara, der unter dem Namen *Canard à crête* (No. 428) eine in Paraguay einheimische Gans beschreibt, welche nach allen Kennzeichen nichts andres als unsere *Ipecati-apoa* ist, wofür sie auch der Uebersetzer (Sonnini) sogleich erkennt. Ob wirklich dieses Thier in beiden Continenten zu Hause gehöre, oder ob man mit Illiger die Amerikanische Art als neue Species: *Anas caruncalata*, von der Coromandelschen unterscheiden soll, mufs für's erste noch dahin gestellt bleiben. In der Sammlung des Prinzen finden sich zwei Abbildungen dieses schönen Vogels, wovon die eine (II. p. 226) das Original des Holzschnitts im Marcgrave ist, das andre aber (II. p. 176) zu der kurzen Beschreibung gehört, die Marcgrave p. 219 folgen läfst. Er hält diese braunflüglige für das Männchen, die andre für das Weibchen; dafs er aber sich irrt, wissen wir nun aus Azara, der uns lehrt, dafs die Weibchen den Schnabelhöcker gar nicht haben. Die braunen Flügel kommen also den Männchen nur im höheren Alter zu. Uebrigens haben die beiden oben erwähnten Abbildungen den Namen *Potiri-guacu*, der eigentlich der Bisam-Ente angehört.

Nachdem nun ein monstroses Küken beschrieben worden, läfst der Herausgeber noch einige Notizen von Vögeln folgen, die er unter den Marcgravischen Papieren ohne Bezeichnung des Namens gefunden. Die erste bezieht sich auf einen dem *Matuitui* ähnlichen Vogel, und da Brisson einen dieses Namens, wie oben erwähnt, für einen Eisvogel gehalten, so hat man nicht angestanden, auch diesen dafür zu nehmen und unter dem Namen *Alcedo brasiliensis* raschweg in das System einzutragen. Nun aber giebt es mehrere Vögel, die *Matuitui* genannt werden, unter andern besonders Regenpfeifer. Ein solcher scheint hier gemeint zu sein, wie aus vielen Umständen, namentlich aus der Angabe seines Schreies, abzunehmen ist; doch wäre es eine eitle Anmafsung, bei der Kürze der Beschreibung und dem Mangel aller Hauptmerkmale einem solchen namenlosen Vogel auch nur die Gattung anweisen zu wollen, der er angehören müsse. Ein Eisvogel aber ist es gewifs

wiſs nicht, und *Alcedo brasiliensis* muſs eben so gut aus der Reihe der Vögelnamen getilgt werden, als die oben abgehandelte *A. maculata.*

Eben so wenig ist aus dem folgenden anoymen Vogel etwas zu machen und die Beschreibung enthält viel innern Widerspruch.

Der dritte, von dem Marcgrave aber doch wenigstens selbst angemerkt hatte, es sei ein Trogon, läſst ziemlich gut das junge Männchen von *Trogon Curucui* erkennen.

Dann ist noch wieder von einem Paradiesvogel die Rede, der ein andrer sein soll, als der oben beschriebene, in welchem man aber doch nur wieder die *Paradisea fulva* erkennen kann.

Der letzte aller hier aufgeführten Vögel ist, wie schon oben erwähnt, *Ardea Leuce* Ill. Sowohl Beschreibung als Abbildung (I. M. p. 81) stimmen vollkommen mit diesem bisher noch nicht in seiner Eigenthümlichkeit erkannten Vogel.

So sind denn diese aus den Marcgravischen Papieren zusammengestellten Notizen offenbar nur ein schwaches Abbild von dem, was er selbst bei längerem Leben geleistet haben würde, und ein Beispiel der beklagenswerthen Folgen, die der zu frühzeitige Verlust eines tüchtigen Gelehrten für die Wissenschaft herbeiführt.

Wieviel Irrthümer, wieviel leeres Muthmaſsen, wieviel Schwatzen und müſsiges Streiten wäre erspart worden, wenn Marcgrave selbst seine Beobachtungen hätte mittheilen und ordnen können! Es ist kein Zweifel, daſs sein Name jetzt neben den ersten Heroen der Wissenschaft genannt werden würde, da selbst durch die Miſshandlungen, welche sein Nachlaſs hat erfahren müssen, noch sein Verdienst so leuchtend hervorstralt. Ganz anders aber stände es jetzt um die Kenntniſs der Brasilischen Fauna, wenn seine Berichte von Anfang an klar und unverfälscht vorgelegen hätten; und besser auf jeden Fall, als in diesem Augenblick, wenn wenigstens die Original-Ab-

bildungen früher wieder aufgefunden und in die Hände geschickter Bearbeiter gefallen wären. Was diese nun noch über das Marcgravische Werk hinaus aus der Classe der Vögel Neues und Bemerkenswerthes enthalten, und wiefern solches auch jetzt noch zur Erweiterung und Berichtigung ornithologischer Thatsachen dienen könne, habe ich in einer Fortsetzung dieser Abhandlung vorzulegen.

Beschreibung

des

Gerippes eines Casuars (*Casuarii galeati*),

nebst

einigen beiläufigen Bemerkungen über die flachbrüstigen Vögel (*Aues ratitae*).

Von Herrn B. Merrem,
Korrespondenten der physikalischen Klasse *).

Aristoteles schliefst sein reichhaltiges Werk von den Theilen der Thiere damit, dafs er, veranlafst durch die Uebereinstimmung der Wallfische und Säugethiere im Athmen, die Aehnlichkeit der Robben mit den vierfüfsigen Säugethieren auf der einen, auf der andern Seite mit den Fischen zeigt; hierauf die Fledermäuse mit den vierfüfsigen Säugethieren und Vögeln vergleicht, und dann fortfährt: „Eben so hat der Straufs einige Theile von einem Vogel, andere von einem vierfüfsigen Thiere. Wie Nichtvierfüfser „hat er Flügel, wie Nichtvogel fliegt er nicht durch die Luft und hat „haarartige zum Fluge untaugliche Flügel. Wie ein Vierfüfser hat er obere „Augenlieder und, obgleich sein Kopf und der obere Theil seines Halses „kahl sind, haarige Wimpern; dagegen sind, wie bei einem Vogel, die un„teren Theile befiedert; er ist zweifüfsig wie ein Vogel, und hat gespaltene „Klauen wie ein Vierfüfser **)."

*) Vorgelesen den 13. Februar 1817.
**) *Part. anim. IV. cap.* 14.

Wenn schon Aristoteles dies bemerkte, was Wunder dann, wenn Fledermaus und Straufs einem Bonnet *) taugliche Bindungsglieder in seiner Stufenleiter, einem Hermann **) in seinem Wesennetze zwischen Vierfüfsern und Vögeln schienen. „*Et sane pedum structura*, sagt der letztere, *came-„linae subsimili, callo pectoris, sterno plano non carinato, genitali membro, clito-„ride* (diese Theile, die hier so genannt werden, hat er doch mit den Enten und anderen Vögeln gemein), *ventriculo isthmis intercepto, excremento-„rum forma, palpebra superiore mobili ciliata, cursu in terra, plumis decom-„positis pilorum aemulis, id quod in Casuario maxime obtinet, Mammalibus „accedit.*" Von diesen eilf Dingen, worin der Straufs sich den Säugethieren nähern soll, sind doch die Bildung der Füfse, die Brustschwiele und die Scheidewände des Magens nur besondere Bindungsglieder desselben mit der Gattung der Kameele. Ich kann diese Uebereinstimmung durchaus nicht leugnen; auffallend ist es mir aber immer gewesen, dafs diese Naturforscher die grofse Aehnlichkeit eines andern Säugethiers mit den Vögeln und insbesondere mit den Penguinen nicht bemerkt haben: eine Aehnlichkeit, welche die der Fledermäuse mit den Ziegenmelkern, der Straufse mit den Kameelen weit hinter sich zurückläfst, und doch ist dieses Säugethier ihnen so bekannt: es ist — der Mensch. Hier sind zehn allgemeine und fünf besondere Eigenschaften desselben, wodurch er sich den Vögeln und vorzüglich den Penguinen mehr nähert, wie irgend ein anderes Säugethier: 1) die Menschen und die Vögel gehen auf zwei Füfsen; 2) bei beiden sind die vorderen Gliedmafsen verhältnifsmäfsig sehr lang; 3) bei dem Menschen ist der Brustknochen breiter wie bei irgend einem anderen Säugethier; 4) seine Brust ist weiter; 5) Menschen und Vögel haben ein im Verhältnifs zum Körper grofses Gehirn, dagegen 6) ein kleines Rückenmark; 7) das Auge des Menschen ist vorn flächer als bei den übrigen Säugethieren, und so ist es auch bei den Vögeln; 8) Menschen und Vögel sind die einzigen Thiere, welche singen, welche 9) articulirte Worte sprechen; 10) die Menschen küssen, die Vögel schnäbeln sich. Und nun vollends mit den Penguinen sind die Menschen sehr nahe verwandt. Dadurch, dafs 11) beide einen einfachen Magen und 12) keinen Kropf haben; 13) beide nur gehen und schwimmen, nicht fliegen können; 14) beide auf den ganzen Fufs auf-

*) *Contempl. de la nature, liv. 3. chap. 27.*

**) *Tab. affin. p. 113. 131.*

treten, und 15) von beiden das gilt, was Ovid als unterscheidendes Kennzeichen (unstreitig des gehenden, nicht des schwimmenden) Menschen angiebt:

Pronaque cum spectent animalia caetera terram,
Os homini sublime dedit, coelumque tueri
Jussit et erectos ad sidera tollere vultus.

Ich habe hier blofs ein Beispiel geben wollen, wie man bei einiger oberflächlichen Kenntnifs, durch falschen Witz verleitet, Aehnlichkeiten und Verschiedenheiten finden, und sie zur Verbindung der unähnlichsten, zur Trennung der ähnlichsten Wesen in Systemen anwenden könne. Nicht einzelne Theile, nicht besondere Eigenschaften können und dürfen für sich allein den ordnenden Naturforscher leiten, die Vergleichung aller und insbesondere der wichtigsten, auf die ganze Bildung, das ganze Leben den gröfsten Einflufs habenden, mufs stets ihm vor Augen schweben. Die Wesen lassen sich nicht nach Leitern und Netzen, aber eben so wenig nach festgestellten Gesetzen einer logischen Disposition ordnen. Weit richtiger verfuhr der tiefsehende Ray wie der scharfsichtige Linné, dessen System der Thiere, so wie fast alle neuere, sich der Natur deswegen nie anschliefsen, ihr nie entsprechen konnte, weil er annahm, die Thiere müfsten in Klassen, diese in Ordnungen, diese in Gattungen und Arten, wie Soldaten in Compagnien, Bataillons, Regimenter, Brigaden, gestellt werden. Die Grade der Verwandtschaften und Unähnlichkeiten sind hier so, dort anders. Die Amphibien sind den Säugethieren und den Vögeln ungefähr gleich nahe, und näher verwandt wie die Fische, aber den Fischen ähnlicher als Säugethiere und Vögel. Die Wallfische sind mit den vierfüfsigen Säugethieren durch mehrere übereinstimmende Theile und Eigenschaften näher verbunden, als mit irgend anderen Thieren, aber doch mit keinem derselben so genau durch so viele Aehnlichkeiten, wie die unähnlichsten derselben es unter sich, wie Fledermaus und Pferd, Affe und Ochs es sind. Gleichwohl sehen wir hier fast überall nur Klassen und nur Ordnungen, höchstens Familien in unsern Systemen. Es wäre zu wünschen, dafs besondere Namen für diese Grade der Verwandtschaften erfunden würden, welche diese Verhältnisse anzeigten, und wobei manchmal deutliche Spuren von Kette oder Netz sich zeigen, die gleichwohl immer abgebrochen dastehn.

Bei allen Aehnlichkeiten, welche man zwischen dem Straufs und den Säugethieren angab, wodurch er dem Aristoteles schon als Mittelglied

erschien, ist er doch von den übrigen Vögeln bei weitem nicht so sehr unterschieden, als die Wallfische von den Säugethieren, vielleicht nicht mehr, wenigstens nicht viel mehr, als Affe und Ochs unter sich.

Erst im sechszehnten Jahrhundert wurde der in Rücksicht seines inneren und äufseren Baues dem Straufse sehr ähnliche Casuar, und etwas früher der ihm wahrscheinlich eben so nahe, vielleicht noch näher verwandte Nandu bekannt, und am Ende des vorigen noch eine Casuarart entdeckt. Diese Vögel, wenn sie gleich mehrere Gattungen bilden, sind doch zu nahe unter einander verwandt, als dafs man sie nicht alle als zu einer Ordnung gehörig betrachten müfste, zugleich aber von den übrigen Vögeln zu sehr verschieden, um sie nicht weiter von ihnen zu trennen, als diese unter sich getrennt werden. Ich bilde daher eine eigene Abtheilung derselben daraus, die ich, wegen des mangelnden Kiels auf dem Brustknochen, flachbrüstige Vögel (*Aves ratitae*) nenne, im Gegensatz der übrigen mit einem Kiele versehenen, denen ich den Namen kahnbrüstige Vögel (*Aves carinatae*) gebe.

Linné stellte die flachbrüstigen Vögel in der ersten und sechsten Ausgabe seines Natursystems unter die Hühner (*Gallinae*), in der zehnten und zwölften unter die Sumpfvögel (*Grallae*). In der ersteren Meinung stimmten Hill, Donndorf, Batsch, Bechstein, Suckow und Gmelin, in der letzteren Scopoli, Cuvier und Illiger ihm bei, der letztere jedoch nur in so fern, als er sie mit den Linnéischen Gattungen *Otis*, die eine besondere Familie bildet, *Charadrius* und *Haematopus* in eine einzige Ordnung, doch auch als abgesonderte Familie, stellt. Diejenigen Systematiker, welche diese Vögel von den übrigen trennten, Willughby, Möhring, Brisson, Büffon, Leske, Blumenbach, Pennant, Latham, Batsch, Cuvier, vereinigen sie alle mit dem noch immer zweifelhaften Dronten, und selbst einige, wie Leske, mit den Trappen. Dafs sie von diesen so wie von jenem und überhaupt von allen Vögeln sich sehr wesentlich unterscheiden, wenn sie gleich mit denen, womit man sie verband, in einigen Eigenschaften übereinstimmen, wird aus dem Folgenden erhellen.

Die flachbrüstigen Vögel haben einen im Verhältnifs zum Körper kleinen Kopf, langen Hals, lange Beine mit unterhalb nackten Schienbeinen, mit einer lederartigen Haut bekleidete Füfse, wie die Sumpfvögel; aber kurze, stumpfe, schwachgekrümmte Krallen wie die Trappen und Hühner. Auch in Rücksicht des Schnabels stimmen sie mit diesen überein: er

ist ziemlich kurz, halb elliptisch, gerade, die obere Kinnlade etwas länger wie die untere, und die ihn bedeckende Haut hält zwischen dem Lederartigen und Hornartigen das Mittel. Dagegen liegen ihre Nasenlöcher weit nach vorn, wie bei den Sumpfvögeln, und sind offen. Die Zunge ist fleischig. Der Schlund ist sehr weit und ohne Kropf, bildet aber einen grofsen mit Muskelfasern umgebenen Vormagen, der sich um den grofsen, weiten, wenig muskulösen Magen herumschlingt, und von unten in ihm öffnet, wodurch sie mehrere Magen zu haben scheinen. Ihre Därme sind mäfsig lang, die Blinddärme aber, wie bei Hühnern, Eulen u. a., sehr lang. Das Auge ist mit grofsen Augenliedern und diese sind mit haarigen Wimpern versehn. Ihre Federn haben so weite Stralen, dafs die Fasern derselben den folgenden Stral nicht berühren, und ihre Schwungfedern und Ruderfedern (wenn diese letzteren nicht fehlen) sind ganz von derselben Beschaffenheit wie die anderen Federn, oder auch ohne Stralen, und daher zum Fliegen untauglich. Auch sind ihre Flügel, wenn wir die Penguinen und Alken ausnehmen, verhältnifsmäfsig weit kürzer wie bei den übrigen Vögeln, bestehen aber übrigens aus denselben Knochen; dagegen fehlen ihnen die Schlüsselknochen und die Gabel *), deren Stelle nur sehr unvollkommen durch eine Verlängerung und Erweiterung des Schulterblattes ersetzt wird. Hierdurch, so wie durch den Mangel des Kiels am Brustknochen, unterscheiden sie sich von allen Vögeln, deren Knochenbau bis jetzt untersucht ist, und lassen in dieser Rücksicht auch eine Verschiedenheit im Bau der Brustmuskeln und der an den genannten Knochen bei anderen Vögeln befestigten Muskeln erwarten. Es ist sehr zu wünschen, dafs die Penguinen auch in dieser Rücksicht näher untersucht werden möchten, so wie, dafs ein Zergliederer, welcher Gelegenheit dazu hätte, uns eine Myologie der flachbrüstigen Vögel lieferte. Obgleich sie nun diese Einrichtung Gottes zum Fliegen unfähig macht, so sind sie doch wie die fliegenden Vögel mit Luftsäcken, Luftblasen und hohlen Knochen versehen; selbst ihre Schenkelknochen, die doch bei den Hühnern mit Mark angefüllt sind, sind hohl, nur die Oberarmknochen voll Mark. Aufserdem unterscheiden sich die flachbrüstigen Vögel durch die grofse Zahl der Heiligenbeinwirbel, die sich auf zwanzig erstreckt, und ihr zusammengedrücktes Becken von allen

*) Hr. Blumenbach irret also, wenn er Geschichte und Beschreibung der Knochen S. 365 und Handbuch der vergleichenden Anatomie S. 589 diese Knochen allen Vögeln zuschreibt.

übrigen Vögeln. Auch in ihrer Lebensart haben sie viel Eigenthümliches. Sie leben auf dem Trocknen und ernähren sich vorzüglich von Pflanzen, deren Theile sie ohne Ausnahme verschlingen, Körnern, Gras, Heu, Blättern und selbst Holz. Auch Insekten, Fleisch und Eier sind ihnen willkommen. Die Verdauung zu befördern verschlingen sie Steine, selbst Metall und glühende Kohlen, wenn sie diese erwischen können *). Sie laufen äuſserst schnell, wobei den Strauſs und Nandu ihre Flügel unterstützen, und vertheidigen sich durch Schlagen mit den Füſsen. In ihren kunstlosen oder vielmehr keinen Nestern an der Erde legen sie so viele Eier, daſs es wahrscheinlich ist, daſs mehrere Weibchen, die alle zu einem Männchen gehören, in Ein Nest legen. Sie brüten dieselben gemeinschaftlich aus, verlassen aber, wie es scheint, sie am Tage oft auf längere Zeit.

Die flachbrüstigen Vögel unterscheiden sich demnach von allen Vögeln durch ihr Brustbein, den Mangel der Gabel und der Schlüsselknochen, das Heiligenbein, das Becken, ihre Federn und ihren Vormagen. Auſserdem unterscheiden sie sich — vom Dronten, wenn anders dieser kein erdichteter Vogel ist **), durch ihren Schnabel, den kleinen Kopf, den langen Hals, die langen Beine, die fast nackten Schenkel, ihre Schnelligkeit und Fruchtbarkeit — von den Hühnern ebenfalls durch den Hals, die Schenkel, die Füſse, die offenen Nasenlöcher, den mangelnden Kropf, den weiten Vormagen, den wenig fleischigen Magen, die hohlen Schenkelknochen und markerfüllten Armknochen — vom Trappen durch die Lage der Nasenlöcher, den weiten Schlund, den gröſsern Vormagen und ihre Fruchtbarkeit; immer sind sie indeſs diesem letztern am nächsten verwandt; doch gewiſs durch die angeführten Eigenschaften, insbesondere diejenigen, welche sie von allen Vögeln trennen, zu sehr verschieden, als daſs sie nicht als eine eigene für sich bestehende Ordnung und selbst Abtheilung sollten angesehen werden müssen.

Da die wesentlichsten Verschiedenheiten der Erdvögel von den andern Vögeln in ihren Knochen bestehen, so hoffe ich, daſs es manchem angenehm seyn wird, wenn ich hier die Beschreibung und Abbildung des Gerippes eines jungen Casuars mittheile, welche mir Herr Geheimer Rath von

*) Eben dieses habe ich von Gänsen gesehen.

**) Der Kopf, dessen Abbildung Shaw geliefert hat, gehört wahrscheinlich einem Albatros, der Fuſs einem hühnerartigen Vogel.

von **Sömmerring** vor mehreren Jahren auf einige Zeit mitzutheilen die Güte hatte. Zwar hat Hr. **Cuvier** schon die Abbildung eines Casuargerippes *) und über einzelne Knochen desselben wichtige Bemerkungen geliefert; aber jene Abbildung ist zu klein, um ganz brauchbar seyn zu können, und diese Bemerkungen sind, wie es der Zweck nicht anders seyn konnte, zerstreut durch mehrere Bände seines unschätzbaren Werkes. Eine vollkommene Beschreibung mufs man aber auch hier nicht erwarten, da ich mit fremdem nicht wie mit eigenem Eigenthum schalten, und daher das Gerippe und vorzüglich den Kopf nicht auseinander nehmen konnte; überdies war meine Kenntnifs vom Gerippe der Vögel damals, als ich die Beschreibung verfertigte, noch sehr mangelhaft, und vieles kann ich jetzt, da ich das Gerippe selbst nicht mehr vor mir habe, nicht ergänzen oder verbessern.

Die Nähte der Kopfknochen waren an dem jungen Gerippe noch nicht verwachsen, und wenn sie gleich die Jugend des Vogels bewiesen, von dem es abstammte, so bewiesen sie doch auch zugleich, dafs bei diesen Vögeln das Verwachsen derselben langsamer wie bei andern von Statten gehe. Wäre vom alten Casuar ein Kopf dabei gewesen, so würde sich ergeben haben, ob sie bei dem Casuar überhaupt verwachsen oder nicht. Da ich die einzelnen Knochen also deutlich unterscheiden konnte, so will ich auch darnach ihre Beschreibung vornehmen.

Da der Schnabel und die Stirn noch ganz mit ihrer hornartigen Bedeckung versehen waren, so erlaubte mir diese nicht, das unter ihr Verborgene zu untersuchen. Von den **Stirnknochen** (Fig. 3. 4. 5. C.) konnte ich daher nur den hinteren Theil erblicken, und hier bemerken, dafs sie eine Harmonie vereinige. Die Kronennaht bildete nicht, wie bei anderen Vögeln, einen nach vorn, sondern einen nach hinten hohlen Bogen, krümmte sich dann wieder vorwärts und endigte sich an der vordern Kante des Augenfortsatzes. Von unten bildet dieser Knochen die obere Decke der Augenhöhle (G), und in dieser das grofse Loch für die Gesichtsnerven (l) und das kleinere für die Geruchsnerven (m).

Die **Scheitelknochen** und **Schläfeknochen** (B) waren aufs vollkommenste untereinander verwachsen und gar nicht von einander zu unterscheiden. Beide Scheitelknochen sind, statt durch die Pfeilnaht, durch eine Harmonie vereinigt. Die lambdaförmige Naht ist dagegen schwach gezäh-

*) *Leçons d'Anat. comp. tab. 2.*

nelt. Sie sind oben ziemlich stark gewölbt. Der Augenfortsatz (K), dessen vorderer Theil an seiner Basis vom Stirnknochen gebildet wird, ist ziemlich kurz, aber breit; sein vorderer Rand besteht aus zwei convexen, der hintere aus einem concaven Bogen, der sich in Gestalt einer halbkreisförmigen Kante bis zum Ohrenfortsatz (i) hinzieht. Dieser ist sehr lang, so dafs er fast bis zur Unterkinnlade reicht, und hat ebenfalls hinten eine concave, vorn eine convexe Kante, die sich aber in der Mitte bucklich erhebt.

Der Nackentheil des Hinterhauptknochens (A) ist breit, und in seiner Mitte ragt der fast fünfseitige Hinterhauptshügel (a) stark hervor, und ist durch scharfe Kanten von der zu jeder Seite neben ihm gleichsam eingesenkten unregelmäfsigen, dreiseitigen, rauhen Fläche (b), die vermuthlich zur Anlage von Nackenmuskeln dient, getrennt. Neben demselben liegt wieder hervortretend der Warzenfortsatz (c), welcher nicht so tief wie der Ohrenfortsatz hinabsteigt, von hinten betrachtet die Form eines Kelches hat, und unten abgerundet ist. Der Hinterhauptshügel endigt sich über dem Hinterhauptsloche (f) in eine hohle, bogenförmige, am Rande dieses Loches selbst vertiefte Kante (i). Der Knopf (d) ist grofs, und schien noch aus drei Theilen zu bestehen. Der Grundfortsatz (e) ist nicht so dreieckigt wie bei anderen Vögeln, sondern seine Winkel sind mehr abgerundet. Er ist in der Mitte vertieft, und der erhabene Theil erhält dadurch fast ein pfeilförmiges Ansehn.

Der Keilknochen (HI) bildet da, wo er an den Grundfortsatz anstöfst, durch seine beiden hinteren Aeste, welche sich bei anderen Vögeln an die vorderen Ränder des Grundfortsatzes anlegen, die Form eines lateinischen T oder eines Kreuzes (h), indem seine Aeste, welche an ihrer Basis viel breiter als an ihren Enden sind, sich fast rechtwinklich von seinem unteren Rande (I) entfernen. Auch wird dieser untere Rand nach hinten verhältnifsmäfsig viel dicker, und ist daher kegelförmiger wie bei anderen Vögeln. Die Scheidewand (H) der Augenhöhlen bestand aus zwei Stücken, die ein grofses unförmliches Loch zwischen sich offen liefsen. Wahrscheinlich ist sie aber beim ausgewachsenen Vogel ganz verschlossen.

Der Thränenknochen (F) des Casuars besteht aus zwei Armen, nämlich dem herabsteigenden, welcher bei ihm bis zum Jochknochen geht, und dem Augenbrauntheile. Beide Arme sind in der Mitte schmal, an ihren beiden Enden aber breit, und so gegen einander geneigt, dafs sie zusammen

einen Knochen bilden, dessen Gestalt zwischen einem lateinischen C oder griechischem Γ das Mittel hält.

Der gemeinschaftliche Kieferknochen (D) hat einen sehr breiten Körper, und sein Augenfortsatzt ist gleichfalls sehr breit und vorne abgerundet.

Der Verbindungsknochen (L) jeder Seite ist platt, hat hinten ein verdünntes Ende, bildet an seiner innern Seite einen mit dem vordern Rande des Kielbeinarmes gleichlaufenden convexen, an der äufsern Seite einen minder stark gekrümmten concaven Bogen. Hier ist die dünne Platte des Gaumenknochens an ihn befestigt, vorn läuft er spitz zu und vereinigt sich da mit dem Stiele des Gaumenknochens (K). Herr Cuvier beschreibt ihn so *): „*Dans le Casoar il (l'os omoïde) est uni par son bord externe et dans plus des deux tiers de sa longueur avec le bord postérieur de la pièce mince et large des arcades palatines; en dedans il est arrondi, épais, et singulièrement courbé; en arrière, en dessus, et près de son extrémité, il porte une cavité articulaire alongée, par laquelle il s'unit à une éminence particulière, qui provient de l'apophyse basilaire.*" (Diese *éminence* ist offenbar das Kreuz des Keilknochens.)

Die Zwischenkieferknochen, die Oberkieferknochen, die Nasenknochen und den Siebknochen bedeckte die hornartige Haut des Oberschnabels, doch liefs sich durch dieselbe noch bemerken, dafs die Gaumenknochen wie ein Paar breite Platten (N) unter der Spitze des Zwischenkieferknochens entspringen, und hier einen nach hinten zugespitzten Raum zwischen sich offen lassen. Die Gaumenknochen bestehen, wie bei den Krähen, Hühnern u. a., aus einem Stiele und einem dünnen Blatte, aber nach ganz andern Gesetzen gebildet. Die breiten Platten an der Spitze des Schnabels laufen nach hinten in einem spitzen Winkel zusammen, und verlängern sich in die beiden dünnen Stiele (K), welche da, wo sie sich dem untern Rande der Scheidewand (I) nähern, die bei allen mir bekannten Vögeln vorhandene obere Rinne zum Umfassen dieses unteren Randes der Scheidewand, so wie die untere Rinne bilden. Dann entfernen sie sich sehr spitzwinklig von einander und vergliedern sich mit dem Verbindungsknochen. Nahe an ihrem hinteren Ende breiten sie sich nun, nicht an der innern, sondern an ihrer äufsern Seite, in zwei dünne, fast dreieckige Knochenblätter (Ko) aus, welche sich nach hinten bis dahin erstrecken, wo der

*) *Leçons d'Anatom. comp. III. p. 67.*

concave äuſsere Rand des Verbindungsknochens anfängt, und bis dahin sind sie auch mit denselben durch eine Harmonie verbunden. Ihr äuſserer Rand ist an der hintern Spitze etwas concav, dann convex gebogen, und befestigt sich nach vorne an die Jochknochen. Ihr vorderer Rand ist ein hohler gezähnelter Bogen, und durch Knochenhaut (oo) verlängert. Diese Platten steigen nach vorn hin schräg in die Höhe.

Die Jochknochen (P) sind gerade, ziemlich stark, und hinten, nahe an der Stelle, wo sie sich mit dem gemeinschäftlichen Kieferknochen vergliedern, kolbenförmig dicker.

Die Unterkinnlade (O) zeigt nichts auszeichnend Merkwürdiges.

Der Hals besteht mit den Trägern aus funfzehn Wirbeln *). Der Träger (Fig. 1. 1.) ist der kleinste von allen und stellt einen elliptischen Ring dar, der mit einem schmäleren Kopfe versehen ist, welcher die rundliche Pfanne für den Kopf des Hinterhauptknochens enthält. Der zweite Wirbel (2) ist schmäler, aber sein Durchmesser von vorn nach hinten gröſser wie beim Träger. In der Mitte ist er am schmälsten. Sein Körper hat vorne eine Kante oder eine Art von Kamm. Der Bogen bildet zwei Gelenkschenkel, und hinten eine starke keilförmige Kante, welcher aber der Name eines Dornfortsatzes nicht gegeben werden kann. Die übrigen Halswirbel (3=15) sind von derselben Beschaffenheit wie bei den mehrsten anderen Vögeln. Ihre Zacken sind sehr laug, bei den obersten gröſstentheils dünner und spitzer wie bei den untersten, doch sind sie auch bei dem dritten und vierten breiter und dicker wie bei dem zunächst folgenden. Diese Wirbelknochen nehmen an Länge und Breite zu, jemehr sie sich den Rückenwirbeln nähern. Der dritte, vierte und fünfte Halswirbel haben einen stumpfen Dornfortsatz, der auf dem dritten am längsten ist, nachher abnimmt, und bei den übrigen Halswirbeln nur eine scharfe Kante darstellt; auch wird ihr Bogen allmählig niedriger. Bei dem eilften bis zum funfzehnten Wirbel werden die Queerfortsätze, die den Rüchenwirbeln eigen sind, schon merklich, und haben die Gestalt eines breiten Kopfes; ja bei dem funfzehnten Wirbel scheint sich sogar der Zapfen in eine Art ungegliederter Rippen (A) zu verwandeln, und ist breit und stumpf.

*) Herr Blumenbach schreibt ihm, Geschichte und Beschreibung der Knochen S. 289, siebenzehn Wirbel zu; Herr Cuvier fand gleichfalls nur funfzehn. *Leçons d'Anat. comp. I. p.* 168.

Von den eilf Rückenwirbeln gleichen die beiden ersten den letzten Halswirbeln, und bei den beiden letzten kann man, wie überhaupt bei den Vögeln, zweifelhaft seyn, ob man sie nicht lieber zu den Wirbeln des Heiligenknochens zählen wolle. Nur die Rippen, denen sie zur Befestigung dienen, zwingen uns, sie zu den Rückenwirbeln zu rechnen. Das einzige, wodurch die beiden ersten Rückenwirbel sich in der Bildung von den Halswirbeln unterscheiden, sind die flächere Lage ihrer Queerfortsätze und die vorn am Körper des Wirbels befindlichen zwei kleinen kammförmigen Erhöhungen, welche bei den folgenden Wirbeln stärker sind, und sich bereits beim dritten in einen einzigen Dornfortsatz vereinigen, welcher bei dem vierten Wirbel am höchsten, bei dem fünften schon niedriger ist, bei den folgenden nur noch wie eine scharfe Kante erscheint und beim neunten Wirbel gänzlich verschwindet. Die Queerfortsätze nehmen nach hinten immer an Gröſse zu, und der eigentliche Dornfortsatz, welcher beim zweiten Rückenwirbel schon etwas merklich ist, bildet auf den folgenden eine flache, schiefe, länglich-viereckige Erhöhung, die immer mehr sich erhebt und auf dem neunten Wirbel am höchsten ist. Der zehnte Wirbel (Fig. 8. 9. 10. a. b.) ist schon vom Darmknochen eingeschlossen, gleicht aber, so wie der eilfte (c), den Rückenwirbeln vollkommen. Diese beiden Wirbel sind noch deutlich von einander getrennt, der letzte scheint aber schon mit dem ersten Wirbel des Heiligenknochens verwachsen zu seyn.

Das Becken ist äuſserst sonderbar gebildet, und weicht, so wie das Becken des Strauſses, darin vom Becken aller übrigen Vögel sehr wesentlich ab, daſs die Darmknochen fast ganz senkrecht sind und dadurch das Becken sehr stark zusammengedrückt erscheint. Ueberdem ist es wegen der verhältniſsmäſsig groſsen Zahl von Heiligenknochenwirbeln bei diesen Vögeln weit länger wie bei irgend einem andern. Die obere Fläche des Heiligenknochens (A), und mithin des ganzen Beckens (da der hintere Darmtheil eben so senkrecht wie der vordere herabsteigt), ist viertelkreisförmig gekrümmt, und vorne, wo der Dornfortsatz (a) des zehnten Rückenwirbels (b) hervorragt, breiter, wird dann äuſserst schmal, darauf wieder breiter, so daſs sie über der Pfanne am breitesten ist, wird dann wieder schmäler, erweitert sich von Neuem gegen den Steiſs hin, und endigt sich, indem sie sich wieder verengert, in zwei kurze stumpfe Spitzen. Von der Pfanne bis zur hinteren Erweiterung ist der Heiligenknochen des jungen Gerippes bloſs mit Knochenhaut bedeckt, unter welcher man deutlich zwölf Dornfortsätze

eben so vieler Kreuzwirbel erkennt. Von unten kann man zwanzig (nach Herrn Cuvier *) nur neunzehn) Heiligenknochenwirbel vermittelst der Löcher zwischen den Queerfortsätzen unterscheiden: nämlich sechs Lendenwirbel bis zur Pfanne und vierzehn Kreuzwirbel. Die beiden Platten, welche den Darmknochen ausmachen, sind sehr dünne. Der vordere Theil (Ca) hat vorn einen breiten ausgeschweiften, unten einen wie ein langes lateinisches ſ gebogenen Rand, ist vorn am breitesten und bedeckt die Köpfe der beiden hintersten ungegliederten Rippen. Weiter rückwärts ragt er nicht über die Queerfortsätze der Heiligenknochenwirbel hervor. Ueber der Pfanne (F) bildet er mit dem Aftertheile eine stumpfe Kante. Der hintere Theil (Cb) ist vorn am breitesten, darauf mehr ausgehöhlt, und ragt mit seinem Rande etwas vor der Unterfläche des Heiligenknochens hervor. Die Pfanne (F) ist eine tiefe, fast halbkugelige, mit einem grofsen kreisförmigen, nach hinten und unten liegenden Loche (G) versehene Höhle. Hinter derselben, etwas höher wie sie, liegt der dicke nierenförmige Kopf (E) des Sitzknochens, dessen hinterer Schenkel (D) so lang wie der Aftertheil ist, oben eine scharfe Kante hat, und an seinem hinteren Ende, mit dem er bei dem alten (nicht beim jungen) Gerippe mit dem Aftertheil des Hüftknochens verwachsen ist, breiter wird. Er bildet mit diesem Aftertheile das grofse Hüftloch, welches bei dem Gerippe des jungen Casuars, bis auf eine kreisförmige Oeffnung gleich hinter der Pfanne, mit Knochenhaut verschlossen ist. Der hintere Schenkel des Sitzknochens hat noch gleich hinter seinem Ursprunge an seinem unteren Rande einen stumpfen Fortsatz (e), der bis zum Schaamknochen reicht. Der Schaamknochen (H) ist ein dünner, schwach doppelt gebogener, am hinteren Ende nach unten etwas breiter werdender Knochen, der vorwärts unter der Pfanne entsteht und nicht ganz bis zu Ende des Sitzknochens reicht. Die Enden beider Schaamknochen sind nicht, wie beim Strauſse, vereinigt, sondern weit von einander entfernt.

Die sieben Kuckuckswirbel sind dichte, walzenförmige, nur an den Gelenken etwas dickere Knochen, mit stumpfen, knopfförmigen Dornfortsätzen, kleinen, stumpfen Queerfortsätzen, und einer kleinen runden Oeffnung zwischem dem Körper und dem Dornfortsatze. Der Schwanzknochen ist unregelmäfsig, stumpfkegelförmig.

*) A. a. O. I. Seite 168.

Zähle ich den rippenförmigen Zapfen des funfzehnten Wirbels nicht mit, so hat der Casuar vorn vier einfache oder ungegliederte Rippen, vier wahre und eine falsche gegliederte, und zwei hintere einfache, also in Allem eilf Rippen. Von den vorderen ungegliederten Rippen ist die erste die kleinste, die vierte die längste, und fast eben so lang wie die erste der gegliederten, welchen auch diese Rippen vollkommen ähnlich sind, aufser dafs ihre Enden, besonders bei den drei vorderen, spitzer zulaufen. Von den gegliederten Rippen sind die vier wahren fast gleich grofs, die falsche ist aber merklich kürzer. Gleich unter ihrem Halse sind sie stark und zwar so stark gekrümmt, dafs die ohnehin nicht weite Brusthöhle am Ende dieser Rippen wie eingedrückt erscheint (Fig. 2). Ihre Breite ist ihrer ganzen Länge nach fast gleich, nur gegen ihren Höcker hin werden sie breiter, und nach hinten dünner, wodurch sie daselbst einen schneidenden Rand haben. Ihr Höcker ist ziemlich breit und bildet eine ziemlich flache Höhle zum Gelenk mit der convexen Fläche der Queerfortsätze der Rückenwirbel. Ihr Hals ist lang und zwischen ihm und dem Höcker eine tiefe eiförmige Oeffnung zum Hineindringen der Luft. Sie haben alle, aufser der ersten, den Rippenhaken, der nicht so lang ist, dafs er auf die jedesmalige hintere Rippe sich auflegen könnte. Er hat eine rautenförmige Gestalt. Die Anhänge oder die zweiten Glieder der Rippen sind schwammiger und fasriger wie die übrigen Knochen, in der Mitte am dünnsten, und da, wo sie an den Brustknochen anschliefsen, breit. Der Anhang der ersten Rippe ist der kürzeste, die der vierten und fünften sind die längsten; der letztere reicht aber nicht bis an den Brustknochen, sondern ist am vierten Anhang befestigt. Der erste Anhang ist gerade, die folgenden sind immer stärker und stärker gebogen. Die beiden hinteren einfachen Rippen gleichen ebenfalls den gegliederten, nur sind sie schmäler, und, vorzüglich aber die letzte, kürzer und minder gekrümmt; auch fehlt ihnen der Haken.

Der Brustknochen (Fig. 11, 12, 13) hat einen kelchförmigen Umfang, ist vorn breit, und daselbst mit einer hervorragenden Spitze versehen. Hinten endigt er sich bei dem ausgewachsenen Gerippe in eine stumpfe Spitze, bei dem jüngern aber, dessen Verknöcherung noch nicht ganz vollendet war, in zwei Halbkreise auf diese Art: ⌒⌒. Er ist wenig gewölbt und vorn am dicksten. Ein Kiel ist gar nicht vorhanden, sondern im Gegentheil der Brustknochen an der Stelle desselben, nämlich in

der Mitte, der Länge nach flächer. An der äuſsern Oberfläche des Brustknochens ragt an jeder Seite, wie bei den mit Schlüsselknochen versehenen Vögeln, etwas hinter dem vorderen Rande, eine scharfe Kante (a) hervor, welche die Rinne zur Aufnahme des Randes der Schulterblätter und die Gränze der vorderen Seitenfortsätze bildet. An der Spitze des Brustknochens befindet sich eine weite, tiefe Höhle zum Eindringen der Luft. Der äuſsere Rand der vorderen Seitenfortsätze ist sehr dick und hat einen spindelförmigen Umriſs. Er würde eine einzige an beiden Enden verschlossene Grube seyn, wenn nicht drei Scheidewände (b), deren jede gewissermaſsen zwei Gelenkknöpfe für die Rippenanhänge bildet, queer über die Grube lägen, und mithin statt Einer Grube vier Oeffnungen erschienen, welche mit weniger lockerer Diptor etwas verschlossen sind. Die wahrscheinlich zur Aufnahme von Luft bestimmte Höhle erstreckt sich von diesen Oeffnungen bis beinahe zur Mitte des Brustknochens.

Schlüsselknochen und Gabel fehlen gänzlich, aber gewissermaſsen vertritt das Schulterblatt (Fig. 6.) ihre Stelle, indem es beinahe die Gestalt einer Schaufel hat, deren Stiel dem Schulterblatte der übrigen Vögel entspricht, die Schaufel selbst aber die beiden anderen Knochen, wiewohl höchst unvollkommen, ersetzt. Ganz verstehe ich Herrn Cuvier *) nicht, wenn er sagt: „*Dans le Casoar il n'existe de la fourchette qu'une sorte d'apophyse, au bord interne de la tête de la clavicule, qui en est comme un rudiment,*" und finde diese Beschreibung, so wie die Abbildung dieser Theile in der des Gerippes des Casuars, welche dieser vortreffliche Zergliederer und Beobachter mittheilt **), der Natur nicht angemessen. Derjenige Theil des Schulterblatts (b), welcher die eigentliche Schaufel darstellt, liegt mit seinem vorderen Rande (c) in der Rinne, welche die hervorragende Kante des Brustknochens bildet. Der obere Rand (d) dieses Theiles, welcher nach dem Hals hinliegt, ist stark ausgeschnitten und mit einem groſsen eiförmigen Loche (g) versehen, welches beim jungen Casuar nicht durchging, aber doch an der inneren Seite bemerkbar war. Am hinteren Rande (e) befindet sich nahe beim Stiele der Schaufel oder dem eigentlichen Schulterblatte (a) die Gelenkhöhle (f) für den Oberarmknochen, und nicht weit davon, etwas höher, in dem Schulterblatte des alten Casuars ein

run-

*) A. a. O. I. Seite 250.

**) A. a. O. Taf. 2.

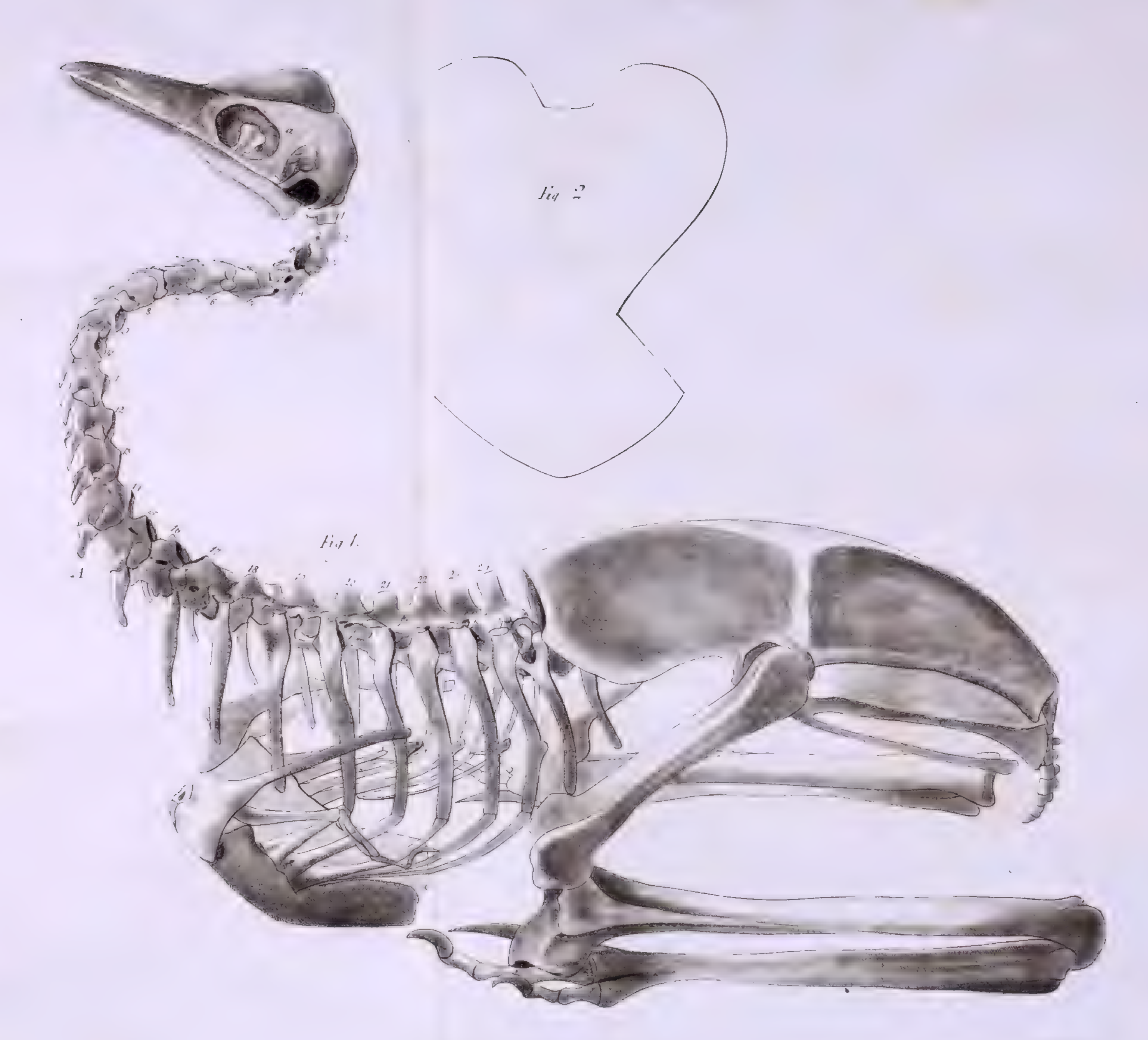
rundes, schräges Loch (h), wovon beim jungen Casuar sich auch keine Spur zeigte. Der Stiel oder das eigentliche Schulterblatt (a) ist fast überall von gleicher Breite, am Ende abgerundet, und erstreckt sich bis zum Haken der zweiten gegliederten Rippe.

Der kleine Oberarmknochen (Fig. 7. b) ist an seinem oberen Ende am dicksten, und bildet daselbst den Kopf, womit er sich in der Gelenkhöhle des Schulterblattes bewegt. Am unteren Ende hat er zwei kleinere Köpfe. Der Ellenbogenknochen (c) und die Speiche (d) sind beide von fast gleicher Stärke, beide gerade, und die Speiche nicht allein am untern Ende nicht länger, sondern selbst kürzer als der Ellenbogenknochen. Dagegen ersetzt ihre Länge ein Vorhandknochen, denn die Vorhand besteht beim Casuar nicht wie sonst aus zwei, sondern aus drei, aber kleinen, fast eiförmigen Knöchelchen (e, f, g), von denen zwei in gerader Linie unter der Speiche, das dritte unter dem Kopf des Ellenbogenknochens, nahe beim Kopfe der Speiche, mitten über dem großen Handknochen liegen. Die beiden Handknochen (hc), wenn anders beide so genannt werden dürfen, sind in ihrer Bildung sehr von dem Knochen, oder den drei Knochen junger Vögel, die diesen Namen führen, verschieden. Der größere Handknochen (h) ist länglich, kegelförmig, etwas zusammengedrückt, und macht mit dem zweiten und dritten Vorhandknochen, vielleicht auch mit dem Ellenbogenknochen, ein Gelenk. Der kleine Handknochen (i), welcher vielleicht ein Finger ist, ist ein eiförmiges, sehr kleines Knöchelchen, und sitzt an der untern Seite des größeren hinter dessen Kopfe an. Der Daumen (k) hat keinen besondern Handknochen, besteht aus einem einzigen Gliede, legt sich an die Oberfläche des größern Handknochens an, und ist vermittelst eines starken Bandes an dem Ellenbogenknochen befestigt. Der Finger (denn hier ist nur ein einziger) hat zwei Glieder, von denen das erste (l) klein und kegelförmig ist, und an seiner Basis eine Gelenkhöhle für die Spitze des größern Handknochens, am andern Ende einen Kopf zum Gelenk mit dem zweiten Fingergliede (m) bildet; einem unregelmäßigen Knochen, der sich in eine dünne, spitze Kralle (n) endigt.

Der Schenkelknochen ist ungemein groß und stark. Sein Kopf ist mittelmäßig und halbkugelförmig; sein Hals kurz; der Trochanter sehr

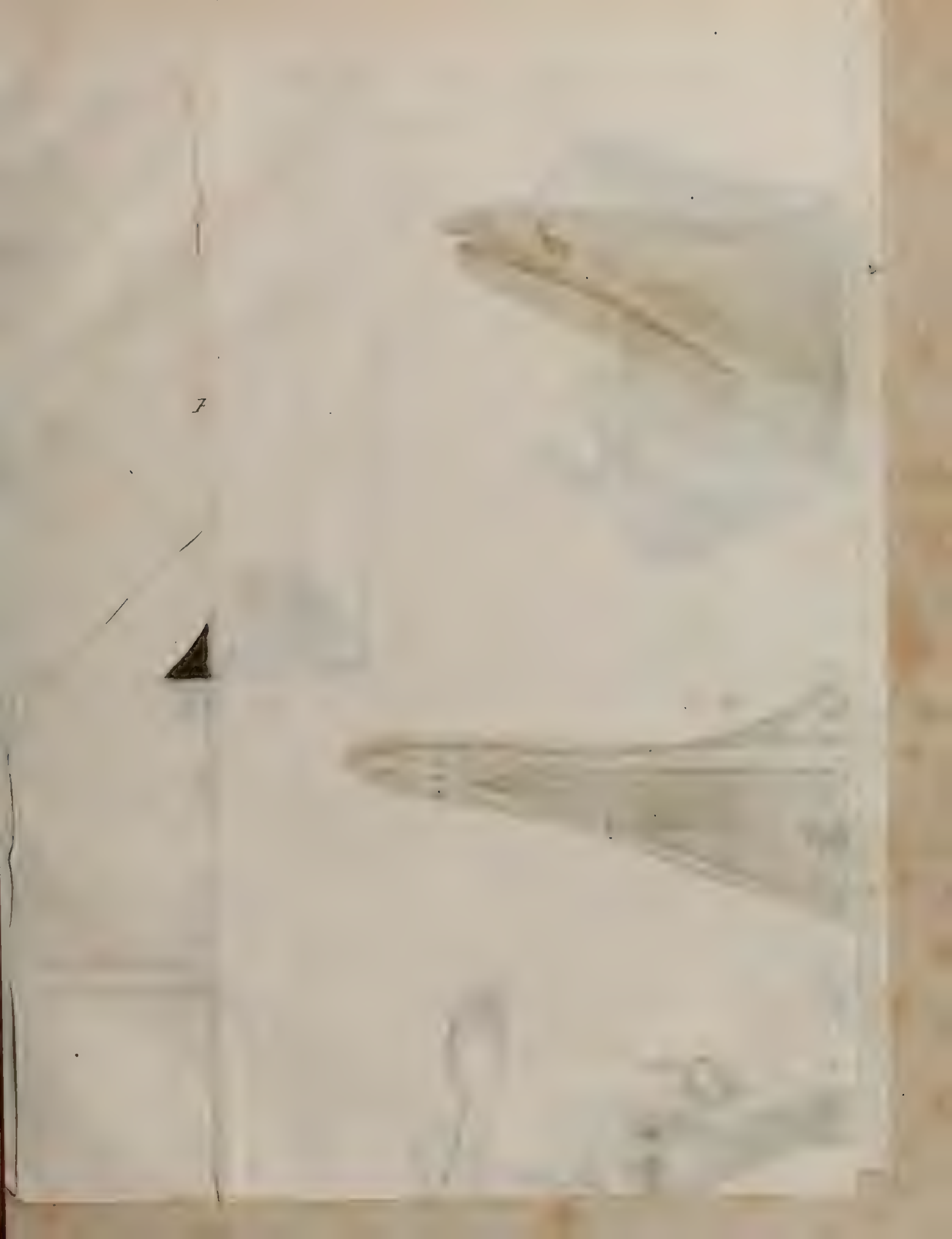
grofs, breit, rauh und uneben. Der Körper ist rundlich und nähert sich dem dreiseitigen. Er hat am untern Ende zwei starke Gelenkhügel, und überdies noch einen kleinen dritten Gelenkhügel an der äufseren Seite für den Wadenknochen. Das Schienbein und der Wadenknochen sind durch starke Seitenbänder und queerlaufende Bänder mit ihm verbunden. Das Schienbein ist der längste Knochen des ganzen Gerippes, aber nicht so dick als der Schenkelknochen. Es bildet an seinem obern Ende zwei starke Gelenkhügel, einen hintern und einen vordern, von denen dieser der gröfste ist, und sich in eine lange Spitze endigt, welche die Stelle der Kniescheibe zu vertreten scheint. Zwischen den Gelenkhügeln bildet sich eine grofse, hohle Gelenkfläche. Der Körper dieses Knochens ist etwas platt gedrückt, und an seinem unteren Kopfe sind zwei sehr starke Gelenkhügel vorhanden. Der Wadenknochen liegt ganz an der äufsern Seite des Schienbeins, mit dem er, aufser an seinem Anfange, fast gänzlich verwachsen ist, bis auf einen kleinen Zwischenraum, der einige Zoll unter seinem Kopfe zwischen ihm und dem Schienbeine sich befindet. Er ist pfriemenförmig, erstreckt sich bis etwas vor den untern Kopf des Schienbeins, und hat einen zusammengedrückten abgerundeten Kopf. Der Fufsknochen ist fast so lang als das Schienbein, an dessen Kopf er mit starken Bändern befestigt ist. Sein Kopf bildet eine hügelige, dreiseitige Fläche, deren Basis nach vorn gekehrt ist. Eben so ist sein Körper oben eine dreiseitige Säule mit hohlen Seitenflächen, deren vordere Seite die breiteste und hohlste ist. Nach unten wird der Körper breiter und plattgedrückt, und endigt sich in drei Gelenkhügel für die Glieder der Zehen. Mit dem Gliede für die Kralle haben die innere Zehe zwei, die mittlere und äufsere vier Glieder. Bei der mittlern ist das erste Glied das längste und stärkste, das dritte das kleinste; bei der äufsern Zehe aber sind das zweite und dritte Glied fast gleich grofs und viel kleiner wie das erste.

Tay. I.



B. Merrem pinx.

Zur Abhandlung des H. Merrem über das Gerippe des Kasuars, Physikal. Klasse 1816–17.





Zur Abhandlung des H. Merrem über das Gerippe des Kasuars. Physikal. Klasse 1816–1817.



Zur Abhandlung des H. Merrem über das Gerippe des Kasuars. Physikal. Klasse 1816–1817.

Erklärung der Kupfertafeln.

---

1. Figur. Gerippe eines jungen Casuars von der Seite. Halbe Lebensgröſse.

a. Beinhaut zwischen dem hintern Rande des Thränenknochens, dem Seitenrande des Stirnknochens, dem Augenfortsatz und Jochknochen, welche die Augenhöhle bilden hilft.

1. Träger.

2—15. Die übrigen Halswirbel.

A. Rippenförmiger Zapfen des funfzehnten Halswirbels.

16—26. Rückenwirbel.

b. Beinhaut in dem Hüftknochen.

2. Fig. Durchschnitt der Brusthöhle.

3. 4. 5. Fig. Kopf des jungen Casuars in natürlicher Gröſse. 3. Fig. von hinten und von der Seite. 4. Fig. von oben, von vorn und von der Seite, so daſs man die hintere Wand der Augenhöhle deutlich sehen kann. 5. Fig. von unten. Die ausgespannte Beinhaut (Fig. 1. a) ist hier weggelassen, um die Knochen in der Augenhöhle vollkommener zu zeigen.

A. Hinterhauptknochen.

a. Hinterhaupthügel.

b. Rauhe vertiefte Gegend zur Befestigung der Halsmuskeln.

c. Warzenfortsatz (*Processus mammilaris*).

d. Knopf (*Condylus*).

e. Grundfortsatz (*Processus basilaris*).

f. Hinterhauptloch.

g. Untere Kante des Hinterhaupthügels.

B. Scheitelknochen.

i. Ohrenfortsatz.

k. Augenfortsatz.

C. Stirnknochen.

D. Gemeinschaftlicher Kieferknochen.

F. Thränenknochen.

G. Unterer Theil des Stirnknochens, welcher die obere Decke der Augenhöhle ausmacht.

l. Loch für die Gesichtsnerven.

m. Loch für die Geruchsnerven.

H. Scheidewand der Augenhöhlen.

n. Abgesonderter Theil derselben.

J. Unterer Rand der Scheidewand oder des Keilknochens.

h. Kreuzförmiger Theil desselben.

K. Gaumenknochen.

o. Flügel des Gaumenknochens.

oo. Theil des Flügels, der blofs aus Knochenhaut besteht.

L. Verbindungsknochen.

M. Oberschnabel.

p. Kiel desselben.

q. Einschnitt.

r. Nasenlöcher.

t. Das Horn.

N. Gaumentheil der Oberkinnlade, wo man die erweiterten Enden der Gaumenknochen erblickt.

u. Raum zwischen diesen beiden Enden.

O. Untere Kinnlade.

v. Gezähnelter Theil ihres Randes.

w. Kiel derselben.

P. Jochknochen.

6. Fig. Schulterblatt eines alten Casuars.

a. Stiel desselben oder eigentliches Schulterblatt.

b. Die Schaufel.

c. Der mit dem Brustknochen vergliederte untere Rand.

d. Der vordere oder obere Rand, nach dem Halse zu.

e. Der hintere Rand.

f. Die Gelenkhöhle für den Oberarmknochen.

g. Das eiförmige Loch.

h. Das runde schräge Loch.

7. Fig. Flügelknochen des jungen Casuars. Natürliche Gröſse.

a. Schulterblatt.

α. Band, welches das Schulterblatt und den Oberarmknochen verbindet.

b. Oberarmknochen.

β. Band zwischen dem Oberarmknochen und Ellenbogenknochen.

c. Ellenbogenknochen.

d. Speiche.

e. f. g. Die drei Vorhandsknochen, durch Bänder vereinigt.

h. Gröſserer Handknochen.

i. Kleiner Knochen, welcher den zweiten Handknochen zu ersetzen scheint.

k. Daumenknochen.

ν. Band.

l. Erstes Glied des Fingers.

m. Zweites Glied desselben.

n. Kralle.

8. 9. 10. Fig. Becken eines alten Casuars von der Seite, von oben und von unten. Halbe Lebensgröſse.

A. Heiligenknochen von oben.

B. Derselbe von unten.

a. Dornfortsatz des zehnten Rückenwirbels.

b. Körper desselben.

c. Körper des eilften Rückenwirbels.

C. Darmknochen.

Ca. Der vordere Theil.

Cb. Der hintere Theil.

D. Hinterer Schenkel des Sitzknochens.

e. Fortsatz desselben.

E. Kopf des Sitzknochens.

F. Pfanne.

G. Loch in derselben.

H. Schaamknochen.

11. 12. 13. Fig. Brustknochen des alten Casuars von der Seite, von oben und von unten. Halbe Lebensgröſse.

a. Scharfe Kante zur Befestigung des Schulterblattes.

b. Gelenkscheidewände des Seitenrandes für die Rippenanhänge.

Wahrnehmungen

über

das Blut einiger Mollusken.

Von Herrn Erman *).

Untersuchungen über einige Punkte der komparativen Physiologie des Athemholens führten mich vor mehreren Jahren zur näheren Erwägung des Blutumlaufs bei den Mollusken. Einige hier mitzutheilende Resultate dieser Untersuchung betreffen hauptsächlich die Gasteropoden *Helix pomatia* und *Planorbis corneus.* Die Ueberzeugung, in ihrem Blute Eisen und höchst wahrscheinlich auch Mangan gefunden zu haben, gegen die allgemein angenommene Meinung, die Mollusken führen kein Eisen im Blute, theilte ich damals gesprächsweise einigen Naturforschern mit. Herr John nahm diese Bemerkungen in seine Tabellen der Zoochemie auf, und Herr Rudolphi würdigte sie ebenfalls einer Erwähnung in seinen Beiträgen zur Anthropologie und allgemeinen Naturgeschichte S. 86.

Seitdem ist in dem klassischen Werke des Herrn Treviranus (Biologie, Band IV. S. 564) dieses Resultat in Anspruch genommen worden. Folgendes sind die Worte: „Ob auch das Blut der Mollusken und Würmer Eisen enthält, ist schwer zu bestimmen. Erman will zwar, wie Rudolphi in seinen Beiträgen zur Anthropologie und allgemeinen Naturgeschichte (S. 86) erzählt, in dem Blute der *Helix pomatia* und des *Planorbis corneus*

*) Vorgelesen den 25. April 1816.

sowohl Eisen als Braunstein gefunden haben. Ich gestehe aber, dafs ich die Richtigkeit seiner Erfahrung bezweifele. Ich habe oft versucht, das Blut der Weinbergschnecke aus dem geöffneten Herzen aufzufangen; aber immer ergofs sich dasselbe in so geringer Quantität und vermischte sich gleich so mit der in dem Herzbeutel und unter der Bauchhaut befindlichen Flüssigkeit, dafs alle meine Mühe, auch nur einige Tropfen davon rein aufzufangen, vergeblich war. Vielleicht hat man die unter dem Bauchfell der Weinbergschnecke enthaltene Flüssigkeit für das Blut gehalten. Jene ist aber von diesem sehr verschieden. Sie ist von bläulicher Farbe, wirkt auf Pflanzenpigmente weder als Säure noch als Alkali, und wird weder von Alkohol noch von essigsaurem Blei koagulirt; hingegen mit Galläpfeltinktur mäfsig erwärmt, geht sie in eine gelatinöse Substanz über: sie besteht also aus Gallerte."

Obgleich die über diesen Gegenstand zu führende Untersuchung weder in physiologischer noch chemischer Hinsicht als beendigt zu betrachten ist, so halte ich es doch für meine Pflicht, vorläufig das Resultat, so weit es jetzt besteht und von Herrn Rudolphi erwähnt wurde, gegen eine so vollwichtige Autorität als die des Herrn Treviranus zu vertheidigen, und zwar durch treue und umständliche Darstellung der Thatsachen.

Die Tauglichkeit der Landschnecken *Helix pomatia*, *nemoralis etc.* zu gewissen Respirationsversuchen beruht zum Theil darauf, dafs man jeden individuellen Akt des Athemholens wahrnimmt durch das jedesmalige Oeffnen des sphinkterähnlichen Theiles der Membran, welche die Kiemenhöhle nach aufsen begränzt. Bricht man einen Theil der Windungen der Schale behutsam ab, so kann man andrerseits die Pulsationen des Herzens durch das an dieser Stelle sehr dünne Hautintegument sehr deutlich wahrnehmen, und so die Frequenz der willkürlichen Akte der Respiration mit der des Herzschlages unter gegebenen Umständen vergleichen, und auch diesen letztern beobachten, während man das Thier durch Tauchen unter Wasser oder durch künstliche Kälte asphyxiirt.

Man wird jedoch zugeben müssen, dafs diese Beobachtungen nicht genau seyn können, wenn man bedenkt, dafs im natürlichen Zustande des Thieres der vordere Rand der Kiemenhaut luftdicht an die Mündung der Schale angeheftet ist, so dafs zwischen ihrer äufseren der Schale zugekehrten Fläche und der Schale selbst keine Luft eindringen kann. Die Respiration mufs also viel leichter und vollkommner geschehen können bei unangebro-

gebrochener Schale, wo der Luftdruck bloſs auf der innern Fläche der aufwärts nnd niederwärts bewegten Kiemenhaut Statt findet; so wie aber die Schale an dieser Stelle angebrochen wird, so geschieht nunmehr der Druck der Luft gleichmäſsig auf beiden Flächen der Kiemenhaut, und das ursprüngliche Gleichgewicht der Kräfte, die das Ein- und Ausathmen bedingen, muſs eine Störung erleiden, analog der, welche die Parazentese des Thorax bei höheren Thierarten nach sich zieht.

Andererseits sah ich, daſs wenn man bei *Helix* nur einen kleinen Theil des Gehäuses da wegbrach, wo das Herz liegt, dieses Organ bedeutend hervorgedrängt wird, und wenn man vollends das Hautintegument aufschlitzt, so drängt sich das Herz ganz hervor, und pulsirt auſserhalb der früheren Begränzung des Körpers. Es folgt daraus, daſs im natürlichen Zustande die Schale einen Stützpunkt für das Herz abgiebt, an welchem es sich bei jeder Dilatation anlegt, und durch welchen der an sich sehr schwache Widerstand, den die Wände des Herzens zu leisten vermögen, bedeutend vermehrt wird, so daſs das Wegbrechen der Schale den Herzschlag modifizirt durch Erweiterung der Kavitäten des Herzens und entsprechende Verminderung seiner Widerstandsfähigkeit.

Wir können also nicht geradezu das Detail der Respirationsfunktion und der Zirkulation bei *Helix* in ihrem natürlichen Zustande für gleich achten mit dem, was wir bei den Individuen wahrnehmen, deren Schale wir weggebrochen haben. Die Schale in den beiden erwähnten Ansichten hat organische Beziehungen, die ihr als dem nach auſsen liegenden Skelette des Thieres zukommen. Ich versuchte dieses Hinderniſs der Beobachtung dadurch zu umgehen, daſs ich das Gehäuse durch Schaben, durch Tränken mit Wasser, mit Oel und durch andere Mittel durchsichtig genug machte, um die Pulsation des Herzens im völlig natürlichen Zustande wahrnehmbar zu machen, welches jedoch nur höchst unvollkommen gelang; wohl aber fand ich einige Individuen von *Helix nemoralis*, deren Gehäuse für sich so dünn und durchscheinend ist, daſs man nicht nur die Pulsation des Herzens, sondern auch die Verzweigung der Stämme und die Hauptverästelungen der Blutgefäſse der Kiemenhaut ganz deutlich sah in dem Augenblick der Respiration, wo die ausgespannte Kiemenhaut sich dicht an die Schale (gleichsam ein *velum pulmonale*) anlegt.

Der über die Erwartung groſse Antheil von Blut, wovon man alsdann diese Gefäſse strotzen sieht, ist geeignet, uns von der relativ groſsen

Maſse des Bluts von diesen Mollusken eine richtigere Vorstellung zu geben, wenn man die ihr korrespondirende Menge des Bluts in den Arterien überschlägt, und dazu den Antheil nimmt, der in dem zurückführenden Theile des Systems gegenwärtig sein muſs. Diese vorläufige Wahrnehmung einer bedeutenden Blutmenge bei diesen Mollusken verdiente an sich schon Aufmerksamkeit, weil es in Widerspruch ist mit dem biologischen Gesetze: daſs nicht nur im Gehirne, sondern auch im ganzen Körper eines Thieres sich desto weniger Blut findet, je mehr sich dasselbe von dem Menschen entfernt, und den Insekten und Würmern nähert. Herr Treviranus, der dieses sehr wichtige und im Allgemeinen wahre Gesetz aufstellt (B. I. S. 466), bestätigt es durch die komparativen Resultate der Untersuchung bei Vögeln, Fischen und Amphibien. Bei den Mollusken und Würmern sei es aber unmöglich, wegen der groſsen Menge Schleimes, womit der Körper dieser Thiere bedeckt und angefüllt ist, das Blut ungemischt zu erhalten und die Menge desselben zu schätzen. Nun aber ist in den Individuen mit durchscheinendem Gehäuse die vorläufige Beobachtung einer relativ groſsen Blutmenge durchaus frei von der hier erwähnten Täuschung.

Auch war es die Beobachtung dieser Individuen, die mir den Wunsch und die Hoffnung gaben, genug von dem Blute dieser Mollusken in unvermischter Reinheit zu erhalten, um über die Gegenwart oder Abwesenheit des Eisen in demselben mich zu belehren: eine Frage, die, abgesehn von ihrer groſsen Bedeutsamkeit für die vergleichende Physiologie und Zoochemie, ein besonderes, man könnte sagen, fast lokales Interesse gewinnt durch die so auffallend paradoxe Färbung des Blutes einiger dieser Mollusken, als dunkelamethyst bei *Planorbus corneus*, aquamarin oder vielmehr himmelblau bei *Helix pomatia*.

Ich wählte zu dieser Untersuchung die gröſsten Individuen von *Helix pomatia*, die sich auffinden lieſsen, feilte behutsam das Gehäuse ab, gerade da, wo das Herz liegt, und zwar unverrückt, das Thier mag im Gehäuse ganz zurückgezogen sein oder möglichst ausgestreckt beim Fortschreiten, wie ich es bei meinen durchscheinenden Individuen zuerst wahrnahm. Diese Stelle trifft man auf der ersten Windung der Schale, nahe dem *umbilicus*, in der Verlängerung einer geraden Linie, die in der Ebene der Mündung liegt. Dann wurde vom Gehäuse eine Fläche von einigen Quadratlinien weggebrochen und das Hautintegument behutsam aufgeschlitzt. So-

gleich wird das Herz bedeutend hervorgedrängt, so daſs man es ganz frei vor sich hat und die sehr bedeutende relative Gröſse dieses Organs wahrnimmt. Es ist schwer, eine Messung auch nur approximativ zu geben, um so mehr, da wir früher bemerkten, daſs bei der gegebenen Behandlung des Thieres das Herz in einem etwas widernatürlich ausgedehnten Zustande sein muſs. Aber selbst davon abgesehen, ist eine Gröſse von 3 bis 3½ Linien und darüber, wie man sie gewöhnlich findet, für die Proportionen dieser Individuen kein unbeträchtliches relatives Volumen des Herzens. Die Muskelmasse, die nach dem Auslaufen des Blutes zurückbleibt, bestätigt dasselbe, so daſs *Helix pomatia* auf jeden Fall eine Ausnahme macht von dem als Korollar des eben erwähnten Gesetzes aufgestellten Satze, daſs die Gröſse des Herzens in Vergleichung mit der Gröſse des übrigen Körpers kontinuirlich abnimmt, vom Menschen abwärts. Der berühmte Verfasser der Biologie sagt, bei den Fischen sei das Herz acht bis neunmal kleiner als bei Vögeln von einem gleichen Volumen. Noch kleiner sei es bei den Mollusken und Krustazeen. Bei *Mya* und *Anodonte* scheint mir das Verhältniſs des Herzens noch viel gröſser zu sein als bei *Helix*. Die wechselseitigen Kontraktionen des Herzens und der Kammer, die Korrugationen bei der Systole, die auffallend blaue Farbe des Blutes, zeigen sich mit der gröſsten Bestimmtheit; aber keine Spur von irgend einer Flüssigkeit ergieſst sich, so lange man auch das Thier in diesem Zustande läſst. In dem Augenblick aber, wo man das Herz durchsticht, quillt das Blut heraus, oft im ersten Augenblick in einem Stral von zollweiter Amplitüde, immer aber in dicken, anfangs sehr schnell sich folgenden Tropfen, so lange die Wände des Herzens noch kräftig pulsiren, die aber nachher allmälig immer sparsamer flieſsen. Dieses unmittelbar und ausschlieſslich aus dem Herzen vor meinen Augen ausgeflossene, vom Anfang bis zum Ende durchaus homogene, durchsichtige, von jedem zugemengten Schleime freie Blut ist es, was ich sammelte, um es auf Eisengehalt zu prüfen. Die Menge dieses Blutes ist auffallend groſs; nach den ersten Minuten, und so lange die Pulsationen noch dauern, hat man in der Regel von einem groſsen Individuum 20 — 25 Gran aufgefangen. Legt man aber das Thier auf die Mündung eines Glases, mit der verwundeten Stelle nach unten, so ist nach einigen Stunden viel mehr durch allmälige Ausleerung des Gefäſssystems ausgeflossen. So z. B. ein Individuum, welches mit dem angebrochenen Gehäuse 437 Gran wog, hatte nach der Verblutung 77 Gran

verloren; ein anderes, 465 Gran schwer, ergoſs durch die Wunde des Herzens 76 Gran Blut. Die Blutmasse des ersten wäre also $\frac{1}{5,5}$, und die des zweiten $\frac{1}{6}$ des Ganzen, und zwar mit Inbegriff des Gehäuses, wodurch für das eigentliche Thier ein alle Erwartungen übersteigendes Verhältniſs der Blutmenge zu der übrigen Körpermasse sich ergiebt. Herr Treviranus führt die Thatsache an, daſs eine Viper von $30\frac{1}{2}$ Drachmen nur 80 Gran Blut gab, $= \frac{1}{27}$ des Ganzen, und daſs Menghini sogar aus hundert Individuen von Aalen nur eine Unze Blut erhielt. Nun stehen nach dem biologischen Gesetze die Mollusken noch tiefer, und sollten folglich ein noch viel geringeres Verhältniſs der Blutmenge haben, also viel weniger als $\frac{1}{27}$. Die Aussage des Herrn Treviranus, daſs es ihm unmöglich war, aus dem geöffneten Herzen der Weinbergschnecke nur einige Tropfen reinen unvermischten Bluts zu erhalten, weiſs ich mir durchaus nicht zu erklären. Sollte vielleicht eine andere Species oder sehr kleine Individuen angewendet worden sein? Hat Herr Treviranus vielleicht das Thier vorher aus dem Gehäuse gebrochen, so daſs nun das mehr kollapse Gefäſssystem und die an keine bestimmte Stützpunkte gebundene Kontraktilität der Muskeln den Ausfluſs des Bluts hinderte? In einigen wenigen Fällen sah ich etwas Aehnliches geschehen, wenn der Stamm der Aorta sich hart an den Rand der angebrochenen Schale anlegte. Oder hat vielleicht Herr Treviranus im Frühjahr unmittelbar nach dem Winterschlaf oder auch im Herbst kurz vor Eintritt desselben, seine Versuche angestellt? Zwar habe ich noch keine direkte Wahrnehmung über die sehr interessante Frage eines etwanigen gröſseren oder geringeren Verhältnisses der Blutmenge bei diesen Thieren nach der Verschiedenheit der Jahrszeiten; glaube jedoch, daſs man etwas Aehnliches schlieſsen müsse aus der so ausnehmend groſsen quantitativen Verschiedenheit des Nahrungsstoffs, welchen sie in den verschiedenen Jahrszeiten zur Assimilation, d. h. unmittelbar zur Blutbereitung, verwenden. Ein Individuum von *Helix pomatia* hatte drei Wochen gefastet, und wog alsdann im Juni 276 Gran. Nun bekam es Blätter, und einige Stunden nachher, als es aufhörte davon zu fressen, war die Gewichtszunahme 48 Gran, = gleich $\frac{1}{5,6}$ des ganzen Gewichts. Einige Zeit darauf setzte ich dasselbe Thier wiederum zum Fasten ab. Nach 6 Wochen, im August, war es auf 296 Gran zurückgekommen (Verlust 28 Gr.). Es bekam Futter, und verzehrte davon in einigen Stunden, bis es gesättigt war, den Werth von 65 Gran, als seiner Gewichtszunahme; dies beträgt $\frac{1}{4,5}$ des Ganzen; eine eben so ungeheure

Konsumtion von Nahrungsstoff, als wenn ein Erwachsener dreifsig und einige Pfund in einer Mahlzeit verzehrte. Aber im September, als dasselbe Individuum nach dreiwöchentlichem Fasten mit Blättern versehn ward, hatte es in zwei Stunden nur 5 Gran davon verzehrt, welches von dem Gewicht von 300 Gran, die es eben hatte, nur den 60ten Theil ausmacht. Nun scheint es mir sehr wahrscheinlich, dafs die absoluten Blutmengen nach diesen so äufserst verschiedenen Energien des Ernährungsprozesses sich verschieden ergeben werden, obgleich die unmittelbare Wahrnehmung noch fehlt, aber unfehlbar nachgeliefert werden soll.

Ich wage es also, selbst gegen eine so vollwichtige Autorität als die des Herrn Treviranus, die blaue Flüssigkeit, in welcher ich das Eisen gefunden, für das unvermischte Blut des Mollusken zu halten, und keinesweges für eine Vermengung mit irgend einer fremden sezernirten Flüssigkeit. In der That, das mit Blut angefüllte Herz zeigt, wegen der Durchsichtigkeit seiner Wände, die blaue Farbe der Flüssigkeit, die es anfüllt, ganz deutlich; so wie aber diese ausgelaufen ist, erscheinen die Wände des Herzens mit derselben fahlgelben Farbe, wie der übrige Körper; und aufserdem habe ich durchaus nur die Flüssigkeit gesammelt, die ich unmittelbar und ausschliefslich aus der Stichwunde des Herzens ausfliefsen sah.

Wenn ich nun aber demungeachtet eine Möglichkeit, ja eine Wahrscheinlichkeit zugebe, dafs eine Flüssigkeit, die sich unterm Bauchfell ergiefst, mit dem Blute durch das Herz ausfliefsen könne, ohne dafs darum das Blut mit irgend etwas ihm fremdartiges vermengt sei, so wird die Lage der Sache so sonderbar, dafs man verlegen sein wird, zu entscheiden, ob ich in der Hauptsache mit oder gegen Herrn Treviranus stimme. Die Wahrheit ist, dafs ich auf diese Ansicht vor vielen Jahren kam, lange ehe Herr Treviranus seine Einwürfe niederschrieb; folgendes ist der Gang der Untersuchung, die zu diesem paradoxen Resultat führte.

Die reiche Verzweigung der Blutgefäfse, die man auf der Kiemenhaut der Individuen von *Helix nemoralis* mit durchsichtiger Schale erblickt, und die bedeutende Blutmasse, welche die Verwundung des Herzens der *Helix pomatia* giebt, erregten den Wunsch, das System der Zirkulation bei diesen Mollusken in seinem ganzen Zusammenhange zu erkennen. Einige Versuche mit Quecksilberinjektionen führten nicht zum Zweck, theils wegen der häufigen Lazerate, da ich der Feinheit dieser Arbeit nicht gewachsen war; theils weil beim nachherigen Oeffnen des Thieres die Hauptstämme

des Systems durchschnitten wurden, oder rissen, wobei alles Quecksilber wieder ausflofs. Herr Doktor August Stosch, dessen Virtuosität in der feineren Auatomie und namentlich in den kunstreichen Injectionen anerkannt, und beurkundet ist durch die Präparate, die das hiesige zootomische Museum von ihm aufweist, hatte die Freundschaft, mir in diesem Falle seine Mitwirkung nicht zu versagen.

Nach sehr vielen fruchtlosen Bemühungen und mifslungenen Versuchen gelangen ihm endlich zwei Präparate, die das System der Blutgefäfse von *Helix pomatia* mit Wachsmasse injezirt darstellen. Bei dem ersten wurde durch das Herzohr in dem Stamm der Pulmonalvene eingesetzt, und die Mächtigkeit der Hauptzweige, so wie die grofse Menge der Verästelungen, welche die Fläche der Kiemenhaut fast durchgängig roth färben, zeugen zur Genüge, dafs wenn auch nur blofs dieses venöse Blut bei Verwundung des Herzens ausflösse, viel mehr von der Flüssigkeit müfste erhalten werden als etwa einige Tropfen. Das zweite Präparat erlaubt aber keinen Zweifel mehr über die richtigere Ansicht. Bei diesem wurde durch die Kammer des Herzens, welches bekanntlich bei diesen Mollusken ein Körperherz ist, in die Aorta eingesetzt, und das ganze arterielle System glücklich injezirt. Der Durchmesser der Aorta, und die Menge der bedeutenden Zweige, welche an alle Theile abgeben und welche die Injektionsmasse bis zu den letzten Windungen des Körpers führten, lassen wahrlich bei der Verblutung des Herzens eine bedeutende Menge Blut erwarten, vorzüglich wenn man bedenkt, dafs dieses arterielle System im lebenden Zustande ganz bestimmt noch viel mehr an Blut führte, als man wagen durfte an Injektionsmasse hineinzutreiben, da uns eine sehr verdriefsliche Erfahrung lehrte, dafs ein Druck des Stempels, der nur im mindesten übermäfsig ist, sogleich die Wände der Gefäfse sprengt, weshalb auch diese zwei Präparate nur nach unzähligen Wiederholungen gelingen konnten. Ich übergehe hier die umständlichere Beschreibung derselben, weil die Anatomie von *Helix* nicht der eigentliche Gegenstand dieser Abhandlung ist, und erwähne blofs einer Lücke, oder vielmehr eines Hiatus, den wir trotz aller Bemühungen noch nicht faktisch auszugleichen vermochten, und wo sich Spielraum findet für die Hypothese, dafs das wirkliche in dem Kreislauf begriffene Blut einen intermediären Aufenthalt aufserhalb der venösen und arteriellen Gefäfse, und namentlich in gewissen Lakunen unter dem Peritonäum nehme, um erst von da aus wiederum in die Kiemengefäfse und so zum Herzen zu gelangen.

Betrachtet man nämlich beide Präparate, so sind sie offenbar nur Bruchstücke eines Ringes. Die Kiemenvenen versorgen das Herz, von da stralt das Blut durch die Arterien nach der Peripherie; aber von einem unmittelbaren Rückgange des Blutes aus den Arterien des Körpers zu der Kieme durch ein kontinuirendes venöses System findet sich keine Spur, wenigstens im Präparate, wo die Aorta injezirt wurde, und wo durchaus nichts von der Peripherie zurücklaufendes den Uebergang in venöse Gefäſse beurkundet. Herr Stosch hat sehr viel Fleiſs und Kunst auf diesen Gegenstand verwendet; Quecksilber, verschiedene gefärbte Flüssigkeiten, die am meisten geeignet schienen, die feinsten Haargefäſse zu durchdringen, zeigten nie den Uebergang. Eben so fruchtlos war eine Art von Transfusion des ganz frischen rothen Bluts des *Planorbis corneus* in die unmittelbar vorher ausgeleerte Aorta einer noch lebenden *Helix pomatia:* wo wir doch am ersten berechtigt waren zu hoffen, die Vitalkraft würde den Uebergang einer so analogen Flüssigkeit bewirken in ein kontinuirendes venöses System, wenn ein solches vorhanden wäre. Es drang sich also hier die Vermuthung auf, daſs bei diesen Gasteropoden ein Austreten des arteriellen Blutes in gewisse Sinus oder Lakunen geschehe, um von da aus in die Kiemenvenen durch einen Ueberführungs-Apparat zu gelangen, ganz dem analog, was Cuvier bei *Aplysia depilans* wahrgenommen. Herr Stosch muthmaſst sogar, daſs die Austretung der Injektionsmasse in die Höhlungen des Körpers, die wir früher unbedingt für bloſse Zerreiſsung der Gefäſse durch übermäſsigen Druck hielten, vielleicht eine höhere Bedeutung hatte, und mitunter wirklich organisch bedingte Extravasate waren ohne gewaltsame Sprengung. Betrachtet man das Kiemenpräparat, so sieht man auf der Kiemenhaut eine nicht unbeträchtliche Menge von Gefäſsen, die weiſs geblieben sind und keine Masse erhielten; ihr Divarikazionswinkel zeigt offenbar, daſs sie vom Rande her den eigentlichen rothinjezirten Kiemengefäſsen zulaufen und sich über sie verbreiten; offenbar versorgen sie dieselben mit zurückgeführtem Blut und haben venöse Funktion. Diese Gefäſse erblicken wir hier in der That nahe am Darmkanal in der Gegend seiner Exkrezionsmündung, und sie hat Cuvier wahrscheinlich im Sinn, wenn er sagt, das arterielle Blut werde den Kiemen zurückgeführt durch die Gefäſse des Darmkanals. Es entstehen aber hiebei folgende Fragen:

1) Wenn diese zurückführende Gefäſse wirklich venös gewordene Blutgefäſse des Darms sind, warum finden wir im Arterienpräparat durch-

aus keinen Uebergang der Masse in dieselben mit venöser Bedeutung und Richtung?

2) Wie kann der an sich nur sehr geringe Antheil von arteriellem Blut, welchen wir an den Darmkanal gehen sehen, zur Speisung der so unverhältnifsmäfsig grofsen Kiemengefäfse hinreichen?

3) Wo gelangt die bei weitem gröfsere Masse von Blut hin, die nach dem Fufse, nach den Genitalien und bis nach den äufsersten Windungen des Körpers hinströmt? wie rückkehrt dieses zum Mittelpunkt des Respirationsorgans?

Die Hypothese einer Extravasation des Bluts in bestimmten Divertikeln, von wo aus das Blut zu den Kiemen zurückgeführt wird, durch resobirende Gefäfse, wovon die leer gebliebenen weifsen Gefäfse des Kiemenpräparats einige Zweige wären, hat für sich die Analogie von *Aplysia*, und gewissermafsen auch die Behauptung des Herrn Treviranus, der von einer unter dem Bauchfell des Thieres enthaltenen Flüssigkeit von blauer Farbe spricht, als von einer faktisch erwiesenen Sache; denn dies wären offbar die Sinus oder Lakunen, die Stosch und ich vermutheten, ohne sie mit Bestimmtheit nachweisen zu können. Den Zwek dieser Mittheilung einer noch unvollendeten Untersuchung werde ich erreicht haben, wenn es mir gelingt, hiemit Herrn Stosch an sein Versprechen zu binden, so viel Zeit dem praktischen Heilgeschäft abzugewinnen, um die unterbrochene anatomische Forschung fortzusetzen, bis die Art des Kreislaufes bei diesen Mollusken sich mit faktischer Evidenz dargethan habe. Eine gewisse sehr paradoxe Auflösung des Problems wäre mir jedoch nicht ganz unerwartet, so wenig Analogie sie bis jetzt für sich hat: dafs nämlich kein wahrer Kreislauf Statt findet; dafs bei jeder Diastole Blut von den Kiemen und Blut von der Aorta im Ventrikel zusammenfliefsen, und nach der Vermengung durch die Kontraktion wiederum propulsirt werden, so dafs die Kieme sowohl als der Körper stets ein Gemenge von respirirtem und unrespirirtem Blut führten. Auf diese Art hätten wir hier eine Annäherung an das System der Insekten, mit dem Unterschiede, dafs die oszillirende Bewegung der Blutsäule einen Mittelpunkt von Muskular-Thätigkeit erhalten hätte, ein Herz, dessen Bedeutung aber sich fast der des Ventilapparats eines Stofshebers näherte. Die Sparsamkeit der Respirationsakte (im Durchschnitt einer in einer Viertel-

Viertelstunde), in Vergleichung mit der Frequenz der Pulsschläge, im Mittel 25 Mal in einer Minute (Treviranus IV. 258). Die Langsamkeit, aber auch die Vollständigkeit, mit welcher diese Mollusken den Sauerstoff der atmosphärischen Luft in gesperrten Gefäſsen absorbiren, welche gleich befunden wird der eudiometrischen Energie des Phosphors, wäre auf diese Weise erklärbar, wenn immer ein Theil des respirirten Blutes unmittelbar in die Kiemen zurücktritt, und also jedesmal nur ein sehr geringer zugemengter Antheil Körperblut oxydirt zu werden braucht, so ist der unmittelbare Bedarf an Sauerstoff für jeden Augenblick nur sehr gering, und das Leben kann fortwähren, bis der letzte Antheil Sauerstoff allmählig verzehrt wurde; welches viel weniger begreiflich wäre, wenn die bedeutende Menge Blut, die das Herz faſst und in so schnellen Schlägen propulsirt, jedesmal unmittelbar vorher in der Kieme seiner ganzen Masse nach den Oxydationsprozeſs erleiden müſste. Doch die Erfahrung allein kann dieser oder jener Hypothese den Stab brechen: ihre Entscheidung falle aber aus wie sie wolle, so bleibt immer gewiſs, daſs die hypothetisch angenommene Flüssigkeit der etwanigen Lakunen unterm Bauchfell, wenn sie sich zu derjenigen mengen sollte, worin ich Eisen gefunden habe, kein heterogenes Sekretions-Produkt ist, sondern ein wahres mit der zirkulirenden Masse identisches Blut, da ich es ausschlieſslich aus der Stichwunde des Herzens ausflieſsen sah, und da die letzt erhaltenen Antheile an Farbe, Durchsichtigkeit, ungetrübter Klarheit und chemischer Reaktion mit den erstern ganz übereinstimmend waren.

Dieses Blut erscheint in *Helix pomatia* beim refrangirten Lichte himmelblau, beim reflektirten hingegen perlgrau; und zwar ist dieses Opalisiren bei dem so eben ergossenen Blute ausgezeichneter, als ich es je bei irgend einer Flüssigkeit gesehen habe; demungeachtet erblickt selbst das bewaffnete Auge keine Spur von Blutkügelchen oder von irgend etwas abgesondert darin schwebendem; wenn man aber das sehr merkwürdige Opalisiren auf etwas nicht in Auflösung begriffenes und abgesondert in der Flüssigkeit schwebendes beziehen wollte, so sind auf jeden Fall die in diesem Blute schwebenden Theile von übermäſsiger Feinheit, und verstatten keinen Vergleich mit den Blutkügelchen der höheren Thierarten. Eine freiwillige Trennung des Blutes, nach der Analogie von *Serum* und *Cruor*, findet ebenfalls nicht Statt. Nur nach mehreren Monaten hatte die Flüssigkeit ein pulverartiges Sediment abgesetzt; da aber, ungeachtet die Gefäſse verschlos-

sen waren, eine wirkliche faulichte Gährung Statt gefunden hatte, so fällt die Analogie mit der freiwilligen Scheidung des Blutes höherer Thierarten ganz weg.

Dieses Blut reagirt alkalisch auf Kurkuma und Essig geröthetes Papier, und es scheint mir anderweitig ausgemacht, daſs das freie Natrum, welches man nachher in der Asche findet, schon als solches im Blut vorhanden ist, wenn gleich die alkalische Reaktion des Eiweiſsstoffes an sich einen Zweifel begründen könnte. Von Eisen aber entdeckt man unmittelbar im Blute keine Spur, selbst durch die sichersten und feinsten Reagenzien. Möglich ist es, daſs Herr Homberg in *Havre de grace*, auf dessen Versuche man sich beruft, um die Gegenwart des Eisens im Blute der Mollusken zu leugnen, sich mit dergleichen unmittelbaren Prüfungen begnügte; heute aber ist, vorzüglich nach Berzelius Beobachtungen bekannt genug, daſs dieser Schluſs trüglich war, da selbst bei den höheren Thierarten kein Eisen vor der Einäscherung durch Reagenzien angezeigt wird. Ich behandelte daher das Blut mehrerer Individuen von *Helix pomatia* im silbernen Tiegel. Bei einer Temperatur von beiläufig 50—60° koagulirte sich ein groſser Antheil der Masse, und nach Verdampfung des Wassers blieb ungefähr $\frac{1}{11}$ des Gewichts des ganzes Blutes zurück, als ein zusammengefilztes elastisches faserstoffartiges Koagulum in noch mäſsig feuchtem Zustande. Da aber das Auffinden des Eisens mich damals ausschlieſslich beschäftigte, und die an sich sehr geringe Menge des Materials diesem Zwecke geopfert werden muſste, um einige Sicherheit zu erhalten, so wird die künftig fortzusetzende Untersuchung entscheiden, welche von den bereits bekannten oder auch vielleicht den noch unbekannten Modifikationen des Eiweiſsstoffes eigentlich in diesem Blute sich vorfindet: eine in jedem Fall nicht leichte Aufgabe. Dieses Koagulum enthält nun auſser der eigentlich thierischen Substanz, die etwanigen Salze, Erden und Metalle; alles jedoch in sehr geringem Antheil, wie schon aus dem geringen spezifischen Gewicht dieses Blutes ergeht: ich fand es 1,0015 : 1,000, und wunderte mich anfänglich sehr, eine dem Anscheine nach so rein wässerige Flüssigkeit durch Einwirkung der Wärme fast ganz koaguliren zu sehen, bis mir eine Gegenprobe zeigte, daſs destillirtes Wasser, selbst wenn es $\frac{1}{5}$ seines Gewichtes Eiweiſs aufgelöst hat, nur um 0,0038 an specifischem Gewichte zunimmt.

Die Einäscherung hinterlieſs nur einen äuſserst geringen Rückstand, dessen Verhältniſs zum ganzen Gewicht des Blutes ich nicht wage anzugeben.

Bringt man einen Theil der Asche dieses Blutes in Salpetersäure und stumpſt die überflüſsige Säure mit Ammonium oder mit Kali, so giebt die Galläpfeltinktur einen violetten Niederschlag, der wohl manchmal anfänglich etwas flockig erschien und mit weniger entschiedener Farbe, theils wenn die Einäscherung nicht streng genug gewesen war, theils wegen des zugemengten Mangans und der Erden und Salze; aber jedesmal stellte sich nach einiger Zeit die ganz entschiedene Farbe des eisenhaltigen Niederschlags ein.

Die mit Ammonium neutralisirte Salpeter-Auflösung wurde mit kristallisirtem blausaurem Kali versetzt; es erfolgte aber, zu meiner groſsen Verwunderung, kein blauer, sondern ein rosenrother Niederschlag, der auch durch längere Einwirkung der Luft nicht blaue, sondern Weinhefenfarbe annahm. Da eine Auflösung von gemeinem eisenhaltigem Mangan oft einen blaſsröthlichen Niederschlag giebt, so wurde etwas salzsaures Eisen mit demselben Eisenkali versetzt: es gab den entschiedensten blauen Niederschlag. Nun wurde zu diesem salzsauren Eisen eine ganz geringe Menge Schwefel-Mangan zugethan, und nun erhielt ich mit dem blausauren Kali den rosenrothen Niederschlag, und zwar so ganz von derselben Tinte, daſs es nicht möglich war, beide von einander zu unterscheiden. Wurde aber ein gröſserer Antheil Mangan dem Eisen hinzugethan, so verschwand das rosenrothe, und erschien, wie es der Analogie nach sein muſs, als blau mit weiſs deluirt. Das angewendete blausaure Kali hatte ich zwar selber mit möglichstem Fleiſs bereitet; da aber dieses Reagenz eines der verfänglichsten ist, so wiederholte ich die Untersuchung mit anderm blausaurem Eisenkali, welches ich von sehr bewährten Chemikern als durchaus zuverlässig erhalten hatte; auch theilte ich ihnen etwas von der Asche des Blutes mit, und in allen Fällen stimmte das Resultat überein, so daſs für das Blut von *Helix pomatia* die Gegenwart des Eisens erwiesen und die des Mangans höchst wahrscheinlich ist. Wer die Schwierigkeit kennt, ganz geringe Antheile Mangan und Eisen von einander rein zu scheiden, wird geneigt sein, die noch obwaltende Ungewiſsheit zu entschuldigen.

Eben so fand ich im rothen Blute des *Planorbis Corneus* das Eisen mit Gewiſsheit, und das Mangan mit noch viel gröſserer Wahrscheinlichkeit. Dieses Thier ist jedoch zu klein und die Lage seines Herzens zu ungünstig, als das ich hätte das Blut unmittelbar aus der Wunde des Herzens erhalten können. Ich durchstach daher die Kiemenhaut mit einer Glasröhre,

und erhielt so, meines Erachtens, ziemlich unvermischtes Blut, dessen relative Menge mir fast noch gröſser schien als bei *Helix pomatia*, wenn gleich ich die genaue Bestimmung durch das Gewicht nicht genommen habe.

Nach der Einäscherung gab die mit Kali abgestumpfte salpetersaure Auflösung der Asche einen ganz entschiedenen violetten Niederschlag: die mit Ammonium neutralisirte und mit kristallisirtem blausaurem Eisenkali ebenfalls einen rosenrothen, wie bei *Helix pomatia*. Der mit Galläpfeltinktur behandelte Antheil wurde über eine Flamme scharf zur Verjagung der Salpetersäure und zur höheren Oxydation eingetrocknet und dann in Salzsäure aufgelöst. Die Salzsäure erhielt sogleich eine gelbe Farbe, wie es mit Eisen gewöhnlich ist. Die salzsaure Auflösung wurde mit Ammonium abgestumpft und mit blausaurem Eisenkali versetzt; das Präzipitat war aber ebenfalls rosenroth. Eine salzsaure Auflösung dieser Asche wurde nun mit kohlensaurem Natrum genau neutralisirt und bernsteinsaures Natrum hinzugetröpfelt; es erfolgte sogleich ein Niederschlag. Das bernsteinsaure Eisen wurde durch Filtration abgesondert und in die klar abgelaufene Flüssigkeit kohlensaures Natrum zugetröpfelt; es bildete sich ein weiſser Niederschlag. Das Filtrum, worauf er sich sammelte, wurde allmälig erwärmt, und nahm bald eine dunkelgraue in das schwärzliche sich ziehende Farbe an. Gegen diesen Beweis für das Dasein des Mangans weiſs ich nur eins einzuwenden, daſs nämlich der für Manganoxyd angesehene Niederschlag, vor das Löthrohr genommen, mit der Glasperle das gewöhnliche Farbenspiel nicht gab.

Frägt man nun, in welchem Zustande und durch welches vermittelnde Auflösungsmittel das Eisen in dem Blute dieser Mollusken sich befindet, so gehörte zur Beantwortung der Frage eine ganz vollständige Analyse desselben, und zur Zeit kann ich nur behaupten, in dem eingeäscherten Blute von *Helix pomatia* gefunden zu haben: freies kohlensaures Natrum ohne Kali, salzsaures Natrum, kohlensaure Kalkerde, etwas phosphorsaure Kalkerde, Eisenoxyd, und wahrscheinlich Manganoxyd; in welchem quantitativen Verhältnisse, weiſs ich nicht anzugeben, bei der geringen Menge der zu prüfenden Substanz. Bedenkt man ferner, daſs wir von den höheren Thierarten und selbst vom Menschen noch nicht wissen, wie das Eisen in ihrem Blute enthalten ist, so wird man sich wenig wundern, daſs es, vorzüglich unter gegebenen Umständen, von dem Molluskenblut noch nicht konstirt, aber man wird die Wichtigkeit des Vergleichungspunkts, der sich hier für die Zoochemie ergiebt, einsehen.

Bei der Einsammlung des Bluts der zweischaligen *Mya* und *Anodonta* ſinden die Schwierigkeiten, die Herr Treviranus für das Genus *Helix* urgirt, wirklich Statt; es war mir wenigstens bis jetzt unmöglich, zum Herzen zu gelangen, ohne daſs sich zuvor beim Oeffnen der Schale aus unvermeidlichen Zerreiſsungen verschiedene heterogene Flüssigkeiten ergossen und dem Blute sich zumischten. Sogar über die Blutmenge bei diesen Mollusken konnte ich aus demselben Grunde nichts bestimmen, obgleich ich im Allgemeinen dieselbe relativ eben so groſs schätzen möchte wie bei *Helix*. Ein Mittel, welches ich fand, diese Thiere ganz unverletzt aus der ebenfalls ganz unverletzten Schale zu bringen, ist zwar nicht ohne Interesse in den Fällen, wo man von seltenern Individuen beides, das Thier und die Schale, unverletzt benutzen will: man hat sie nur in etwas strenge Kalkmilch zu werfen. So fand ich wenigstens bei *Mya pictorum* und *Anodonta Cycnea* und *Anatina*, daſs nach sechs bis zehn Stunden die Schalen auseinander klafften, und das Thier so rein herausgeschält war, daſs die Ansetzpunkte der Schlieſsmuskeln mit ganz reinem Perlmutterglanz sich zeigten. Der Körper, den man so abgesondert in der Kalkmilch findet, ist zur Anatomie gewissermaſsen vorbereitet, aber zur Untersuchung des Bluts nicht mehr tauglich, da dieses an die allgemeine Einhärtung des Ganzen Theil genommen. Der Grund dieser Ablösung der Schlieſsmuskeln ist übrigens nicht leicht einzusehen. Bei den einschäligen Mollusken ist dieses Mittel ebenfalls anwendbar, um weder das Thier noch das Gehäuse zu beschädigen, und doch jedes besonders zu erhalten.

In Ermangelung eines Besseren versuchte ich, diesen Bivalven irgend eine Beobachtung über die Rückkehr des Blutes aus dem arteriellen in ein venöses System abzugewinnen. Nie habe ich diesen unmittelbaren Uebergang deutlicher gesehen, als in den Endpunkten der einzelnen Zweige der Kiemen junger Froschlarven (*appendices fimbriatae*), wo das Umtreiben einer unterbrochenen Reihe von einzelnen Blutkügelchen (denn mehr wie jedesmal nur Eins fassen die Gefäſse nicht) aus dem Arteriellen in das Venöse ein wahres Paternosterwerk bildet. Nie wird Einem das Problem über das Chemische des Respirationsprozesses so nahe am Herzen gelegt als hier, wo das Wesentliche seines Mechanismus mit so anschaulicher und so vollkommener Klarheit und Einfachheit vor unsern Augen liegt. Ein ziemlicher Grad von Durchsichtigkeit der Kiemen junger Individuen unserer Bivalven lieſs mir etwas Aehnliches hoffen, doch ohne Erfolg, bei Anwendung

sowohl der bloſsen Lupe oder auch des Mikroskops. Diese Mollusken haben bekanntlich an jeder Seite des Mundes ein Paar Anhängsel in Gestalt von länglichen Blättern, deren innere Fläche eben so gereifelt ist als die Kiemen, mit dem Unterschied, daſs die Tentakeln, wie man dieses in seiner Bedeutung nicht genug bekannte Organ wohl nennt, bloſs Querstreifen oder nach einer einzigen Richtung parallel laufende Furchen zeigen, während in den Kiemen die Fasern oder Furchen nach zwei Richtungen gehen sich rechtwinklich durchschneidend, so daſs die Textur eines zarten sehr regelmäſsigen Gitterwerks entsteht. Diese innere Fläche der Tentakeln beobachtete ich einst, und glaubte bereits meinen Zweck auf das vollkommenste erreicht zu haben. Wenn nämlich ein recht helles Licht in einer gewissen schiefen Richtung auf die Streifen dieser Tentakel fällt, so wird man überrascht durch den Anblick einer äuſserst schnellen und unaufhörlichen innern Bewegung, die an jedem der Streifen seiner ganzen Länge nach Statt findet. Ich überzeugte mich jedoch bald, daſs dieses Vorwärts- und Rückwärts-Strömen einer etwanigen Flüssigkeit, oder diese ungemein raschen Longitudinal-Schwingungen jedes Streifens, mit dem Blutumlauf nichts Gemeinschaftliches haben. Wurde nämlich durch einen glühenden Drath, den ich rechtwinklich auf die Queerstreifen anlegte, die Organisation derselben in einem oder zwei Punkten zerstört, so hörte deshalb die oszillirende Bewegung nicht auf in der Strecke die zwischen den beiden zerstörten Stellen sich befand. Schnitt ich einen Tentakel ganz ab, und brachte ihn so unter das Mikroskop, so erfolgten demungeachtet die Longitudinal-Schwingungen, und zwar in demselben Rhythmus als im unversehrten Zustande. Nur nach mehreren Stunden hörten sie auf: benetzte ich alsdann das Organ, so fingen dieselben innern Oszillationen wieder an mit gleicher Schnelligkeit.

Man kann diesen hygroskopisch bedingten Wechsel beschleunigen, wenn man die Oberfläche des Organs durch Annäherung einer Lichtflamme mäſsig erwärmt und trocknet, und dann wiederum benetzt. Es war anfänglich schwer, dieser Erscheinung nach irgend einer Analogie eine hypothetische Bedeutung zu geben, bis ich endlich unterm Mikroskop an einem so eben durchschnittenen Tentakel wahrnahm, daſs von den Furchen aus, eine Menge von blasenförmigen runden Körpern ausströmte, die oft in den ersten Augenblicken eine Art von wirbelnde Bewegung um die durch den Schnitt entstandenen Mündungen der Furchen bildeten, dann aber mit scheinbarer

Spontaneïtät im umgebenden Wasser sich hin und her bewegten. Nach Maaſsgabe wie diese belebten Molekeln ausströmten, hörte auch allmälig die flimmernde Bewegung in den Streifen des Tentakels auf; und es leidet keinen Zweifel, daſs die Ursache dieser beobachteten innern Schwingungen in der kriebelnden Wallung dieser animatisirten Molekeln liege, welche der Membran der Furchen eine undulirende Bewegung mittheilen; sobald aber diese Membran bis auf einen gewissen Grad eingetrocknet ist, widersteht sie dem Impuls dieser Molekeln zu sehr, um ihr Treiben durch ihre eigenen Undulationen zu verrathen. Diese zoophytischen Molekeln fand ich stets von derselben Art und Gröſse als runde, durchsichtige, ungefärbte Blasen, allenfalls um das Doppelte gröſser als die Blutkügelchen beim Frosche.

Folgende Umstände geben dieser Beobachtung allgemeines Interesse.

1) Die erwähnte Bewegung fehlt durchaus nie in diesem Organe. Bei vielen Hunderten von Individuen *Mya* und *Anodonta* von jedem Alter und Gröſse, und in jeder Jahreszeit, fand ich durchaus dieselbe Bewegung in demselben Rhythmus.

2) Von der andern Seite aber sah ich nie etwas Aehnliches in irgend einem andern Theile der Oberfläche. Die Kiemen, deren äuſsere Textur so viel Aehnlichkeit mit der der Tentakeln hat, zeigte durchaus nie eine Spur davon, und eben so wenig der Mantel oder der Fuſs; ja, was viel merkwürdiger ist, die nach auſsen liegende Fläche der Tentakeln, welche nicht gefurcht ist, zeigt ebenfalls gar keine; so daſs, wenn man auch durch das geläufige Wort Infusorien die Bedeutsamkeit des Phänomens gleichsam niederschlagen wollte, es immer sehr auffallend bleiben würde, ein Organ zu finden, dessen Eine Fläche von der Natur gleichsam ausschlieſslich bestimmt scheint, diesen parasitischen Zoophyten einen Tummelplatz zu gewähren.

Die durchgängige Konstanz des Phänomens (denn auch bei *Ostrea edulis* sah ich das durch belebte Molekeln bedingte Flimmern der Tantakeln), verbunden mit dem fast ausschlieſslichen Vorkommen der Molekeln in diesem Organ, scheint mir die Vermuthung zu begründen, daſs nicht ein bloſser gleichsam zufälliger Parasitismus von mikroskopischen Entozoen hier Statt finde, sondern daſs die Bedeutung wichtiger und eingreifender sich ergeben werde.

Man hält diese Bivalven für rein weiblich, weil man blofs einen Eierstock und keinen Theil für männliche Funktionen wahrgenommen hat. An sich hat zwar die Vorstellung von einer Zeugung durch blofs weibliche Genitalien nichts Widersprechendes, denn wir wissen von dem Wesen des Prozesses so wenig, dafs wir kaum behaupten dürfen, es gehören dazu nothwendig zwei verschieden modifizirte Thätigkeiten, geschweige denn, dafs wir die Unmöglichkeit beweisen könnten, dafs ein und dasselbe Organ der Träger dieser beiden Thätigkeiten sein sollte. Auf jeden Fall aber scheinen die Bivalven, von denen die Rede ist, sich zu nahe an die Thiere anzuschliefsen, die unter dem Gesetze der Sexualität stehen, um annehmen zu dürfen, schon bei ihnen falle männliche und weibliche Thätigkeit weg, so dafs sie nicht einmal als androgyne Monözisten zu betrachten wären. Wenn von der andern Seite das Infusorium als eine der ersten nothwendig zu durchlaufenden Stufen der Animalisation der Materie zu betrachten ist, als ein Mittelzustand zwischen Pflanze und Thier, wo es noch von Bedingungen abhängt, ob der Körper in dieses oder jenes Reich der Organisation hinüber, mit dieser oder jener Form treten werde, und wenn aus diesem Grunde kein wahrer Saamen je frei von Infusorien wäre, so scheint die Umkehrung des Satzes gewissermafsen zulässig, dafs nämlich in einem Organ, wo mit entschiedener Konstanz, und mit einer, wo nicht ausschliefslichen, doch ganz ausgezeichneten Energie, die organische Materie die erste Stufe zur Belebung in neuen Individuen erreicht — dafs da eine Beziehung auf den Generationsprozefs zu vermuthen sei, und namentlich bei diesen Thieren die Thätigkeit männlicher Genitalien, für die kein anderes Organ gegenwärtig ist.

A n h a n g.

Folgende Beschreibung der Verzweigungen des arteriellen Systems bei *Helix pomatia*, wie sie Herr Dr. Stosch nach dem Einen der in obiger Abhandlung erwähnten Präparate entwarf, ist von vielseitigem Interesse. Der Durchmesser der Aorta ist an ihrem Ursprunge beinahe eine Linie, und nimmt in den Hauptzweigen nur ganz allmälig ab. Das Präparat der injizirten Gefäſse der Kiemenhaut giebt einen fast noch anschaulicheren Beweis, daſs die Blutmasse bei diesen Thieren sehr beträchtlich ist.

Der Lauf der Aorta ist folgender:

Kaum hat dieselbe ihren Ursprung aus dem Herzen genommen, so giebt sie zwei Aeste ab: einen sehr bedeutenden Ast,

ramus hepaticus, der die ganze Leber, das *intestinum rectum*, die Windungen des Darmkanals, die sich in der Substanz der Leber vertheilen, und das Organ, aus dem das *vas catenulatum* seinen Ursprung nimmt, mit Arterien versieht. Gleichzeitig mit demselben entspringt ein bei weitem kleinerer Ast,

ramus pro glandula calcarea, welcher sich in die sogenannte Kalk absondernde Drüse und in den rechten Rand des Mantels vertheilt.

Nachdem der Stamm der Aorta einige Linien nach hinten fortgelaufen ist, giebt er einen bedeutenden Ast, der dem Magen, dem hintern Theil des Hodens, dem *vasi catenulato* und einem Theile des *intestini recti* und der Leber Zweige giebt.

Einige Linien weiter entspringt aus der Aorta die *Arteria pro genitalibus*, welche an den Windungen des *Oviductus* herabläuft und diesen bis zu seiner Einsenkung in die Blase für den Liebespfeil verfolgt, auf welchem Wege sie den damit verbundenen Theilen Aeste giebt.

Die Aorta schlägt sich jetzt nach vorn herüber und giebt einige Linien von dem Ursprung der vorstehenden Arterie zwei starke Arterienäste:

1) Dieser geht zu dem Theil vom äuſsern Rande des Mantels, in welchen sich das *Intest. rectum* mündet.

2) Dieser ungleich stärkere theilt sich gleich nach seinem Ursprung in drei Aeste:

a) Dieser ist der kleinste und geht zum obern Theil des Magens und zu dem Theil des *Oesophagus*, der zwischen dem Vormagen und dem Magen befindlich ist.

b) Dieser bei weitem stärkere geht zu den Speicheldrüsen und dem Vormagen und verfolgt den *Oesophagus* bis zur Mundhöhle.

c) Dieser, so groſs als der vorhergehende, geht zu dem untern Theile vom Rande des Mantels, da wo derselbe sich an den Fuſs anlegt.

Der Hauptstamm der Aorta geht jetzt in gerader Richtung unter dem *Oesophagus* entlang bis zum untern groſsen Ganglion, und theilt sich hier in drei Hauptäste:

Der erste schlägt sich nach hinten zurück und läuft in der Substanz des Fuſses bis zur hintern Spitze desselben entlang und versieht denselben mit Aesten.

Der zweite geht zur rechten Seite nach vorn, giebt den Tentakeln dieser Seite, dem Penis, der äuſsern Bedeckung des Kopfs und der Mundhöhle Aeste.

Der dritte ist der dem vorigen entsprechende auf der linken Seite.

Auſser diesen drei Hauptästen entspringen an dieser Trifurcation mehrere kleinere Aeste, die sich in den vordern Theilen des Fuſses und in der äuſsern Bedeckung des Halses vertheilen.

Vorläufige Bemerkungen

über

die durch bloſse geometrische Ungleichheit der Berührungsflächen erregte elektrische Spannung.

Von Herrn Erman *).

Es ist kein Grund da, zu behaupten, daſs unter den Körpern von starrer Aggregation nicht einer sich befinden sollte, der geeignet wäre, erregte elektrische Thätigkeit fortzuleiten, ohne zugleich selber eine verhältniſsmäſsig stärkere ursprünglich zu erregen durch Berührung mit den zwei andern starren heterogenen, welche die fortzuleitende Thätigkeit erregt hätten. Denn die Flüssigen, welche diese Funktion wirklich haben, zeigen unter gegebenen Umständen nicht geringe eigenthümliche elektromotorische Kräfte. Wenn daher doch kein solcher starrer Körper nachgewiesen werden kann, der als vermittelndes Glied die Produkte mehrerer einfachen Ketten zu summiren geeignet wäre, so wäre entschieden, daſs wirkliche Zersetzung und Zerfallen durch chemische Polarität nothwendige Bedingung jeder Summation von mehrfachen Ketten ist, wenn gleich von der andern Seite, dem Fundamentalversuch gemäſs, jede einfache von zwei heterogenen ohne Chemismus bestehen kann. Dieses ist an und für sich so wichtig und so höchst paradox, daſs man (selbst abgesehen von anderen ebenfalls sehr wichtigen Rücksichten) einen sehr groſsen Werth auf das etwanige endliche Gelingen der Konstruktion einer wahrhaft trockenen Säule legen muſste, welche zugleich, da

*) Vorgelesen in der öffentlichen Sitzung den 3. August 1817.

keine Aenderung der Substanzen durch sie bedingt wird, eine absolut ununterbrochene Thätigkeit besitzen, und dasjenige, was sie einmal durch reziproke Wirkung ihrer Pole in Bewegung gesetzt hätte, als ein wahrhaftes *mobile perpetuum* hinstellen würde. So oft auch ein solches Gelingen bereits angekündigt wurde, und namentlich von Dyckhoff, Marechaux, Behrend, Alizeau, Hattchett, Desorme, so hat sich bis jetzt der hygroskopische Zustand des in Vorschlag gebrachten Körpers nachweisen lassen als Ursache der Täuschung.

Herr De Luc hat vor einigen Jahren einen rein-physischen starren Elektromotor angekündigt, dessen Spannung an sich unveränderlich einen festen Punkt für die Elektrometerskale abgäbe, in dem Sinne wenigstens, wo eine Stimmgabel es für die Töne leistet, und dessen Schwankungen um diesen Spannungspunkt das jedesmalige elektrische Verhältnifs zwischen Boden und Atmosphäre ausspräche n. Eine Reihe von Versuchen und Beobachtungen, anhaltend und in grofsem Maafsstabe angestellt, gaben mir jedoch die Ueberzeugung, dafs auch diese Säule weder trocken, weder perennirend, noch meteorologisch ist. Ein gleiches gilt von den sehr berühmt gewordenen sogenannten trockenen Säulen des Herrn Zamboni. Dieses Resultat der Untersuchung war um so mehr zu erwarten, da zur Konstruktion dieser letztern Säulen das an sich hygroskopische Papier noch einen Ueberzug von Honig bekommt, um mittelst desselben eine Schicht Manganoxyd darauf zu befestigen. Wer kann hier an Abwesenheit aller Feuchtigkeit denken! und in der That verdanken diese Säulen ihre auf mehrere Jahre sich erstreckende Dauer nur der grofsen Sorgfalt, mit welcher sie gegen das Verdunsten geschützt sind durch harzige Ueberzüge und Einschliefsung in Glasröhren. Aber trotz dem sah ich endlich das Pendel, welches sie in Bewegung setzen, in Stillstand gerathen; und die Uhrwerke, denen Ramis in München und Streizig in Verona diese Elektromotore angefügt haben zur doppelten Funktion eines Bewegungsprinzips und eines Regulators, zeigen durch ihren unregelmäfsigen Gang und ihren endlichen Stillstand, wie wenig diese Systeme auf perennirende und gleichförmige Thätigkeit Anspruch zu machen haben. Es bleibt daher blofs die Jägersche Kombination von zwei Metallen mit Glasplatten geschichtet. Wenn sich von dieser erweisen liefse (was ich doch Ursach habe nicht zu glauben), dafs sie wirklich als eine rein-physische Kette von Kondensatoren, unabhängig ist von jeder Mitwirkung eines feuchten chemisch wirkenden Elements, so hätte diese An-

gelegenheit eine ziemlich sonderbare Wendung genommen, indem die Polemik für die trockene Säule jetzt gegen ihren qualifizirtesten Repräsentanten zu führen wäre, das heifst gegen Herrn Zamboni selbst. In der That, in seinem Briefe an die Münchner Akademie, der im Jahre 1816 im Druck erschien, geht die Theorie seines Instruments ganz unumwunden aus von der zuleitenden Wirkung der hygroskopischen Feuchtigkeit des Papiers und des Honigs als Zwischengliedern. Auch fehlen nicht Geständnisse, die mit der ununterbrochenen Dauer und Gleichförmigkeit der Wirkung, die man von diesen Systemen behauptet hatte, einen seltsamen Kontrast bilden: so sagt er ausdrücklich, dafs er oft die Thätigkeit seiner Säulen fast bis zum völligen Erlöschen sinken sah, *ritrovàndole piu volte quasi moribonde.*

Die Bemühungen des Abbate Zamboni, seiner immer noch chemisch bedingten Säule, wenn nicht die Unsterblichkeit, doch ein viel längeres und regeres Leben zu sichern, führten ihn durch mannigfaltige Kombinationen endlich zu dem in physischer, chemischer und physiologischer Hinsicht gleich wichtigen und gleich unerwarteten Erfahrungssatz, dafs: wenn sich ein und derselbe starre Leiter mit ungleichen Berührungsflächen in Konflikt mit einem feuchten Leiter befindet, die blofse Ungleichheit der Berührungsflächen hinlänglich ist, um einen Gegensatz der elektrischen Thätigkeiten zu bedingen, und nach Einer Richtung die positive, nach der Andern die negative zu erregen.

Um den künftigen Verhandlungen über diesen Gegenstand einige Aufmerksamkeit zuzuwenden, erinnere man sich an folgende Momente der Untersuchung:

1) Die mathematische Berechnung der Säule geht (auf dem Grund des Fundamentalversuchs) davon aus, dafs die elektrische Spannung zwischen je zwei heterogenen eine konstante Gröfse ist, durchaus unabhängig von der absoluten oder relativen Gröfse der zwei in Konflikt kommenden Körper. Zink und Silber geben stets dieselbe Spannung, die Scheiben mögen von 1 Quadratlinie oder 1 Quadratfufs sein, sie mögen gleich oder ungleich sein, sie mögen sich in Einem oder sehr vielen Punkten berühren. Der neue Erfahrungssatz behauptet dagegen für Ungleichheit der Berührungsflächen nicht etwa blofs verschiedene Grade, sondern sogar verschiedene Arten der El. Thätigkeit.

c) Wir glauben die Spannungsreihe der Körper als wirklich mit der chemischen Disjunktion zusammenfallend durchzuschauen, so daſs aus der positiven oder negativen elektrischen Funktion auf den Werth von Oxygen oder Base zu schlieſsen ist. Der neue Erfahrungssatz behauptet: Ein und dasselbe Stück Metall, welches das reine Wasser von Zwei Seiten berührt, werde an der einen Seite positiv, an der andern negativ, wenn die Berührungsflächen von verschiedener Gröſse sind. Unter welchen höheren Satz werden sich diese beiden dermaleinst subsummiren lassen? Vielleicht in dem: daſs nach Maaſsgabe der Berührungspunkte (gleich mechanischer Dichtigkeit) derselben Substanz relativ gröſsere oder geringere Oxydabilität zukommt. Der elektrische Gegensatz einer und derselben salinischen Auflösung nach den Graden ihrer Konzentration; die Erscheinungen der Auflösung bei geprägten Münzen; die Daniellsche Methode, die kristallinische Gestaltung aus dem Innern der Metalle auf nassem Wege heraus zu skelettiren, werden vielleicht hieher zu ziehen sein, wie denn in der That über die Bucholtzschen Reduktionen des metallischen Zinns aus Zinnauflösungen durch reines Zinn eine Erklärungshypothese Ritter's gleichsam präsagirend an den erwähnten Satz nahe genug anstreift.

3) Es herrschen bekanntlich zwei verschiedene Vorstellungsweisen über den Gegensatz elektrischer Thätigkeiten. Man denkt sie sich entweder als bedingt durch bloſse quantitative Unterschiede einer und derselben Thätigkeit, wie Temperatur und Kapazitätsunterschiede bei der Wärmethätigkeit: in der Berührung des Zinks mit Silber wird Zink gleichsam elektrisch warm, Silber E kalt: Oder es giebt zwei spezifisch verschiedene Thätigkeiten, die durch kein Addiren und Subtrahiren in einander übergehen, die sich wechselseitig neutralisiren wie die Träger von Oxygen und Basen, wenn sie nicht etwa selber diese Träger sind. Beide Vorstellungsarten sind zwar nur bildliche Ausdrücke von etwas höherem, und in so fern hat man die Wahl des bequemern. Man war jedoch mit Recht sehr bemüht, durch irgend eine Thatsache im empirischen Standpunkte zu entscheiden, welches dieser Bilder die meiste Aehnlichkeit mit der zu bezeichnenden Sache habe; aber bei unzähligen Kombinazionen ist nie etwas Entscheidendes gelungen. Vielleicht bietet einen solchen Entscheidungsgrund die

zweigliedrige Säule, die nach Maafsgabe der gröfsern oder geringern Berührungsfläche die sogenannte positive und negative Thätigkeit nach zwei Richtungen trennt. Denn es ist sehr wohl denkbar, und fast nothwendig, dafs ein quantitativer Unterschied der Berührungsflächen einen quantitativen Unterschied in dem Erfolg eines Umtausches bedinge; hingegen scheint es wenig analogisch, dafs irgend ein quantitativer Unterschied einen qualitativ bestimmten geradezu umkehre, als wenn bei der Berührung von Salpetersäure und Kali es auf die relative Menge ankäme, welches die Säure und welches die Base abgiebt. Jedoch kann man nicht leugnen, dafs in dem jetzigen Zustande unseres chemischen Wissens etwas dem ähnliches auch denkbar ist, wenn z. B. die Kohle das Basische ist in der Kohlensäure und das Säurende in der Essigsäure, und eben so der Wasserstoff basisch im Wasser, säurend in der hydrothionischen, hydrochlorischen und hydriodischen. Einige sind sogar schon der Meinung, dafs es hiebei blofs auf den Grad der Kondensation der Stoffe ankomme.

4) Endlich ist es leicht, die Wichtigkeit des erwähnten Satzes auch in physiologischer Hinsicht anschaulich zu machen. Bei den Organen der elektrischen Fische, und bei den organischen Funktionen überhaupt, die man als galvanische Wirkungen anspricht, könnten sich durch ihn neue Ansichten eröffnen, und ein neuer Typus der Erklärungsformen. Die Nerven, konzentrirt bei ihrer Wurzel im Gehirn, dann sich verzweigend in ihrem Fortlauf zur Peripherie, gäben an und für sich durch die hier geringere dort gröfsere Menge ihrer Berührungspunkte mit der übrigen thierischen Masse die Bedingungen elektrischer Ladungen, ohne dafs man (wie bisher) nöthig hätte, sich nach einem dritten chemisch verschiedenen Faktor umzusehen.

Es ergeht aus diesen Bemerkungen, dafs Aufforderung genug da ist, die Realität und den Mechanismus der von Herrn Zamboni angekündigten zweigliedrigen Säule zu prüfen, wo das elektromotorische Prinzip ein blofs geometrischer Unterschied der Berührungsflächen ist. Die Neuheit, die eigenthümliche Schwierigkeit des Gegenstandes, und auch die gebotene Kürze dieses Vortrags, erlauben nur einige Grundzüge dieser Angelegenheit zu entwerfen.

Herr Zamboni fand, dafs wenn man mehrere Scheiben von einem auf einer Seite mit Metall belegten Papier, z. B. sogenanntes Silberpapier, übereinander schichtet, eine wirkliche galvanische Säule entsteht aus Ketten von nur zwei Gliedern, nämlich die Metallfolie und das feuchte Papier (*la carta, o a meglio dire, l'humidità naturale di questo corpo*). Die Polarität entsteht daher, dafs bei der Schichtung jede Papierscheibe an der metallisch belegten Seite in der innigsten Berührung mit ihrem eigenen Zinn, und an der Kehrseite in einer viel lockerern und unvollkommneren mit dem Zinn der folgenden Scheibe tritt. 24 solcher Silberpapierscheiben bildeten eine Säule mit zwei Polen, wovon der Eine bei Ableitung des Andern den Kondensator in einer Terz so lud, dafs das Elektrometer um ein Drittel Zoll divergirte. Die Papierseite war positiv, die Metallseite negativ, jedoch mit bedeutenden Anomalien und räthselhaften Sprüngen. Einige Säulen der Art, am Morgen thätig, waren nach 12 Stunden ganz erschöpft. Funfzig Schichten von einer Art Papier gaben an gewissen Tagen nicht soviel als 10 von einer andern. Feuchte sowohl als trockene Luft belebten die Einen und tödteten die Andern. Häufig verwandelte sich die Polarität in die entgegengesetzte: was heute der + Pol war, ward morgen der —. Zwei zugleich erbaute Säulen von verschiedenen Papieren derselben Art zeigten ganz entgegengesetzte Lagen ihrer Pole. Die Feuchtigkeit der Atmosphäre und des Papiers schien im Ganzen den entschiedensten Einflufs zu haben. Denn wenn man die Feuchtigkeit konstanter gemacht hatte durch Bestreichung aller Kehrseiten mit Honig, dann waren die Säulen viel schneller im Laden und durchaus konstant, aber die Intensität war viel geringer; sie forderten 4 bis 5 Mal mehr Lagen, und schon nach 24 Stunden war alle Wirkung erloschen, wahrscheinlich weil nun die Feuchtigkeit das Papier so durchzogen hatte, dafs der feuchte Leiter von beiden Seiten gleich innige Berührung mit dem Metall hatte. Bei diesen wurde der feuchte Leiter +, das Metall —.

Eine schwache elektrische Ladung hatte ich bereits vor vielen Jahren zufällig bemerkt bei mehreren zu einer andern Absicht aufgestapelten Scheiben Goldpapier, hielt sie aber für den natürlichen Erfolg einer zufälligen Reibung, verbunden mit der halbleitenden Eigenschaft des Papiers; und ich mufs gestehen, dafs eben das Schwankende und Desultorische der von

Herrn

Herrn **Zamboni** gefundenen Polaritäten mich anfänglich in dieser Ansicht bestätigten. Von diesem ungünstigen Vorurtheil kam ich jedoch sehr bald zurück. Die Existenz dieser zweigliedrigen Säulen leidet keinen Zweifel. Eine solche, die ich zusammensetzte aus 1100 Schichten mit Kupfer belegten Papiers (sogenannten Goldpapiers), ladete isolirt den Kondensator an jedem Ende entgegengesetzt; sie hatte ihren Indifferenzpunkt gerade in der Mitte: die Ableitung an dem einen oder dem andern Pol brachte den Entgegengesetzten auf ein gröfseres Maximum der Spannung. Gerade dasselbe zeigten schon dreifsig Schichtungen, nur minder kräftig. Und eben so 100 Schichtungen überzinnten Papiers (Silberpapier).

Die Umkehrungen der Pole, die **Zamboni** erwähnt, sah ich bei diesen Säulen sehr selten; die gröfsere von 1100 Schichtungen habe ich zwei Monat hindurch beobachtet, und blofs gefunden, dafs ihre Wirkung allmälig abnahm, und am Ende ganz erlosch, aber ohne Uebergänge ins Entgegengesetzte, und eben so verhältnifsmäfsig mit den kleineren. Höchst auffallend war hier, wie bei allen sogenannten trockenen Säulen, der Einflufs der Temperatur. Die Säule von 1100 Schichtungen brauchte nur eine Viertelstunde dem Sonnenlichte ausgesetzt zu sein, um das Elektrometer ohne Kondensator unmittelbar bis zum Anschlagen zu laden und ihre Spannung auffallend schnell wieder herzustellen, während in der gewöhnlichen Temperatur ein guter Kondensator über fünf Minuten brauchte, um bei dieser durch die Dauer bereits sehr geschwächten Säule die ersten Spuren einer Divergenz an demselben Elektrometer zu zeigen.

Zamboni findet als den normalen Zustand dieser Art Säulen die positive Ladung des Papiers und die negative des Metalls; ich hingegen finde gerade umgekehrt, sowohl für Kupfer- als für Zinnpapier, den Pol, nach welchem das Metall liegt, positiv, und den entgegengesetzten negativ. Dieses könnte gewissermafsen den von **Zamboni** erwähnten Anomalien zugezählt werden, wenn wir nicht sogleich denselben Widerspruch zwischen den Zambonischen Resultaten und den meinigen wiederfänden in einem Falle, wo nach **Zamboni** durchaus keine Abweichungen von einem normalen Zustande denkbar sind, oder wo er wenigstens nie dergleichen wahrgenommen hat. Doch es ist sehr wenig Hoffnung, die durch so

viele Anomalien verschlungenen Gesetze dieser elektrischen Systeme mittelst der geschichteten Papierstreifen zu entdecken, weil die Verschiedenheit der Materiatur und des technischen Verfahrens beim Metallisiren des Papiers verborgene Heterogeneitäten mit ins Spiel bringt, und weil man, nicht ganz mit Unrecht, in dem günstigsten Fall immer noch Spuren von Wirkungen einer wahrhaft dreifachen Kombination: **Metall, Papier** und **hygroskopisches Wasser**, vermuthen kann.

Am meisten tauglich zu diesen Untersuchungen ist daher der Becher-Apparat, der auch über die Theorie der dreigliedrigen oder Voltaschen Säule entschiedene Klarheit zuerst gewährte.

Zamboni ist uns in der Ausführung vorangegangen. Quadrate von Zinnfolie, ½ Zoll Fläche, mit sehr fein auslaufenden Spitzen, wurden von ihm alternirend mit ihren breiten und schmalen Oberflächen in 30 Uhrgläsern mit destillirtem Wasser in symmetrisch abwechselnder Berührungsfolge vertheilt. Ein Kondensator, an dem Ende angebracht, gegen welches zu die breitern Oberflächen lagen, gab nach kurzer Berührungszeit (½ Minute) negative Ladung, wenn das Glas am entgegengesetzten Ende, gegen welches zu die Spitzen lagen, mit dem Boden in Verbindung war: und eben so entschieden war die positive Ladung des Pols der Spitzen.

Tauchten die Metallstreifen in alle Gläser mit gleichen Oberflächen, so war keine Polarität, welche jedesmal wieder zum Vorschein kam, wenn die eingetauchten Oberflächen wieder ungleich gemacht wurden mit symmetrischer Alternation.

Zink gab ihm ebenfalls negative Ladung des Pols der breiten Flächen und positive für den Pol der Spitzen; nur daſs mit zunehmender Oxydation des Zinks die Spannung je mehr abnahm und am Ende verschwand, welches beim Zinn nicht der Fall gewesen sein soll.

Ich konstruirte aus 30 Gläsern, wovon jedes beiläufig 1 Pfd. Regenwasser enthielt, einen Becher-Apparat mit bloſsem Zink, aber von sehr verschiedenen Berührungsflächen, die eine von 29 Quadratzoll, die andere von 2

Quadratlinien. Schon nach einigen Minuten war eine sehr verschiedene Polarität; das Bennetsche Elektrometer kam durch Einen Kondensator zum Anschlagen, und mittelst Zweier erhielt man Divergenzen von 5—6°— am Voltaschen, wenn der jedesmalige entgegengesetzte Pol mit dem Boden in ableitender Berührung war. Waren beide Pole des Apparats isolirt, so gab das 15te Glas, als das mittelste, durchaus keine Divergenz, und zeigte sich als der genau beide Theile halbirende Mittelpunkt; so wie aber die Ableitung an dem positiven oder negativen Endpunkt angebracht wurde, gab dieses mittelste Glied der Säule die entsprechende negative oder positive Spannung.

Es ist daher ein wahrhafter Ladungsprozeſs, ganz analog dem der Säule mit dreifacher Heterogeneität, nicht zu bezweifeln, wenigstens für den ersten Augenblick der Zusammensetzung: denn hinterher folgen scheinbare Anomalien. Da ich in diesem Versuche das Zink positiv und das Wasser negativ ſinde, gerade entgegengesetzt der Bestimmung des Herrn Zamboni, so war an sich möglich, daſs die Verschiedenheit in der absoluten Gröſse der Apparate diesen Unterschied bedingte. Bei dem meinigen wirkte eine Gesammtſläche von 870 Quadratzoll Zink auf eine Gesammtmasse von beiläufig 30 Pfund Wasser; bei Zamboni hingegen wirkten nur 15 Quadratzoll Metallfläche auf so viel Wasser als 30 Uhrgläser fassen können. Ich konstruirte daher einen kleineren Becher-Apparat von 30 Schalen, wo die Zinkscheiben nur einen Quadratzoll maſsen, aber auch hier fand ich den Pol der gröſsern Flächen positiv, den der Spitzen negativ. Ich weiſs mir diesen Widerspruch nicht zu lösen: sollte er etwa von einer chemischen Verschiedenheit der angewendeten Metalle herrühren? oder liegt der Trug in der Anwendung des Kondensators oder in der Auslegung seiner Angabe? Ich glaube in beiden Hinsichten für meine Versuche mich verbürgen zu dürfen.

Folgende Sätze enthalten einige Resultate meiner bisherigen Prüfung, die jedoch bei einer so neuen und schwierigen Sache nur als vorläuſige zu nehmen sind.

1) Die Intensität der Wirkung scheint nicht der absoluten Gröſse der Oberſlächen proportional zu sein. Dreiſsig Zinkplatten, jede von

29 Quadratzoll, und dreifsig, von 1 Quadratzoll jede, gaben fast dieselbe Spannung. Ob die absolut kleinen Oberflächen, auf grofse Wassermassen wirkend, einen Unterschied geben, mufs noch untersucht werden, und ist sehr wichtig.

2) Die Dauer der Wirkung scheint sich aber nach der Gröfse der Oberfläche zu richten. Für die Dauer des grofsen Apparats mit Zinkflächen fand ich beiläufig so viel Wochen, als Tage für die Dauer des kleinen.

3) Verschiedene Metalle geben verschiedene Polarität, und zwar, wie es scheint, nach ihrem Werth in der Spannungsreihe. Dreifsig Quadrate von reinem Silber, jedes zu einem Zoll, wurden im kleinen Becher-Apparat konstruirt. Hier war die Polarität das Umgekehrte von der des Zinks, nämlich negativ für den Pol der breiten Flächen, positiv für den der Spitzen. Eine genaue Prüfung zeigte mir, dafs in der That Wasser positiv wird gegen eine einzelne Zink-, und negativ gegen eine einzelne Silberplatte.

4) Alle elektromotorischen Apparate dieser Art, sowohl die säulenartigen als die Becher-Apparate, verlieren nach längerer oder kürzerer Zeit alle elektrische Spannung.

5) Führt man bei den bereits erloschenen einen höheren additionellen Grad des geometrischen Unterschiedes zwischen ihren Spitzen und ihren breiten Oberflächen ein, so zeigt sich sogleich die vorige Thätigkeit wieder. Wenn nämlich der Becher-Apparat, sowohl bei Zink als bei Silber, aufgehört hatte zu wirken, legte ich unter Wasser auf jede breite Fläche ein Quadrat von demselben Metall, ohne an den Spitzen etwas zu ändern, und fand die Ladung wieder hergestellt.

Aus diesem Versuche folgt: *a*) dafs das Erlöschen der Thätigkeit nicht von einer veränderten Qualität des Wassers abhängt, denn dieses blieb unverändert bei der Einführung der additionellen Oberflächen. *b*) Aber auch nicht durch die Oxydation der Metalle scheint dieses Er-

löschen bedingt zu sein, denn reines Silber wird nicht wahrnehmbar oxydirt durch bloſses Wasser, und doch erlosch der Silber-Apparat fast schneller wie der Zink-Apparat. Herr Zamboni, der nur mit mehr oxydabelen Metallen gearbeitet hat, bezieht das Erlöschen der Thätigkeit und die Umkehrung der Pole des Zink-Apparats auf den vom elektrischen Werth des Wassers verschiedenen Werth des Zinkoxyds im Konflikt mit regulinischem Zinn. Hierin muſs ich ihm widersprechen, nicht bloſs auf den Grund meiner obigen Beobachtung mit dem Silber, sondern auch, weil ich den elektrischen Werth des Zinkoxyds gleichartig dem des Wassers finde. Die Gelegenheit zu dieser Untersuchung gab mir der oben erwähnte Becher-Apparat von 870 Quadratzoll Zinkblech, der nach anderthalb Monat so viel Oxyd erzeugt hatte, daſs nicht bloſs beide Oberflächen gleichförmig damit bedeckt waren, sondern daſs auch in jedem der dreiſsig Gläser der Boden mit einem dicken Niederschlag belegt war, welcher gesammelt und auf einer glühenden Eisenmasse scharf abgeäthmet 572 Gran wog, und theils aus reinem, theils aus kohlensaurem Zinkoxyd bestand. Mit diesem Produkt der Oxydation wurde eine metallisch blanke Zinkplatte von 56 Quadratzoll bedeckt; aber sowohl in dem feuchten Zustande, in welchem dieses Oxyd das Metall des Apparats überzogen hatte, als im nachherigen scharf getrockneten, wurde das Oxyd bestimmt negativ gegen das metallische Zink befunden, gerade wie das Wasser selbst; so daſs die Umkehrung der Pole nicht geradezu von der bloſsen Oxydation abgeleitet werden kann, wenigstens nicht in dem Sinne, wie Herr Zamboni es nimmt.

6) Die Natur der Flüssigkeit ist auch bei diesen elektromotorischen Systemen von entschiedenem Einfluſs. Zinn hatte im Becher-Apparat mit reinem Wasser nach zwei Tagen aufgehört mit bestimmter polarischer Spannung zu wirken: ich löste in jedem der dreiſsig Gläser einige Gran salzsaures Natron, und augenblicklich war die frühere — Elektrizität des Pols der Spitzen und die + Elektrizität der breiten Flächen in einer Intensität und Menge wieder hergestellt, die das frühere weit übertraf; aber die Dauer dieser Spannung war im umgekehrten Verhältniſs ihrer Intensität. Die komparative Wirkung von

sauren und basischen Flüssigkeiten gab nach Verschiedenheit der Metalle so verwickelte Erscheinungen, daſs ich noch keine Uebersicht gewinnen konnte.

Diese ganze Klasse von Kombinazionen bietet überhaupt so viele Anomalien und Uebergänge aus einem Zustande in den entgegengesetzten, daſs es nur einer sehr anhaltenden Aufmerksamkeit gelingen kann, eine durchgängige Gesetzmäſsigkeit für sie aufzufinden; um so mehr, da die stets unerlässige Anwendung des Kondensators uns oft mit möglicher Täuschung bedroht.

Krystallographische Fundamentalbestimmung des Feldspathes.

Von Herrn C. S. Weiss *).

Das Krystallisationssystem des Feldspaths bedarf einer verbesserten Grundbestimmung. Wenn man erwägt, wie weit von der einfacheren Regel entfernt, wie sonderbar in seinen Eigenthümlichkeiten dieses System dem Beobachter erscheint, wie leicht in dem Gang seiner Umgestaltung das Band eines strengen Zusammenhanges dem Auge sich verbirgt, so muſs man zuvörderst gestehen, daſs die von sehr genauem Studium zeugende Darstellung desselben, wie wir sie bereits besitzen, sehr verdienstlich ist; aber man darf sich nicht wundern, wenn die Auffindung seiner verborgnen Grundverhältnisse länger als in andern Fällen erschwert blieb, und erst durch vergleichende Kenntniſs der ihm ähnlichsten Krystallisationssysteme andrer Mineraliengattungen vorbereitet werden muſste. Die Forderung an die Art und Weise einer zu entwerfenden Grundbestimmung eines krystallinischen Systems muſste sogar erst, sich selbst einer Regel bewuſst, Klarheit erhalten; bis dahin war der Versuch einer Annäherung allzugroſsen Zufälligkeiten ausgesetzt. Steigert aber die allgemein-naturhistorische Wichtigkeit des Gegenstandes das Bedürfniſs einer wiederholten und weiter schreitenden Untersuchung, so ist unter den Problemen dieser Art das eben vorliegende gewiſs ausgezeichnet; denn wenige Fossilien sind für die gesammte Bildungs-

*) Vorgelesen den 13. Juni 1816.

geschichte der Erde von einer höhern, oder auch nur gleich hohen Bedeutsamkeit, als die Bildung des Feldspathes.

Romé de Lisle's sorgsame Messungen liegen sichtlich denjenigen Bestimmungen zum Grunde, welche der klassische Autor in der strengeren Krystallographie unsrer Zeit, Haüy, in seinem *Traité de minéralogie*, über den Feldspath gegeben hat. So wie er in dem gröſsten Theile seiner früheren Arbeiten an die von Romé de Lisle durch Beobachtungen ausgemittelten Winkel sich anschloſs *), und durch eine sich denselben aufs beste nähernde geometrische Voraussetzung ihnen einen möglichst einfachen Ausdruck zu substituiren, den Zusammenhang der Glieder desselben Systems aber durch angenommene Decrescenzen, welche im Grunde nichts anders als ein geometrisch bestimmtes Verhältniſs irgend eines abgeleiteteren Gliedes gegen eine angenommene Grundform angeben, bestimmt auszudrücken bemüht war: so gewann durch seine Darstellung, hier wie überall, die Kenntniſs vom Krystallisationssystem des Feldspathes mit dem strenger geregelten Zusammenhang in sich zugleich einen geometrisch bestimmten Ausdruck, dessen wohlbegränzter Charakter ein sonstiges Schwanken ausschloſs, und welcher überall Individualität so wohlthätig scheidet. Dennoch blieben die Grundlagen des geometrischen Bildes, welches er aufstellte, mit aller Eigenthümlichkeit, in welcher es auftrat, in den Romé de Lisle'schen Beobachtungen und Angaben nachweisbar.

Schon Romé de Lisle gab die geschobene vierseitige Säule des Feldspaths zu 120°, die sechsseitige gleichwinklich an; er bestimmte die Neigung der Zuschärfungsflächen des Endes (P und x in den Haüyschen Abbildungen) gegen einander zu 150°, die Neigung der dem vollkommen blättrigen Bruch parallelen Zuschärfungsfläche P gegen die Seitenkante, auf welche sie aufgesetzt ist, zu 115°, und die von der andern Zuschärfungsfläche x gegen die unter ihr liegende, y, zu 150°; selbst die Fläche o der Haüyschen Abbildungen ist von Romé de Lisle richtig und treffend genug beschrieben, so daſs ihre Lage gegen die übrigen Krystallisationsflächen, obgleich nicht nach einer Decrescenzannahme, dennoch geometrisch vollkommen bestimmt war. Mehr aber noch: die beiden Umstände, welche auf die Natur des von Haüy aufgestellten geometrischen Bildes die entscheidendste Wirkung hatten, nämlich erstens die angenommene strenge Gleichheit zwischen

*) Vgl. Haüy's *Tableau comparatif etc.*, *p.* 306. Note.

zwischen dem Winkel, unter welchem die erste Zuschärfungsfläche *P* auf ihre Seitenkante aufgesetzt ist, und ihrem eignen ebnen Winkel, welchen sie an dieser Seitenkante erhält, und zweitens die nicht vollkommene Gleichheit in den Winkeln, unter welchen die erste und die zweite Zuschärfungsfläche (*P* und *x* bei Haüy) auf ihre Seitenkanten aufgesetzt seyn sollen, — diese beiden Umstände finden sich von Romé de Lisle gleichfalls schon angegeben. Der letztere zwar würde bei Romé de Lisle eine Inconsequenz zu nennen seyn, wenn seine Messungen jemals hätten sollen für mathematisch scharf gelten, und nicht für Annäherungen, wie sie es ihrer Natur nach nur seyn konnten; es bedurfte deshalb von Seiten Haüy's nur einer kleinen Abweichung von dem einen oder dem andern angegebenen Winkel, einer Abweichung, wie sie sich mit dem Grade von Sicherheit oder Gültigkeit der Messungen, dessen das von Romé de Lisle eingeführte Instrument fähig war, wohl vertrug, um jene zwei charakteristischen Umstände mit den Messungen selbst in ein geometrisches Bild zu vereinigen. Ohne eine gewisse Vorliebe aber für den einen wie für den andern dieser zwei Umstände würde das Bild, das wir aufgestellt erhalten haben, unfehlbar ein anderes geworden seyn.

An einem festen Prinzip oder auch nur einer gleichförmigen Methode für die Bestimmung der geometrischen Grundverhältnisse in einem Krystallisationssystem fehlte es hiebei noch gänzlich. Mit völliger Willkühr, mit welcher geometrische Körper sich denken lassen, konnte der bestimmtere Charakter in Eigenschaften, welcherlei Art es seyn mochten, gelegt werden, wenn nur das Angenommene den Thatsachen der Beobachtung, so weit sie sprechend oder gekannt genug waren, — und da blieb noch ein ziemlich weiter Spielraum — leidlich sich bequemte. Der natürliche Wunsch, den Ausdruck so leicht und einfach als möglich zu bekommen, und das Gefühl, daſs, je verwickelter die Bestimmungen wurden, desto mehrere ähnliche mit gleichem Rechte und in gleichen Graden als mit der Beobachtung vereinbar hätten angenommen werden können, und daſs dann die Hoffnung um so schwächer, und bald völlig aufgegeben werden muſste, die richtige gewählt zu haben, — hielt noch die auſserdem ganz ins unbestimmte schweifende Vielfältigkeit möglicher Suppositionen in übersehbaren Grenzen; dennoch blieb sie groſs genug, daſs unter gleichen übrigen Umständen gewiſs ein jeder andrer Schriftsteller ein andres geometrisches Bild der Sache aufgestellt haben würde. Daſs Haüy der einzige seiner Zeit war, welcher

ein solches aufstellte, hat uns wenigstens den groſsen Vortheil verschafft, daſs wir nicht in ein buntes Gewühl von verschiedenen Aufstellungsweisen gerathen sind, die alle auf gleicher Stufe des Werthes ständen, und von welchen keine ihre Vorzüge vor den andern würde geltend machen können. Und wir wollen dafür wachen, daſs nicht Eigenthümlichkeiten dieser Art Sitte unter den Schriftstellern werden mögen; denn ohne neuen Gewinn, nachdem schon die erste Bestimmung uns den Dienst erzeigt hat, das Bedürfniſs eines festen Punktes für die geometrische Betrachtung zu befriedigen, würden wir diesen Gewinn selbst in der Vervielfältigung, in welcher er uns dargeboten würde, nur wieder verlieren, und statt zunehmender Schärfe, Wahrheit, Treue der Darstellung, zuletzt nur in eine geometrische Bilderverwirrung gerathen.

Aber so weit greife auch der Nachtheil der Autorität nicht um sich, daſs sie die Grenze zwischen dem Beobachteten und dem Angenommenen verhülle und umdunkle. Im Gegentheil bemühe sich gerade das Geltende in dem Lichte, wie es entstanden ist, richtig darzustehen vor der Welt; und es wird nur der ächte Fortschritt sich ihres Beifalls versichern können.

Damit das Wesentliche unsrer heutigen krystallographisch-geometrischen Bestimmungen und ihr wissenschaftlicher Werth in seinem richtigeren Lichte erscheine, unterziehen wir uns hier an diesem Beispiele, als an einem merkwürdigeren, der näheren Auseinandersetzung seines Ursprunges.

Haüy veränderte die von Romé de Lisle angenommene primitive Form. Dieser hatte sie als ein Parallelepiped beschrieben *), gebildet von den Flächen des vollkommenen zweifachen, rechtwinklich sich schneidenden Durchganges der Blätter (*P* und *M* bei Haüy), nebst denen, welche den geraden Abstumpfungsflächen der stumpfen Seitenkante der (von den Haüyschen Flächen *T* und *l* gebildeten) geschobenen vierseitigen Säule parallel sind; diese Abstumpfungsflächen kommen indeſs als äuſsere Krystallisationsflächen nur sehr selten — Haüy gedenkt ihrer unter den von ihm beschriebenen Varietäten der Krystallisation gar nicht —, und, wo sie auch vorkommen, stets nur sehr untergeordnet, im Innern aber als blättriger

*) In unsrer beigefügten Fig. 1., welche die gleichwinkliche sechsseitige Säule mit schief angesetzter Endflache vorstellt, kann man das eingezeichnete Stück $fgkhf'g'k'h'$ als der Romé de Lisle'schen primitiven Form entsprechend ansehen; $fhg'k'$, und $gkf'h'$ sind gerade Abstumpfungsflachen der Seitenkanten ao' und $a'o$; $hkf'g'$ entspricht der Haüyschen Fläche *M*, und unser Sechseck $ahkogf$ der Haüyschen Fläche *P*.

Bruch schwerlich bemerkbar, vor. Romé de Lisle liefs also bei seiner Wahl einer primitiven Form die zwar unvollkommenen, jedoch stets bemerkbaren, Blätterdurchgänge unbeachtet, welche den Seitenflächen der geschobenen vierseitigen Säule (*T* und *l*) parallel gehen; er suchte sich, wie man aus seiner *Cristallographie, 2e édit. T. II. p.* 458 u. ffg. sieht, durch seine Annahme ganz den Beobachtungen Saussure's anzuschliefsen, welcher indefs nicht sowohl den natürlichen Begrenzungen, noch auch dem blättrigen Bruche des frischen Feldspathes, sondern vielmehr den häufigen Sprüngen gefolgt war, welche der glasige Feldspath, muthmafslich schon im Feuer verändert, zu zeigen pflegt, und vielleicht im Feuer selbst erhalten hat. Die Winkel, welche von Saussure unbestimmt gelassen waren, bestimmte Romé de Lisle nicht nach jenen Sprüngen, sondern durch Messungen der korrespondirenden Stellen an den Krystallisationsflächen. Das Romé de Lisle'sche Parallelepiped war nun zwar den Winkeln, nicht aber den Verhältnissen seiner Flächen- und Körper-Dimensionen nach bestimmt, und daher zur Bestimmung der Lage abgeleiteter Flächen nach Decrescenzen noch nicht geeignet.

Haüy folgte in seiner Annahme der primitiven Form dem deutlicheren blättrigen Bruche; er liefs mithin die Flächen *fhg'k'*, *gkf'h'* unsrer Fig. 1., welche nach Romé de Lisle den Winkel von 65° und 115° mit den Flächen des Hauptbruches *P* bildeten, aus der Begrenzung seiner primitiven Form hinweg, so wie sie hernach auch aus der ganzen Beschreibung des Systemes selbst wegblieben, und nahm dagegen eine der Flächen der geschobnen vierseitigen Säule, d. i. *T* oder *okf'a'* unsrer Fig. 1., nebst der ihr parallelen zu den Flächen des vollkommenen, rechtwinklichen blättrigen Bruches hinzu, während er die andre *ahg'o'*, d. i. die in seinen Abbildungen mit *l* bezeichnete, nebst der ihr parallelen wegliefs; und so construirte er sein allerdings sonderbar verschobenes Parallelepiped als primitive Feldspathform *).

So naturgemäfs Haüy hier zu verfahren schien, so drückte doch nun seine Darstellung ein Nachtheil, von welchem die Romé de Lisle-

*) In Fig. 7. haben wir diese Form, wie er sie Taf. XLVIII. Fig. 78. seines Lehrbuchs abgebildet liefert, copirt, und die von ihm als secundar behandelten Flachen *ade''o''*, *eoa''d''*, welche völlig gleichen Werth mit *aed''o''*, *ode''a''* haben, und, wie diese, Seitenflachen der symmetrischen geschobenen vierseitigen Saule von 120° sind, in seine primitive Form eingezeichnet.

sche frei geblieben war. Die Seitenfläche der geschobnen vierseitigen Säule, da sie in der primitiven Form ihr Gegenstück, die zu ihr gehörige und ihr gleiche, *l* (*ade″o″* unsrer Fig. 7. oder *ahg′o′* unsrer Fig. 1.) verloren hatte, verzog und verrenkte gleichsam die ganze Gestalt; die Symmetrie war verschwunden, und die gewählte primitive Form keineswegs mehr die Mitte des Systems; sie war aus der Mitte desselben völlig herausgerückt, während sie bei Romé de Lisle diese Mitte wohl gehalten hatte. Wiederum entsprach nun auch das Aeuſsere dem Innern nicht mehr; die vollkommene Symmetrie, welche das Aeuſsere in der Säule und was auf sie sich bezog, durchaus und unläugbar an den Tag legte, wurde durch die Theorie umdunkelt und verschwand aus ihr; Theile des Systems, welche vollkommen gleichartig und als dieselben erschienen, wurden in der Theorie zu ganz verschiedenen gemacht; dieselben Flächen, je nachdem sie rechts oder links gegen die eine oder die andere Seitenfläche der geschobnen Säule in dem gleichen Verhältnisse standen, erhielten verschiednen Werth, veschiedne Decrescenzgesetze, von denen sie stammen sollten, verschiedene Ausdrücke; und doch widersprach die durchgängige Gleichheit aller ihrer physikalischen Eigenschaften und Kennzeichen jeder seynsollenden Verschiedenheit in ihrem Wesen. Die Theorie selbst wurde schwierig und unbehülflich, wo der Zusammenhang der Sache selbst sichtlich so viel planer und einfacher war; jeder muſste Schwierigkeiten und wunderliche Verschlingungen in der Theorie fühlen, welche, da sie zu weiter nichts, als dem einfacheren, was für sich zugänglich war, führten, gleichsam vergeblich schienen, und, sobald man bei dem erkannten harmonischeren Resultat der Wirklichkeit ankam, auch wie vergessen waren; Nachtheile, welche einem naturgemäſsen Gang der Theorie schwerlich je zur Seite gehen möchten. Aber ich habe überdem schon früher *) gezeigt, daſs es ein Irrthum sey: es gehe nur der einen Seitenfläche der geschobnen vierseitigen Säule, und nicht der zweiten auch, Durchgang der Blätter parallel; hiedurch wird der Grund gehoben, welcher Haüy bestimmte, die eine für primitiv anzusehen, die andere nicht; und so tritt die Symmetrie wieder in ihre Rechte.

Welches aber die primitive Form des Feldspathes sey, das ist nicht eigentlich die Hauptfrage, die wir zu untersuchen haben. Die Begriffe, welche man sich über primitive Formen im allgemeinen zu machen pflegt,

*) S. die deutsche Uebersetzung von Haüy's Lehrbuch d. Min., Th. II. S. 714. 715.

bedürfen einer wesentlichen Berichtigung. Man denkt sich nämlich primitive Formen sowohl als primitive Flächen im Gegensatz von secundären so, dafs die primitiven Flächen als Begrenzungsflächen von Theilen im Innern der Masse vorhanden seyen, die secundären nicht, und dafs, diesem gemäfs, primitive Formen ein reelles Daseyn im Innern der Masse haben, dessen die anderen, die secundären, entbehren. — Diese Vorstellung aber ist ein Irrthum, eine Deutung gewisser einseitig aufgefafster Thatsachen, welche nicht allein andre Deutungen gar wohl zulassen, sondern auch bei ihrer vollständigeren Auffassung und Erwägung gerade jene Deutung ausschliefsen. Thatsache ist der Unterschied der verschiedenen in einem und demselben Krystallisationssystem verbundenen Flächenrichtungen; dieser Unterschied zeigt sich, wie in allen physikalischen Eigenschaften, so insbesondere in der Cohäsion, und der aus ihr fliefsenden leichteren oder schwereren Trennbarkeit der Masse in der einen oder der anderen Flächenrichtung. Er ist wirklich da, und gesetzlich; die leichtere Trennbarkeit in bestimmten Ebnen, vorzugsweise gegen die von diesen Ebnen abweichenden Richtungen, ist entschieden gröfser für die einen; sie nimmt Gradweise ab für die andern, und verschwindet für alle Krystallisationsflächen nirgends gänzlich; fortgesetzte Beobachtung findet sie auf für eine ganze Reihe und Mannichfaltigkeit auch solcher, in Bezug auf welche sie minder offen am Tage liegt; sie für die übrigen, wo sie etwa als blättriger Bruch noch nicht beobachtet ist, leugnen zu wollen, würde willkührlich und gegen die Analogie seyn, würde schrittweise durch jede folgende Beobachtung widerlegt werden, und, an und für sich betrachtet, einen Theil der Structur aus dem Innern an die blofse äufsere Fläche verweisen wollen, der ja doch aus dem Innern nur abstammen und erklärbar seyn kann.

Ein ähnlicher Unterschied, wie in der Cohärenz, und den von ihr abhängenden Erscheinungen des Bruches, bewährt sich für die verschiedenen Glieder eines Systems in der Beziehung, die sie unter einander haben, in der näheren, einfacheren und wiederholten, welche der gröfsere Theil derselben immer auf gewisse bestimmte, und nicht so auf die übrigen, zeigt, in der Verknüpfungsweise, welche die einen zu relativen Mittelpunkten vielfältigen Zusammenhangs nach einfachen Gesetzen macht, während sie die andern an solche Mittelpunkte, auch wohl blofs mittelbar, zwar anschliefst, aber ohne dafs sie selbst zu ähnlichen Mittelpunkten würden. Der Rang, der höhere Werth, welchen deshalb die einen oder die an-

deren Richtungen in dem gesammten Systeme vor den übrigen haben, wird unverkennbar ein verschiedener für die verschiedenen; und ganz richtig wird man den einen einen primären, den andern einen secundären, eben so aber auch den dritten einen tertiären, oder folgenden einen noch spätern Rang anzuweisen haben. Gewiſs sind in dem Bau eines zu gröſserer Mannigfaltigkeit in sich entwickelten organischen Körpers die verschiedenen Organe von ungleichem Range und Werthe, und man wird den einen auch relativerweise einen primären, secundären, tertiären beilegen müssen; es wird auch da das, in der Zeit oder in der Virtualität frühere, Daseyn des einen die Bedingung für das Daseyn des andern enthalten; allein eine Mannichfaltigkeit von mehreren ungleichen Werthes wird selbst im ersten Ausgangspunkte der Entwickelung liegen; und keines wird sich in sich zu einer primitiven Bildung schlieſsen.

Von krystallinischen Bildungen gilt ein Gleiches. Primäre, oder, wenn man will, primitive Formen mögen daher allerdings solche genannt werden, aus welchen, als einfacheren, die übrigen harmonisch und bestimmt sich ableiten lassen, oder die, wenn das ganze System gekannt ist, durch alle vorhandene Beziehungen als die Hauptheile desselben erscheinen. Aber der Grad der Auszeichnung derselben, durch Cohärenz und Bruch sowohl, als durch die geometrischen Verhältnisse gegen die übrigen, kann verschieden seyn; eben deshalb ist auch der Begriff der primitiven Formen in verschiedenem Grade auf die verschiedenen Systeme anwendbar. Denn was in den einen in entschiedenerer Unterordnung gehalten wird, das windet in den andern sich gleichsam zu gröſserer Selbstständigkeit los.

Jede Annahme einer primitiven Form kommt überdem auf gegebene Flächen zurück, welche sie begrenzen.

Die Analyse der Gestaltung aber darf wohl nicht beim Gegebenseyn von Flächen, am wenigsten als bloſser Begrenzungsflächen, stehen bleiben; sondern wenn sie es mit dem Ursprung der Gestalt zu thun hat, und diesen nur in einer im Innern der Masse liegenden gegenseitigen Bestimmung aller verschiedener Richtungen im Raume finden kann, die sich gestaltende Masse also als eine solche ansehen muſs, in welcher ein innerer Unterschied des Verhaltens nach den verschiedenen Richtungen im Raume eintritt; so kann die Frage nach der eigentlichen Wurzel des Gestaltungs-Actes zuletzt doch nur ein gegenseitiges Verhältniſs mehrerer Linearrichtungen treffen, nach welchen die Masse verschieden sich äuſsert. Die Flächenrichtun-

gen werden auf irgend eine Weise doch aus Linearrichtungen abgeleitet werden müssen.

Alle Flächenbestimmung, und folglich auch jede beliebige Bestimmung einer primitiven Form, setzt daher eine tiefer liegende Bestimmung eines Verhältnisses von Linearrichtungen voraus. Und wie elementarer diese sind, zeigt sich auch daran, daſs, selbst wenn sie gegeben sind, ganz verschiednerlei Flächen, und folglich auch mehrerlei sogenannte primitive Formen, durch sie gleich unmittelbar bestimmt werden können. Würfel und Octaëder sind gleich unmittelbar construirbar, wenn auch für beide dasselbe Grundverhältniſs in Lineardimensionen: Gleichheit dreier unter sich rechtwinklicher Richtungen, gegeben ist. Selbst das Granat-Dodekaëder geht unmittelbar, und unabhängig, wie es scheint, von beiden, aus derselben Grundbedingung, hervor. Und so stets. Ja die Möglichkeit mehrerer verschiedener einfacher Körper, zu welchen ein bestimmtes Grundverhältniſs die Anlage in sich schlieſst, vergröſsert sich noch, wenn man den mannichfaltigen Gang, in welchem die gegebenen Grundglieder sich unter einander verbinden können, weiter verfolgt. Manche unter ihnen kann man immer einander gerade entgegengesetzt nennen, wie z. B. Würfel und Octaëder es in Bezug auf einander sind; die Eigenthümlichkeit andrer dagegen beruht in untergeordneteren Verschiedenheiten.

Gewöhnlich wird nun allerdings ein Krystallisationssystem mit dem Charakter auftreten, daſs es von diesen mehrerlei möglichen Weisen, bei gegebenen Grunddimensionen Flächen zu erzeugen, die eine oder die andre vorzugsweise ergreift, und sie theils in Beziehung auf Cohärenz durch den blättrigen Bruch, theils durch die Gesammtheit der Beziehungen aller Krystallisationsflächen unter einander als einen relativen Mittelpunkt seiner Flächenbildungen auszeichnet; und dann wird man in der durch solche Flächen begränzten Figur die primitive Form des Körpers am deutlichsten zu erblicken glauben. Allein ein andermal wird ein solcher V o r z u g der einen Art und Weise von Flächenbildung in Cohärenz oder in Mitte der Beziehungen sämmtlicher Krystallisationsflächen unter einander zweifelhafter und unsichrer werden; und dann wird weniger Grund vorhanden seyn, die eine Form vor der andern als primärer auszuzeichnen. Wie in allen andern Rücksichten, so unterscheiden sich die Charaktere verschiedener Krystallisationssysteme auch durch die Grade der A u s z e i c h n u n g, welche sie den ei-

nen ihrer Flächenglieder vor den andern geben, und der Ueber- und Unterordnung, in welche sie die einen gegen die andern stellen.

In der der Königl. Akademie im vorigen Jahre vorgelegten Abhandlung *) habe ich es als einen allgemeinen Satz aufgestellt: daſs alle Krystallisationssysteme sich in zwei groſse Abtheilungen bringen lassen, die einen, deren Wesentliches auf dem Verhältniſs dreier unter einander rechtwinklicher Dimensionen, die andern, auf dem Verhältniſs einer Dimension gegen drei andre auf der ersten senkrechte und unter sich gleiche beruhet. Ich stehe nicht an, den Feldspath unter die erste Abtheilung zu setzen; und es scheint mir ein Gewinn, wenn eine so wunderbar verwickelte Gestaltung, wie die des Feldspathes, auf ein so einfaches Grundgesetz, als die gegenseitige Bestimmung dreier unter sich rechtwinklicher Dimensionen, leicht und ohne Zwang zurückgebracht werden kann. Es liegt dann ferner am Tage, daſs der Fall des Feldspathes unter diejenigen gehört, wo die drei Grunddimensionen alle drei unter sich ungleich sind; und wie wir für diesen Fall drei Unterverschiedenheiten erwähnt und auseinandergesetzt haben, so gehört der Feldspath unter diejenige, wo unter zwei ursprünglich und geometrisch gleich gegebenen Gliedern ein physikalischer Unterschied sich eingesetzt hat, welcher dem einen auf Kosten des andern eine Präponderanz, ein Vorherrschen verschafft, während das zweite zurücktritt oder ganz verschwindet; das ist, der Feldspath gehört zu unsern zwei- und-ein-gliedrigen Systemen, welchen wir zur Erinnerung an eines der bekanntesten und ausgezeichnetesten dieser Art gern auch den mineralogischen Namen der augitartigen Krystallisationssysteme geben.

Solche Systeme erscheinen immer als symmetrisch geschobene Säulen (und deren Abänderungen) mit schief angesetzten, übrigens symmetrisch aufgesetzten Endigungen. Keine einfache Form wird der Betrachtung der ganzen Mannichfaltigkeit eines solchen Systemes als schicklicherer Ausgangspunkt, oder einfachere Mitte dienen können, — und das soll die sogenannte primitive oder Primär-Form — als die geschobene vierseitige Säule selbst, von gleichem Werthe ihrer Seitenflächen, mit einer schief angesetzten Endfläche, welche auf die eine der Seitenkanten der Säule gerad aufgesetzt ist, d. i. unser Hendyoëder **). Sind die Flächen einer solchen Form auch durch

*) S. den vorhergehenden Band der Abh. d. physik. Klasse, S. 289—336.

**) A. a. O. S. 317.

durch den blättrigen Bruch ausgezeichnet vor den andern, so kann nichts mehr Anspruch auf die primäre Form eines solchen Systemes machen, als sie. Beim Feldspath ist dieses Hendyoëder eine geschobne vierseitige Säule von 120°, mit der auf die stumpfe Seitenkante gerad auf-, und unter beiläufig 115° schief angesetzten Endfläche, welche dem vollkommensten Durchgange der Blätter parallel ist (s. Fig. 5. der beigefügten Kupfertafel, oder auch Fig. 79. Taf. XLVIII. des Haüy'schen Lehrbuches). Dies ist die einfachste Figur, in welcher sich für die Anschauung schon die Eigenthümlichkeit der Feldspathformen charakteristisch zeigt und gleichsam concentrirt. Schränken wir uns auf sie ein, so lassen wir freilich den zweiten vollkommenen Durchgang der Blätter aus der Begrenzung dieser ersten Figur hinweg. Nehmen wir ihn hinzu, so verwandelt sich unsre geschobne vierseitige Säule in die gleichwinklich sechsseitige, wie, in einer anderen Stellung genommen, Fig. 1. unsrer hier beigefügten Tafel, oder Fig. 81. Taf. XLVIII. bei Haüy; die Endigung bleibt wie vorher; die Figur ist etwas zusammengesetzter, aber sie fügt nichts wesentlich neues zu der vorigen einfacheren hinzu, was nicht aus dieser selbst schon sich ergäbe. Sieht man daher auf den einfachsten Ausgang in der Betrachtung eines Krystallisationssystems und seiner harmonischen Entwickelung, so möchte man hier schwerlich umhin können, einen der vollkommensten Durchgänge der Blätter zur Begrenzung der primären Form für entbehrlich anzusehen, während ein andrer unvollkommnerer dennoch hiezu unentbehrlicher ist.

Gehen wir zur blofs geschobnen vierseitigen Säule mit ihrer schief angesetzten Endfläche, d. i. zu dem Hendyoëder Fig. 5. zurück, so ist dasselbe allemal zu denken als entsprechend einem zwei-und-zwei-flächigen Octaëder $aeda'e'd'$ (Fig. 6.), dessen eines Flächenpaar mit den Seitenflächen unsrer Säule zusammenfällt, das andre aber von unsrer schief angesetzten Endfläche $aed(o)$, nebst der durch diese verdrängten, ihr ursprünglich gleichen und gegenüberliegenden Fläche $a'ed$ gebildet wird. Ein solches Octaëder könnte für die Betrachtung eines zwei-und-zwei-gliedrigen Systemes von gleichen Grunddimensionen mit unserm zwei-und-ein-gliedrigen als primäre Form gebraucht werden, wenn dann nicht andre hier nicht auseinanderzusetzende Rücksichten für das, was in einem solchen System eine Form zur primären auszeichnen würde, noch einträten. Der Charakter des zwei-und-ein-gliedrigen Systems bringt es mit sich, dafs von jenen zwei Flächen des Octaëders aed und $a'ed$ die eine verschwindet, während die an-

dre nebst den Seitenflächen der Säule sich verlängert, bis sie zur einzigen schief angesetzten Endfläche *aeod* (Fig. 5.) wird; eben so unten oder am entgegengesetzten Ende die parallele Fläche *a'e'o'd'*. So stellt auch Fig. 5. das Octaëder in unserm Hendyoëder eingezeichnet dar.

Sind nun die drei unter sich rechtwinklichen Dimensionen des entsprechenden eingezeichneten Octaëders die: *aa'*, *bb'* und *cc'*, so sind es dieselben auch für unser Hendyoëder, und es hat dieses nur eben seinen Ursprung aus dem Octaëder oder dem entsprechenden zwei-und-zwei-gliedrigen Körper genommen durch Verschwinden des einen Gliedes (*a'ed*) von zwei sich gleichen (*aed* und *a'ed*); es ist eben deswegen allgemeine Eigenschaft des so construirten Parallelepipedes, daſs die Linie *aa'* auf der Seitenkante *ao'* oder *a'o* senkrecht steht (weil *ao'* oder *a'o* parallel sind mit *cc'*, *aa'* aber senkrecht ist auf *cc'*); eine Eigenschaft, welche Haüy für seine primitive Form des Augites, der Hornblende und einiger anderer insbesondre angiebt. Ein so construirtes Parallelepiped, also auch mit der letzterwähnten Eigenschaft, in welcher zugleich das Gesetz für das Verhältniſs von Höhe zu Breite in demselben liegt, ist es eben, welches ich Hendyoëder in strengerer geometrischer Bedeutung genannt habe; und in dem Namen wird man die Eigenschaft des zwei-und-ein-flächigen bequem wieder ausgedrückt finden, wie in dem entsprechenden deutschen Wort: Zwei-und-Ein-Flächner *).

Daſs wir nun dem Feldspath diesen hendyoëdrischen Charakter streng beilegen, darin weichen wir, nicht allein im Ausdruck oder der Ansicht, sondern auch in der Sache selbst, von Haüy ab, ohne daſs wir glauben, uns von den Thatsachen zu entfernen. Haüy nämlich nimmt für die Fläche, welche wir für die verdrängte *a'ed* erklären, eine um ein weniges verschieden gegen die Seitenkante geneigte Fläche an, oder giebt seine Fläche *x* (Fig. 82. u. fgg. Taf. XLVIII. u. XLIX. des Haüy'schen Werkes) eine etwas andere Neigung gegen die Seitenkante, als seiner Fläche *P* oder unserer *aeod*; welchen Unterschied der Neigung wir hiermit nicht anerkennen **).

*) Will man sich ein solches Hendyoëder als zusammengesetzt denken aus dem eingeschlossenen Octaëder *aeda'e'd'* und zwei Tetraëdern *oeda'*, *o'e'd'a*, welche auf zwei Flächen *a'ed* und *ae'd'* des Octaëders aufgesetzt sind, so kann das geschehen, hat aber keine reellere Bedeutung.

**) Beim Zerschlagen eines Karlsbader Zwillingskrystalls nahm ich mehrmals einen versteckten Durchgang der Blätter, parallel mit der Fläche *x*, in dem einen Individuum wahr.

Haüy folgte hierin, wie wir schon oben erwähnten, einer Aeuſserung Romé de Lisle's (*Cristallogr., t. II. p.* 469.). Romé de Lisle sagt da: die Neigungen seyen einander nicht beide vollkommen gleich, ohne zu sagen, ob die zweite stumpfer oder schärfer sey als die erste, und ohne die zwei angegebenen Winkel von 115° und 130° zu berichtigen, aus welchen, wenn sie streng zu nehmen sind, der dritte abermals zu 115° folgt. Haüy indeſs, auf diese Aeuſserung Romé de Lisle's eben so, wie auf eine zweite Bemerkung desselben, wovon hernach, eingehend, setzt einen Unterschied der Neigung von beiläufig 1°, und macht den zweiten Winkel, oder den der Fläche *x* gegen die Seitenkante, zu dem stumpferen. Eigentlich aber hat Romé de Lisle in der erwähnten Stelle, wie der Zusammenhang sehr gut zeigt, nur den Unterschied der zweierlei Flächen, welchen wir gleiche Winkel beilegen, aussprechen wollen; dieses Unterschiedes bedurfte er zu seiner weiteren Beschreibung; und er ist vollkommen gegründet, nur in allem anderen mehr, als in dem Neigungswinkel gegen die Seitenkante. Daſs aber Romé de Lisle selbst nicht im Stande gewesen sey, diesen Unterschied mit Bestimmtheit durch Messung zu finden, zeigt sich am besten dadurch, daſs er, dessen ganzes Bemühen und Verdienst sonst war, so etwas nicht zu verschweigen, dennoch nicht einmal sagt, ob der zweifelhafte Winkel ein wenig stumpfer oder ein wenig schärfer sey, als der andre, und daſs er vielmehr die offenbare Inconsequenz begeht, die obige, nur beiläufig gemachte Aeuſserung und die widersprechenden Angaben der Winkel, wie er sie liefert, neben einander stehen zu lassen.

Ist aber das System des Feldspathes wahrhaft hendyoëdrisch, so erhalten auch die übrigen ausgezeichneten Krystallisationsflächen desselben die einfachen Werthe und Ausdrücke, wie die ihnen analogen in solchen Systemen überhaupt. Den Feldspath zeichnet, vergleichungsweise gegen andre ähnliche Systeme, besonders aus das Vorwalten der einzelnen schief angesetzten Endflächen, sowohl der vorderen *P*, als der verschiedenen *x*, *y*, *q* (vgl. die Haüy'schen Kupfertafeln), welche der hinteren oder entgegengesetzten Seite angehören, und von denen bald die eine, bald die andre mit der vorderen *P* eine mehr oder weniger unsymmetrische Zuschärfung giebt,

Er fiel, so scharf das Auge irgend urtheilen konnte, genau in die Verlängerung des vollkommnen blättrigen Bruches *P* in dem andern Individuum. Das wäre nicht möglich, wenn ein Unterschied der beiderseitigen Neigungen Statt fände; und so giebt diese Beobachtung den directesten Beweis, daſs ein solcher Unterschied nicht existirt.

deren weitere Veränderungen der Eigenthümlichkeit der Stellen, welche diese Unsymmetrie einsetzt, völlig entsprechen. Die besonders häufige und charakteristische Fläche *y* (s. die Haüy'sche Fig. 85. u. fgg.) — auf unsrer Kupfertafel Fig. 1. *gky* — wird die mit dreifachem Cosinus (bei gleichem Sinus mit der Haüy'schen Fläche *x* oder der Fläche *gkx* in unsrer Fig. 1.) in der vertikalen Zone; die Fläche *q* (Haüy, Fig. 89. 90.) — in unsrer Figur 1. *gkq* — wird umgekehrt die mit dreifachem Sinus bei gleichem Cosinus; die Flächen *o* (Fig. 86. u. fgg. bei Haüy), das strenge Analogon der Flächen *s* beim Augit, oder *r* bei der Hornblende (vgl. Haüy's Taf. LIV. Fig. 140. 153. u. m.), bekommen genau die nämliche Function wie dort *),

*) Wenn *a*, *b*, und *c* die Hälften der drei Dimensionen aa', bb', und cc' (Fig. 5. u. 6.) kurz bezeichnen, und *a* und a' den Unterschied der nach vorn oder hinten gekehrten Hälfte der Dimension aa', ferner $2a$, $3a$, $2b$, $3b$ u. s. f. den doppelten, dreifachen Abstand u. s. f. eines Punktes von dem gemeinsamen Durchschnittspunkt der Dimensionen oder ihrer Hälften in den angegebenen Richtungen *a*, *b* u. s. f., so läſst sich, wie ich in der folgenden Abhandlung ausführlicher gezeigt habe, eine jede Fläche, welche dem Systeme angehört, sehr bequem und schicklich durch das Verhaltniſs der drei Gröſsen ausdrücken, welche ihr in den dreierlei Dimensionen als Abstände von einem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte derselben zukommen; und der Ausdruck wird

für die in den Haüy'schen Abbildungen mit *P* bezeichnete Fläche -	$a : c : \infty b$
für die mit *x* bezeichnete - - - - -	$a' : c : \infty b$
für die mit *y*, - - - - - -	$a' : 3c : \infty b$
— — — *q*, - - - - - -	$3a' : c : \infty b$

NB. Alle Flächen, in deren Ausdruck das Glied ∞b sich befindet, gehören unsrer vertikalen Zone an.

Ferner wird der Ausdruck

für die in den H.'schen Figuren mit *o* sowohl als *o'* bezeichnete Fläche	$2a' : b : 2c$
für die mit *n* oder *n'* bezeichnete - - - -	$4a : b : 4c$
für *T* sowohl als für *l*, - - - - -	$a : b : \infty c$
für *M* - - - - - - -	$b : \infty a : \infty c$
für *z* oder *z'* - - - - - -	$3a : b : \infty c$

Noch habe ich am Feldspath, auſser diesen in den Haüy'schen Abbildungen vorkommenden Krystallisationsflächen, beobachtet:

eine gerade Abstumpfungsfläche der stumpfen Seitenkante der Saule von 120°, d. i. der Kante zwischen *T* und *l* bei Haüy, oder eine Flache $a : \infty b : \infty c$,

ferner eine Fläche $4a' : 3b : 12c$,

so wie sie auch zuweilen beim Feldspath, doch seltner als bei Augit und Hornblende, an die Stelle der schieflaufenden Endfläche x bis zum Verschwinden der letzteren treten, deren Längendiagonale mit ihrer schief laufenden Endkante coïncidirt; beim Feldspath übrigens wird man sie nie, wie beim Augit, die einzigen Flächen des Endes bilden, sondern schwerlich anders, als in Begleitung der schief laufenden Endflächen P und y sehen, selbst wenn die Fläche x zwischen ihnen verschwunden ist.

Wäre der von Haüy angenommene Unterschied zwischen P und x in ihrer Neigung gegen die Seitenkante der Säule gegründet, so erhielten die Flächen y und q, verglichen mit x, ganz und gar nicht jene einfachen Ausdrücke, sondern, wie wir unten auseinandersetzen werden, in dem Maafs verwickelte, dafs wenigstens so viel einleuchten müfste: ein einfaches Gesetz dürfe für ihre Neigung gegen die Axe dann überhaupt gar nicht gesucht werden; eben so wenig für die übrigen Flächen in Beziehung auf eben diese Axe oder auf eine ähnliche Linie; dann aber liefse sich das ganze System gar nicht auf ein Grundverhältnifs zwischen drei unter sich rechtwinklichen Dimensionen mehr zurückführen, welches doch gewifs das einfachste und sicherste Prinzip der Gestaltung bleiben wird.

Angenommen also: das System des Feldspathes ist wahrhaft hendyoëdrisch, so haben wir jetzt den zweiten Hauptpunkt unsrer Aufgabe zu erörtern: welches wohl das Verhältnifs der drei unter einander senkrechten Dimensionen aa', bb', cc' (Fig. 5. u. 6.) seyn möge, aus welchem die Werthe seiner Flächen und Winkel am einfachsten abgeleitet werden können. Die geschobne vierseitige Säule des Feldspathes bewährt sich als die von 120°, und von dieser Annahme irgend abweichen zu wollen, würde in keiner Rücksicht rathsam seyn, noch irgend auf gröfsere Glaublichkeit Anspruch machen können. Also ist das Verhältnifs der zwei Dimensionen $bb' : aa'$ zu setzen, wie $\sqrt{3} : 1$. Schwieriger wird die Bestimmung der dritten Di-

sodann eine Fläche $\left|\overline{\underline{12a' : 3b : 4c}}\right|$, und zweifelhafter endlich eine Fläche, welche entweder $\left|\overline{\underline{3a' : 5c : \infty b}}\right|$ oder $\left|\overline{\underline{2a' : 3c : \infty b}}\right|$ seyn möchte.

Ich werde mich im Verfolg der gegenwärtigen Abhandlung dieser Zeichen für die genannten Flächen schon vorläufig mit bedienen, da sie mir ganz geeignet scheinen, selbst ohne Abbildungen oder weitläufigere Constructionen leicht verstanden zu werden.

mension cc'. Ihre Hälfte ist der *Cosinus* der Neigung der schief angesetzten Endfläche *P* oder *aeod* gegen die Axe der Säule (welche mit cc' selbst zusammenfällt), wenn die Hälfte von aa' der zugehörige *Sinus* ist. Es ist also eigentlich die Frage: welches ist das Gesetz für die schiefe Ansetzung der Endfläche *P* bei Haüy, oder unsrer Fläche *aeod* (Fig. 5.)?

Wenn wir die Haüy'schen Angaben auf den möglichst einfachsten und sprechendsten gesetzlichen Ausdruck zurückführen, so bestehen sie in folgendem: Man denke sich bei der geschobnen vierseitigen Säule von 120° erst eine gerade angesetzte Endfläche *ABFK* (Fig. 8.); so ist, wie von selbst einleuchtet, der ebne Winkel der Endfläche, welcher an der stumpfen Seitenkante der Säule *AH* anliegt, d. i. $BAF = 120°$, während ihre Neigung gegen eben diese Seitenkante 90° ist. Aber man denke sich nun die Endfläche schief angesetzt, wie *AEOD* (Fig. 8.), jedoch auf die stumpfe Seitenkante der Säule immerfort gerad aufgesetzt, d. i. gegen beide sie einschliefsende Seitenflächen gleich geneigt; so nimmt, je mehr und mehr man die Endfläche geneigt denkt, ihr ebner Winkel, welcher 120° war, ab, und ihr Neigungswinkel, welcher 90° betrug, nimmt zu. Jener sinkt bei immer schieferer Ansetzung der Endfläche von 120° bis auf Null, während dieser von 90° bis auf 180° steigt. Daraus ist offenbar, dafs Ein Punkt vorhanden seyn mufs, in welchem jener ebne Winkel diesem Neigungswinkel gleich wird; und das wäre der Punkt, welcher beim Feldspath wirklich einträte, wenn anders die Haüy'schen Annahmen für streng richtig gelten dürften *). Haüy selbst, ob er gleich dieses Gesetz nicht so offen, sondern indirect ausspricht (in den Eigenschaften seiner primitiven Form aber ist dasselbe ganz versteckt enthalten —), hielt sich hier wiederum an die Angaben von Romé de Lisle, welcher gelegentlich (*t. II. p.* 475.) den ebnen Winkel, von welchem die Rede ist, zu 115° angiebt, mithin dem früher angegebnen Neigungswinkel von 115° gleich, ohne dafs er diese Gleichheit selbst anmerkt, oder irgend heraushebt, dagegen sie von Haüy streng angenommen und mit zur Basis der geometrischen Bestimmungen am Feldspath gemacht worden ist.

So interessant auch nun, auf die obige Art ausgesprochen, die Haüysche Annahme der Neigung der Endfläche *P* gegen die Säule seyn möchte,

*) Es wäre also in Fig. 1., nach Haüy's Annahme, der Winkel *fah* gleich dem Winkel oao'; in Fig. 2. und fgg., so wie in Fig. 5. und 6., $\angle ead = \angle oao'$; in Fig. 8. $\angle EAD = \angle CAH$.

so giebt sie doch für die Dimension cc' einen so höchst verwickelten Ausdruck, daſs das Miſstrauen gegen ihre Naturgemäſsheit davon untrennbar, und der Glaube an die Richtigkeit der Annahme stark erschüttert werden muſs.

Das Problem kann leicht allgemein genommen werden. Man denke sich eine geschobne vierseitige Säule von beliebigen Winkeln, und suche für sie, in einer allgemeinen Formel, diejenige Neigung einer schief angesetzten, auf die eine Seitenkante gerad aufgesetzten Endfläche, welche die obige Bedingung erfüllt, daſs der ebne Winkel der Endfläche an der Seitenkante, worauf sie ruht, gleich wird ihrem Neigungswinkel gegen dieselbe Seitenkante; man nenne den halben Neigungswinkel der Seitenflächen der Säule unter einander (an derjenigen Kante, auf welche die Endfläche aufgesetzt ist) x, den halben ebnen Winkel der Endfläche, welcher an derselben Seitenkante anliegt, y; und die Neigung der schief angesetzten Endfläche gegen die Seitenkante soll also seyn $= 2y$. Wenn die Säule gegeben ist, so ist der Werth von x gegeben, und der Werth von y ist zu bestimmen. Der allgemeine Ausdruck wird alsdann dieser:

$$rad\, y : cos\, y = \sqrt{2\ sin\ x} : \sqrt{cos\ x}\ ^{*)}.$$

*) Es sey Fig. 8. $BAFK$ der senkrechte Queerschnitt einer geschobnen vierseitigen Säule, und in ihm $BG = GF$, $\angle BAG = \angle GAF = \frac{1}{2} \angle BAF$; $AEOD$ sey eine schief angesetzte Endfläche, auf die Kante AH gerad aufgesetzt, d. i. gleich geneigt gegen EAH und DAH; in diesem zweiten Rhombus $AEOD$ sey gleichfalls $EC = CD = \frac{1}{2} ED$, $\angle EAC = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle EAD$.

Nun sey $\angle EAD = \angle CAH$. Welches sind diese Winkel, wenn die des Queerschnittes $BAFK$ gegeben sind?

Der gegebene Winkel $BAG = GAF$ heiſse x. Der gesuchte Winkel $EAC = CAD$ heiſse y; und nach der Voraussetzung sey $CAH = 2y$.

Also $BG = sin\ x$, $GA = cos\ x$; $EC = sin\ y$, $CA = cos\ y$, $EA = rad\ y = AD$ und $BG = EC$.

Man verlängere DA über A hinaus, und fälle aus E auf die Verlängerung das Perpendikel ER, so ist

$$\angle EAR = 180° - \angle EAD = 180° - 2y$$
$$\angle ACG = 180° - \angle CAH = 180° - 2y$$

also $\angle EAR = \angle ACG$.

Da nun $ERD = 90°$, und CGA auch $= 90°$, so sind die Dreiecke ACG und AER sich ähnlich; folglich $ER : EA = AG : AC$, und

$$ER = \frac{EA \times AG}{AC} = \frac{rad\,y \times cos\,x}{cos\,y}$$

Ferner sind sich ähnlich die Dreiecke DAC und DER, folglich $ER : ED = CA : AD$. Aber $ED = 2\,EC = 2\,BG = 2\,sin\,x$. Mithin

Unsre Säule ist die von 120°, wo also $\sin x : \cos x = \sqrt{3} : 1$ folglich wird für unsern Fall, $rad\, y : \cos y = \sqrt{2\sqrt{3}} : 1 = \sqrt[4]{12} : 1$ folglich $\sin y : \cos y = \sqrt{\sqrt{12} - 1} : 1$

Aber die gesuchte Neigung der Endfläche gegen die Seitenkante der Säule war $= 2y$. Suchen wir also für sie das Verhältniſs von *Sinus* zu *Cosinus*, so erhalten wir nach der allgemeinen Formel

$$\sin 2y : \cos 2y = 2 \sin y \,.\, \cos y : (\sin y)^2 - (\cos y)^2,$$

in unserm Falle $\sin 2y : \cos 2y = 2\sqrt{\sqrt{12} - 1} : \sqrt{12} - 2 =$

$$\sqrt{\sqrt{12} - 1} : \sqrt{3} - 1$$

Man kann auch ohne die letztere Formel auf einem besonderen Wege dieses Verhältniſs von *Sinus* und *Cosinus* für die Neigung der Endfläche gegen die Axe der Säule finden, und wird dann zunächst auf den Ausdruck kom-

$$ER = \frac{2 \sin x \times \cos y}{rad\, y}$$

Da nun $\frac{rad\, y \times \cos x}{\cos y} = \frac{2 \sin x \times \cos y}{rad\, y}$, also $(rad\, y)^2 \times \cos x = 2 \sin x \times (\cos y)^2$,

so ist $rad\, y = \frac{\cos y \times \sqrt{2 \sin x}}{\sqrt{\cos x}}$, und

$rad\, y : \cos y = \frac{\sqrt{2 \sin x}}{\sqrt{\cos x}} : 1 = \sqrt{2 \sin x} : \sqrt{\cos x}$, wie oben, oder auch

$\sin y : \cos y = \sqrt{2 \sin x - \cos x} : \sqrt{\cos x}$

Und nennen wir, wie oben geschehen, AG als Dimensionslinie a, und BG als zweite Dimensionslinie b, so wird die Formel diese:

$$rad\, y : \cos y = \sqrt{2b} : \sqrt{a}, \text{ oder}$$

$$\sin y : \cos y = \sqrt{2b - a} : \sqrt{a}$$

Unsre dritte Dimensionslinie c aber, d. i. GC ist der *Cosinus* des Winkels $2y = CAH$, wenn der *Sinus* desselben $= AG = a$. Es ist aber $\sin 2y : \cos 2y = 2\sqrt{a}\sqrt{2b - a} : 2b - a - a = \sqrt{a}\sqrt{2b - a} : b - a$

Also $a : c = \sqrt{a}\sqrt{2b - a} : b - a$, folglich

$$c = \frac{(b - a)\sqrt{a}}{\sqrt{2b - a}}$$

und wenn $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, wie im Feldspath, so wird

$$c = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2\sqrt{3} - 1}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{\sqrt{12} - 1}}$$

kommen, $Sin\ 2y : Cos\ 2y = \sqrt{\sqrt{12} - 1} : \sqrt{4 - \sqrt{12}}$, welcher Ausdruck identisch ist mit dem $\sqrt{\sqrt{12} - 1} : \sqrt{3} - 1$, da $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4 - \sqrt{12}$ *).

Aber ein solches Verhältnifs zwischen den Hauptdimensionen anzunehmen, d. i. $aa' : cc' = \sqrt{\sqrt{12} - 1} : \sqrt{3} - 1$, das würde sehr verwikkelt und wenig übereinstimmend mit den übrigen Untersuchungen seyn, nach welchen bis jetzt die Ausdrücke solcher Verhältnisse der Dimensionen blofs in Quadratwurzelgröfsen zulässig geschienen haben.

Zu der so, wie eben entwickelt, geschehenen Annahme für die Neigung der Endfläche gegen die Säule führt Haüy noch eine ihm allerdings nahe liegende und schickliche Voraussetzung hinzu, durch welche er das Verhältnifs der Höhe gegen die Breite, sey es nun für seine primitive Form, oder, was daraus hervorgehen würde, für unsere Säule festsetzt; und das ist die, dafs er in seiner primitiven Form den beiden Flächen *P* und *M*, welche dem vollkommensten rechtwinklichen Durchgange der Blätter correspondiren, gleiche Breite giebt, d. i. den auf ihnen beiden rechtwinklichen Queerschnitt als ein Quadrat annimmt. Hiedurch erhält er die Neigung der Abstumpfungsflächen *n* (Fig. 88. u. 90. bei Haüy) gegen *P* sowohl als gegen *M* gleich, oder zu 135°; ein so einfaches Verhältnifs, von welchem man, so lang es sich in der Beobachtung bewährt, nur ungern sich wieder entfernen kann. Und hiemit sind alle Umstände bestimmt, wonach sich die weitere Berechnung richtet. Nun bekommt er auch bei einem seiner einfachsten Decrescenzgesetze für die Neigung der Fläche *x* gegen ihre Seitenkante den oben erwähnten Unterschied von der correspondirenden Neigung der Endfläche *P*, um ungefähr 1°. Dagegen erhalten die Neigungen, so-

*) Wenn nämlich *BG* (Fig. 8.), d. i. $sin\ x = \sqrt{3}$, *GA*, d. i. $cos\ x = 1$, ferner $BG = EC$, und $EC : CA = \sqrt{2\sqrt{3} - 1} : 1 = \sqrt{\sqrt{12} - 1} : 1$, so ist $CA = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{12} - 1}}$

Aber *CA* ist der *Radius* des Winkels $CAH = 2y$, wenn der *Sinus* ist $GA = 1$, folglich:

$$rad\ 2y : sin\ 2y = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{12} - 1}} : 1 = \sqrt{3} : \sqrt{\sqrt{12} - 1}.$$ Mithin

$$sin\ 2y : cos\ 2y = \sqrt{\sqrt{12} - 1} : \sqrt{3 - \sqrt{12} + 1} = \sqrt{\sqrt{12} - 1} : \sqrt{4 - \sqrt{12}} =$$
$$\sqrt{\sqrt{12} - 1} : \sqrt{3} - 1$$

wohl dieser Fläche x, als der y und q, gegen die Axe der Säule wieder sehr verwickelte Ausdrücke, nämlich folgende:

Für die Neigung von x wird $Sin : Cos = \sqrt{\sqrt{12} - 1} : \frac{5}{2} - \sqrt{3}$
— — — — y — — — $= \sqrt{\sqrt{12} - 1} : 4 - \sqrt{3}$
und — — — — q — — — $= \sqrt{\sqrt{12} - 1} : 2 - \sqrt{3}$
während — — — P war $Sin : Cos = \sqrt{\sqrt{12} - 1} : \sqrt{3} - 1 =$
$\sqrt{\sqrt{12} - 1} : \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

Und so wäre das Verhältniſs der Cosinusse bei gleichen Sinussen für die verschiedenen Flächen unsrer vertikalen Zone ein irrationales; dagegen, sobald wir ein wahrhaft zwei-und-ein-gliedriges oder hendyoëdrisches System vor uns haben, dasselbe Verhältniſs höchst einfach wird; denn dann erhält x mit P gleiches Verhältniſs von Sinus zu Cosinus, y aber den dreifachen Cosinus bei gleichem Sinus, und q den dreifachen Sinus bei gleichem Cosinus *). Die Zeichen $\left|\overline{\underline{a':c:\infty b}}\right|$, $\left|\overline{\underline{a':5c:\infty b}}\right|$, $\left|\overline{\underline{5a':c:\infty b}}\right|$ für x, y, und q sprechen dies unmittelbar aus.

Es geht aus den Haüy'schen Annahmen der Dimensionen seiner primitiven Feldspathform noch eine Folge hervor, welche gewiſs zu den krystallographischen Merkwürdigkeiten gehört, ob sie gleich von Haüy selbst nicht deutlich bemerkt worden zu seyn scheint, da er ihrer nicht ausdrücklich erwähnt, und das ist die: daſs die Flächen o (bei Haüy Fig. 86., 87. u. m.), welche wir überall, wo sie nach demselben Gesetz vorkommen, Rhomboïdflächen **) nennen wollen, und welche wir oben mit $\left|\overline{\underline{2a':b:2c}}\right|$ ausdrückten, beim Feldspath gleiche Neigung gegen P wie

*) In unsrer Figur 1. stellt gkz einen auf oa' rechtwinklichen Schnitt, also eine gerad angesetzte Endflache, vor; gkq, gkx, gky, Schnitte, parallel den Haüy'schen Flächen q, x, y. Die Neigungen dieser Schnitte gegen die Axe der Säule (welche oa' parallel ist) erhalten dann zu ihrem gemeinschaftlichen Sinus eine Linie, gleich dem Perpendikel von z auf gk, und zu ihren Cosinussen die Linien qz, xz, yz, so daſs $yz = 3xz$, und $qz = \frac{1}{3} xz$.

**) Ihr Gesetz ist nämlich, daſs sowohl die Kanten, die sie mit den Haüy'schen Flächen M und x einerseits, als die, welche sie mit den Flächen P und T andrerseits bilden, je zwei und zwei parallel sind; daher ihre Form, wenn sie diese vier Flachen schneiden, ein längliches schiefwinkliches Parallelogramm oder Rhomboïd ist, länglich oder von ungleichen Seiten, weil die zwei Paare der anstoſsenden Flachen und der mit ihnen gebildeten Kanten von ungleichem Werthe sind.

gegen *T* erhalten; dasselbe gilt von den Flächen *o'* für ihre Neigung gegen *P* und gegen die entgegengesetzte von *l*. Und hat auch Haüy diese Bemerkung nicht wirklich gemacht, so sind doch die Prämissen dazu sehr deutlich gegeben in dem, was er im geometrischen Theile seines Werkes (*t.* 2. *p.* 68. §. 224.) sagt, verglichen mit seinem Decrescenzzeichen $\overset{2}{F}$ für die Fläche *o*.

Ich habe bisher die Grundlagen von Haüy's geometrischer Bestimmung und Beschreibung des Feldspathes beleuchtet. Bei dem vielen Verdienst sowohl, als Interesse, welches sie hat, ist doch die Nothwendigkeit einer Vereinfachung und Berichtigung derselben fühlbar geworden, sobald sie an den Maafsstab gelegt wurde, welcher die einfachsten Elemente der Gestaltung in dem Verhältnifs der auf einander rechtwinklichen Dimensionen aufsucht, während früherhin freilich ein solches Regulativ für die Aufsuchung des Grundcharakters eines Krystallisationssystemes nicht vorhanden war, und die Bestimmungsweise einen völlig willkührlichen und zufälligen Gang nahm, welchem alles erlaubt war, was geometrisch möglich, und von der Beobachtung nicht so weit entfernt war, um durch sie direct widerlegt zu werden. Ich habe die Unvereinbarkeit der Bestimmung der Dimension *cc'*, wie sie aus den Haüy'schen Annahmen folgen würde, mit der Säule von 120°, und den Erfordernissen eines zwei-und-ein-gliedrigen Systemes, so lange wir nicht alle Simplicität der Gesetze für die Dimensionen aufgeben wollen, hinlänglich nachgewiesen, und darf den Schlufs ziehen, dafs, so günstig auch der erste Eindruck seyn mochte, welchen das Gesetz für die Neigung der schief angesetzten Endfläche *P* gegen die Seitenkante, so wie es den Haüy'schen Annahmen gemäfs sich aussprechen liefs, zu machen schien, dieses Gesetz doch mit der Natur eines zwei-und-ein-gliedrigen Systems und einer Säule von 120°, wie wir beides dem Feldspath zusprechen müssen, sich nicht verträgt, und dafs wir den Schein von Artigkeit jenes Gesetzes aufgeben müssen, um ein zulässigeres Verhältnifs für die Grunddimensionen selbst, als das Einfachste in der Gestaltung, zu erhalten. Ich habe mich deswegen bemüht, ein Verhältnifs aufzufinden, welches der Beobachtung sowohl als den Ansprüchen der Theorie am besten genügt; und ich glaube eines aufgefunden zu haben, welches so viele Vorzüge in sich vereinigt, dafs es auf den Beifall derer, welche einem solchen Gegenstande Zeit und Aufmerksamkeit widmen, in einem Grade rech-

nen darf, wie nur Bestimmungen solcher Art sich als naturgemäſs darzustellen wagen können. Beobachtung reicht nie, und in keinem Falle, zur Schärfe des geometrischen Begriffs hin. Es versteht sich, daſs sie vor allem befragt werden, und mit ihr nichts im Widerspruch gefunden werden muſs, was sich Theorie des Gegenstandes zu seyn rühmt. Allein sobald ein Begriff mit geometrischer Schärfe irgendwo von einem Gegenstand aufgestellt wird, so muſs die Bürgschaft, daſs er auf den Gegenstand streng passe, irgendwo anders liegen, wenn sie je vorhanden ist, als in der Beobachtung, welche ihrer Natur nach dafür nicht Bürge seyn kann. So lange solche Bürgschaften andrer Art nicht zuverlässig und gültig genug, oder gar nicht vorhanden sind, so lange darf es dessen Zweck, der den Begriff aufstellt, nur seyn, ein geometrisches Bild mit Präcision aufzustellen, sey es auch gleichsam auſserhalb des Gegenstandes, um ihn mit jenem so genau als möglich zu vergleichen, an demselben zur Klarheit zu bringen, so wie jenes an diesem zu prüfen, und endlich zu erfahren, ob Grund vorhanden ist, sie geschieden, oder in Eins zusammenfallen zu lassen. Der Werth sowohl als das Bedürfniſs solcher geometrischer Bilder bleibt ihnen auch auf diese Weise gesichert. Ihre Zweckmäſsigkeit zu der Vergleichung, zu welcher sie leiten sollen, bleibt die erste Anforderung an sie.

So konnte bei einiger Geläufigkeit in dem, was in unserm Fall die Bestimmung herbeiführen sollte, der Gedanke nicht unangeregt bleiben: es möge hier vielleicht gar das höchst einfache Verhältniſs zum Grunde liegen: die Dimension cc' verhalte sich zu der Dimension aa', wie 2 zu 1. Denn dieses würde die Neigung von P und x gegen einander zu nahe 127° (genauer 126° 52′ 11″,5) geben, welche von der Romé de Lisle'schen Messung zu 130°, und der Haüy'schen Angabe zu 128° 55′ 40″ *) noch nicht allzuweit abweicht, um nicht geprüft seyn zu wollen. Aber bis auf diesen Grad entscheidet die Beobachtung wirklich; der Winkel findet sich unzweifelhaft stumpfer, als nach dieser Voraussetzung. Dies ist das Resultat, so weit es die Beobachtung verbürgt, ob sie gleich, weil die Feldspathkrystalle nur von minderer Vollkommenheit ihrer Krystallisationsflächen, und namentlich die Flächen x beständig mit gewissen Unebenheiten oder gestreift gefunden werden, den Grad von Genauigkeit der Messung hier nicht zuläſst, welcher in andern Fällen noch erreicht werden kann.

*) Die schärfere Rechnung giebt 45″, 26 statt 40″.

Wer sich mit dem geometrischen Studium der Krystalle beschäftiget, der wird gleichsam *a posteriori*, d. i. durch den Erfolg überführt, daſs die Verhältnisse in den Dimensionen der Körper schwerlich anders, als in Quadratwurzelgröſsen *) ausdrückbar, anzunehmen seyn dürften, und er wird es Haüy Dank wissen, daſs er für diese Art von Annahmen die Bahn gebrochen hat. Liege der tiefere Grund worin er wolle, sey er erweislich oder nicht: die Leichtigkeit und Einfachheit aller sich entwickelnden geometrischen Verhältnisse, sobald man von dieser Art Grundlage ausgeht, ist evident, und trägt bei weitem den Sieg über jede andre Art, die Grundlage der Gestalt zu bestimmen, davon, so lange beide mit der Beobachtung gleich gut übereinstimmen. Eine der stärksten Bürgschaften für ihre ächte Naturgemäſsheit ist zugleich die: daſs, wenn man von der einfachst denkbarsten Voraussetzung, nämlich der Gleichheit aller drei unter sich rechtwinklichen Dimensionen ausgeht, wie sie die Grundlage des regulären oder sphäroëdrischen Krystallisationssystemes ist, die abgeleiteten Dimensions- und Linearverhältnisse, im Verhältniſs gegen die Grunddimension als Einheit, alsdann sämmtlich in Wurzelgröſsen ausgedrückt, folgen.

Indem ich nun in Quadratwurzelgröſsen ein Verhältniſs der dritten Dimension cc' des Feldspathes zu den übrigen aufzufinden bemüht war, welches den Forderungen, die sowohl die Beobachtung als die theoretische Entwickelung machen kann, am besten Genüge leisten möchte, so traf ich auf eines, welches mit der genügendsten Uebereinstimmung mit den beobachtbaren Winkelgröſsen nicht allein mehrere der merkwürdigen geometrischen Eigenschaften vereinigt, die wir vorhin am Feldspath nach der Haüyschen Bearbeitung fanden, sondern auch andre noch, die sich zu diesen gleich merkwürdig hinzugesellen; alle diese Eigenschaften habe ich jetzt noch aus ihrem theils allgemeineren, theils specielleren Gesichtspunkte zu entwickeln.

Ich erlaube mir nämlich für das aufzustellende geometrische Bild die Voraussetzung, daſs bei dem vorerst anerkannten Verhältniſs der beiden Queerdimensionen der Säule $aa' : bb' = 1 : \sqrt{3}$, die dritte Dimension cc' (vgl. Fig. 5. u. 6.) sich verhält zu aa', wie $\sqrt{3} : \sqrt{13}$, oder zu bb', wie $1 : \sqrt{13}$; zusammen also, wenn die Hälften der Dimensionen aa', bb' und cc', wie oben, a, b, und c heiſsen, die Annahme

*) Einfache Zahlenverhältnisse sind hiebei um so weniger ausgeschlossen, als ja die einfachen Zahlen selbst als Wurzeln ihrer Quadrate schon mit inbegriffen sind.

$$a : b : c = 1 : \sqrt{3} : \sqrt{\frac{3}{13}} = \sqrt{13} : \sqrt{3 \cdot 13} : \sqrt{3};$$

dann ſindet sich, so vielen Anstoſs man auch etwa an der Gröſse $\sqrt{13}$ auf den ersten Anblick nehmen möchte, in dem angenommenen Verhältniſs ein solches Zusammentreffen von Eigenschaften, daſs ihm schwerlich ein andres für den Feldspath aufzustellendes den Vorzug streitig machen möchte.

Die hauptsächlichsten Winkel, welche daraus hervorgehen, entfernen sich fürs erste von den Haüy'schen Messungen und Angaben um eine in diesem Falle durch Beobachtung nicht verbürgbare Gröſse, und liegen ihnen so nahe, als es die Verwandlung des Systemes in ein wahrhaft zwei-und-ein-gliedriges nur zuläſst; der Neigungswinkel von P gegen x, welcher nach Haüy's Annahmen $128° 55' 45''$ seyn würde, wird zu $128° 40' 56''$. Differenz $\frac{1}{4}°$, mit dem gewöhnlichen Goniometer unmeſsbar. Die Neigung der Endfläche P sowohl, als x gegen die Seitenkanten der Säule wird $115° 39' 32''$; die erstere ist nach den Haüy'schen Angaben $115° 0' 8''$ *), die andere $116° 4' 12''$ **); die unsrige beinahe vollkommen die Mitte zwischen diesen beiden; und da, wie wir oben bemerkten, der ganze Unterschied der beiden Haüy'schen Neigungen von einander nicht einmal durch Beobachtung sich verbürgen läſst, so kann es noch weniger der auf die Hälfte herabgesetzte Unterschied von unserem Winkel. Dagegen wird der ebne Winkel der Endfläche P sowohl als x, welchen ersteren Haüy zufolge einer seiner Voraussetzungen gleichfalls zu $115° 0' 8''$ annimmt, nach unsrer Bestimmung $114° 43' 11'',5$, und auf ihn fällt also der Unterschied von nahe $1°$ (genauer $56' 20'',5$) gegen den Neigungswinkel der Endfläche anstatt desjenigen, welchen Haüy zwischen die beiderseitigen Neigungen von P und x gegen ihre Seitenkanten setzt. Die übrigen sich ergebenden Differenzen gegen die Haüy'schen Bestimmungen werden noch geringer; und während der Beobachtung immer das Recht des Einspruchs gegen die unsrige bleibt, so ist mir doch nicht wahrscheinlich, daſs sie ihn thun wird; wenigstens ist mir nichts der Art vorgekommen.

Hienächst flieſsen aus dem angenommenen Verhältniſs der Dimensionen a, b, c folgende wichtige Eigenschaften für das Feldspathsystem:

*) Schärfer gerechnet: $7''$, 16 statt $8''$.

**) Eben so: $7''$, 56 statt $12''$.

1) Unsre Rhomboïdfläche $o = \left|\overline{\underline{2a':b:2c}}\right|$ behält wirklich die gleiche Neigung gegen *P* und gegen *T*, wie oben bei den Haüy'schen Annahmen. Diese Fläche hat für die zwei-und-ein-gliedrigen Systeme eine sich gleichbleibende Function, welche ich damit bezeichne, daſs die genannte Fläche zugleich in eine Kantenzone der einen Endfläche P, und in eine Diagonalzone der zweiten mit *P* in den Gegensatz tretenden Fläche *x* fällt *). Durch diese doppelte Function aber ist sie ein für allemal in den zwei-und-ein-gliedrigen Systemen geometrisch bestimmt, und es ist die Fläche *s* beim Augit, und *r* sowohl als *l* bei der Hornblende, (m. vgl. die Haüy'schen Abbildungen) der Function nach genau die nämliche, wie unsre *o* beim Feldspath. Das Zeichen bleibt für sie in allen diesen Fällen das nämliche, d. i. $\left|\overline{\underline{2a':b:2c}}\right|$. Betrachten wir diese Fläche in der Diagonalzone der Fläche *x*, so erhält sie in ihr einen constanten Werth; sie ist nämlich jederzeit die Fläche mit doppeltem Cosinus — (bei gleichem Sinus) — in dieser Zone, verglichen mit derjenigen, welche durch *a'bc* (und *s*) Fig. 3. gelegt wird, und welche eine der hauptsächlichsten Flächen in den zwei-und-zwei-gliedrigen Systemen seyn würde, merkwürdigerweise aber in den zwei-und-ein-gliedrigen jederzeit verschwindet, während gerade unsre mit doppeltem Cosinus statt ihrer eintritt und charakteristisch und herrschender wird **).

*) In Fig. 2. u. 3. sind die Fig. 5. u. 6. in eine andere Stellung gebracht, welche für die Auffassung der Lage der Rhomboïdflächen günstiger ist; *ade* ist, wie dort, die Haüysche Fläche *P*, *a'de* die Haüy'sche *x*; *cne'a'* (Fig. 3.) ist die Lage der Rhomboïdfläche *o*, so wie *cmd'a'* die der ihr gegenüberliegenden; beide zusammen würden eine augitartige Zuschärfung der Säule bilden, deren schieflaufende Endkante *ca'*, d. i. die Längendiagonale der Fläche *a'de* wird; *nc* ist parallel *ae*, so wie *mc* parallel *ad*; *n* und *m* also die Mitten von *ad* und *ae*. Daſs die Fläche *cne'a'* auf *ade* eine Kante bildet, parallel der Kante *ae*, welche *ade* mit der Seitenfläche der Säule bildet, beweist, daſs sie in die Kantenzone von *ade* fällt; und daſs sie auf *a'de* eine Kante bildet, parallel der Längendiagonale der letzteren *ca'*, beweist, daſs sie in die Diagonalzone von *a'de* fällt. Diese letztere Eigenschaft spricht auch ihr Zeichen $\left|\overline{\underline{2a':b:2c}}\right|$ unmittelbar aus.

**) Man denke sich die Neigung der Ebne *a'bc* (Fig. 3.) gegen eine Ebne *aca'c'*, d. i. gegen den Längenaufriſs unserer Diagonalzone, so ist für diese Neigung *bi* der Sinus, wenn *ip*, oder das Perpendikel von *i* auf *ca'*, der Cosinus ist. Für die Ebne *cne'a'* und ihre Neigung gegen jene Ebne *aca'c'* ist alsdann der Sinus *e'i'*, der Cosinus *i'q*, senkrecht auf *ca'*. Aber $bi = e'i'$; und $i'q = 2ip$. Daher hat die zweite Fläche *cne'a'* den doppelten Cosinus der ersten *a'bc* bei gleichem Sinus mit ihr für ihre beiderseitigen Neigungen ge-

Wir können jetzt eine allgemeine Formel suchen für den Fall, wo unsre Rhomboïdfläche $o = \left|\overline{\underline{2a':b:2c}}\right|$ gleiche Neigung gegen die schief angesetzte Endfläche *ade* oder *P*, d. i. $\left|\overline{\underline{a:c:\infty b}}\right|$, wie gegen die Seitenfläche der Säule *a'de'*, oder bei Haüy *T*, d. i. $\left|\overline{\underline{a':b:\infty c}}\right|$ bekommt. Nennen wir wiederum die Hälften der dreierlei Dimensionen, *a*, *b*, und *c*, so finden wir für den genannten Fall folgende Gleichung:

$$c = \frac{ab}{\sqrt{4a^2 + 3b^2}} \quad *).$$

Also, wenn $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, wie bei unsrer Säule von 120°, so ist $c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4+9}} = \sqrt{\frac{3}{13}}$, d. i. es verhält sich $c : a = \sqrt{3} : \sqrt{13}$, wie wir oben annahmen. Die Neigung selbst, von *o* gegen *P* = der von *o* gegen *T*, wird zu 125° 59′ 16″,24; nach Haüy findet sie sich zu 124° 15′ 51″ **); die Differenz $\frac{1}{4}$°, mit dem gemeinen Goniometer unmeſsbar.

2) Die Haüy'sche Fläche *n* (s. Haüy's Lehrbuch, Taf. XLIX. Fig. 88. 90.), d. i. $\left|\overline{\underline{\tfrac{1}{2}a:b:4c}}\right|$, oder die Abstumpfungsfläche der Kante zwischen den

gen den Längenaufriſs der Diagonalzone von *a'de*, in welche sie beide gehören. — Für den ein wenig Geübten ist diese Eigenschaft in dem Zeichen der Fläche $\left|\overline{\underline{2a':b:2c}}\right|$ auch unmittelbar lesbar.

*) In Fig. 3. ist $ai = \frac{1}{2}aa'$ gesetzt worden $= a$, eben so $bi = \frac{1}{2}bb' = b$, und $ci = \frac{1}{2}cc' = c$. Wenn nun die Ebne *cne'a'* gleich geneigt ist gegen die Ebnen *ade* und *a'de'*, so ist das Perpendikel aus *d* auf *nc* gleich dem aus *d* auf *e'a'*; das erstere, gleich dem aus *c* auf *ae*, ist $= \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; das zweite, aus *d* auf *e'a'*, ist gleich dem doppelten Perpendikel aus *b* auf *e'a'*, d. i. $= 2 \times \frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Wenn nun $\frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, also $b\sqrt{a^2+c^2} = 2c\sqrt{a^2+b^2}$,

und $a^2b^2 + b^2c^2 = 4a^2c^2 + 4b^2c^2$,

folglich $a^2b^2 = 4a^2c^2 + 3b^2c^2 = (4a^2+3b^2)c^2$, so ist

$$c^2 = \frac{a^2\,b^2}{4a^2+3b^2}, \text{ und } c = \frac{a\,b}{\sqrt{4a^2+3b^2}}, \text{ wie oben.}$$

**) Schärfer: 62″,75 statt 51″.

den beiden dem vollkommenen rechtwinklichen Blätterdurchgang correspondirenden Flächen *P* und *M* bleibt, wie bei Haüy's Annahmen, gleich geneigt gegen *P* wie gegen *M*, gegen jede also um 135°. Auch diese Fläche hat ihren constanten Werth und Ausdruck im zwei-und-ein-gliedrigen System überhaupt. Es ist die Fläche mit vierfachem Cosinus in der Diagonalzone von *P*, wiederum verglichen mit der Neigung der Fläche des zwei-und-zwei-kantigen Octaëders *abc* in der nämlichen Zone. Aufser der Diagonalzone von *P* fällt unsre Fläche $\left|\overline{\underline{4a : b : 4c}}\right|$ noch in eine Zone, welche von *o* nach *l* (vergleiche Haüy, Taf. XLIX. Fig. 86. und fgg.; insbesondre Fig. 88.), und über *y* nach dem *l* der entgegengesetzten Seite geht, eine Zone, durch welche *y* selbst in der vertikalen Zone P, *x* u. s. f. seine bestimmte Lage erhält; durch das gemeinschaftliche Fallen in zwei Zonen wird, wie jederzeit, auch die Fläche *n* geometrisch streng bestimmt *), und zwar als $\left|\overline{\underline{4a : b : 4c}}\right|$.

Suchen wir wiederum die allgemeine Formel für den Fall, wo diese unsre Fläche mit 4fachem Cosinus in der Diagonalzone von *P* gleiche Neigung erhält gegen die Endfläche *P* wie gegen die Seitenfläche *M*, so finden wir fürs erste $b = \frac{4\,ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$, und daraus $c = \frac{a\,b}{\sqrt{16\,a^2-b^2}}$ **)

*) In unsrer Fig. 4. ist der Schnitt $une's'$ parallel der Haüy'schen Fläche *n*: *un* ist parallel *ac*, d. i. der Langendiagonale von *ade*, daher die Ebne $une's'$ in die Diagonalzone von *ade* fallt; *n* ist die Mitte von *ad*, *u* die Mitte von *dc*; ne' ist dieselbe Linie, wie in Fig. 3., also coïncidirend mit der Kante, welche die Rhomboïdfläche $cne'a'$ mit der Seitenflache der Säule ade', d. i. der Haüy'schen Fläche *l*, bildet. Mithin fallen ade', $une's'$, $cne'a'$ u. s. f. wieder in eine und dieselbe Zone. — Was ferner die Neigungen der beiden Ebnen $abcs'$ und $une's'$ gegen den Langenaufrifs $aca'c'$ der Diagonalzone von *ade* betrifft, so erhalt die Ebne $abcs'$ zum Sinus *bi*, zum Cosinus *it*, senkrecht auf *ac*; die Ebne $une's'$, gegen die Ebne *nuv*, welche, dem Aufrifs $aca'c'$ parallel, durch *nu* gelegt ist, zum Sinus $e'v$, zum Cosinus *vr*, senkrecht auf *nu*. Nun ist $e'v = vc = \frac{1}{2}e'c' = \frac{1}{2}bi$; aber $vr = c't = 2it$. Also hat die Ebne $une's'$ halben Sinus bei doppeltem Cosinus, d. i. bei gleichem Sinus 4fachen Cosinus von der Ebne $abcs'$ in Beziehung auf ihre beiderseitige Neigung gegen eine Ebne wie $aca'c'$.

**) Wenn in Fig. 4. die Ebne $une's'$ gleich geneigt ist gegen die Ebne *ade*, wie gegen eine gerade Abstumpfungsfläche der Kante de', d. i. gegen eine Ebne wie *nuv*, parallel der Ebne $aca'c'$, so wird, weil die letztre Ebne auf *ade* rechtwinklich ist, der Sinus der Neigung der Ebne $une's'$ gegen *aed* gleich dem Cosinus; Sinus aber ist $e'v$, Cosinus *vr*; folglich wird $e'v = vr$. Ist nun die Ebne $une's'$ die mit 4fachem Cosinus der Neigung gegen $aca'c'$ bei gleichem Sinus mit der Ebne $abs'c$; so verhalt sich $e'v : vr = bi : 4it$, oder es ist $bi = 4it$, da nämlich *bi* den Sinus der Neigung der Ebne $abs'c$ gegen $aca'c'$, und *it* den Cosinus

folglich, wenn die Säule von 120° gegeben ist, d. i. $a = 1$, $b = \sqrt{3}$, so findet sich $c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{16-3}} = \sqrt{\frac{3}{13}}$, d. i. $c : a = \sqrt{3} : \sqrt{13}$, wie oben *).

5) Ein dritter Umstand ist bemerkenswerth, nämlich dieser: daſs die beiden so eben erwähnten Eigenschaften, d. i. für die Fläche mit dop-

ausdrückt. Aber bi war gesetzt $= b$, und $it = \frac{(ai) \times (ci)}{(ac)}$ ist nach der abgekürzten Bezeichnung für die Dimensionen $= \frac{a \times c}{\sqrt{a^2+c^2}}$. Man hat also $b = \frac{4\,ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$, wie oben.

Hieraus ergiebt sich ferner $a^2b^2 + b^2c^2 = 16a^2c^2$, also $a^2b^2 = 16a^2c^2 - b^2c^2 = (16a^2 - b^2)c^2$; folglich $c^2 = \frac{a^2b^2}{16a^2-b^2}$, und $c = \frac{ab}{\sqrt{16a^2-b^2}}$

*) Eine der wesentlichen Grundbestimmungen für Haüy's primitive Feldspathform war auch, daſs er den Flachen derselben P und M (vgl. unsre Fig. 7.) in dem auf beiden rechtwinklichen Queerschnitt gleiche Dimensionen gab, oder diesen Queerschnitt als ein Quadrat annahm. Ein ganz einfaches Verhaltniſs der correspondirenden Dimensionen findet sich jetzt auch für unser Feldspath-Hendyoëder (Fig. 5.). Es wird namlich der Abstand der beiden Endflächen desselben von einander gleich dem vierten Theile der Queerdiagonale der Endflache; eine Eigenschaft, welche mit der eben erörterten im engsten Zusammenhang steht. Wenn namlich $a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{3.13} : \sqrt{3}$, die Queerdiagonale der Endfläche aber $= 2b = 2\sqrt{3.13}$, so ist der Ausdruck des Abstandes der Endflächen am Hendyoëder $= \frac{2a.c}{\sqrt{a^2+c^2}} = 2\frac{\sqrt{3.13}}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}\sqrt{3.13}$. Aber $2\sqrt{3.13} : \frac{1}{2}\sqrt{3.13} = 4 : 1$, oder die Queerdiagonale des Hendyoëders ist viermal so groſs als seine Höhe oder Dicke. Wollte man also die Flache M zu der primitiven Form hinzunehmen, so würde sie von den Seitenflachen der Säule $\frac{3}{4}$ wegschneiden, oder durch die der stumpfen Seitenkante zunächst liegenden Viertheile der Endkanten ad, do u. s. f. gelegt werden müssen, wenn der Queerschnitt senkrecht auf P und M, wie bei Haüy, zu einem Quadrate werden sollte. Verdoppelt man die Höhe der Saule des Hendyoëders, so wird derselbe Queerschnitt ein Quadrat seyn, wenn die Flachen M durch die Mitten der Endkanten der hendyoëdrischen Saule gelegt werden; und giebt man der Saule die vierfache Höhe von der des Hendyoëders, so sind die Abstände der Endflachen selbst der Queerdiagonale derselben gleich. Umgekehrt ergiebt sich, daſs Haüy seiner primitiven Form die vierfache Höhe von dem in dasselbe — mit der gehörigen Berichtigung — einzuzeichnenden Hendyoëder gegeben hat. In Fig. 7. ist, wie bereits bemerkt, die Haüy'sche primitive Form (Fig. 78. Taf. XLVIII. seines Lehrbuchs) copirt, und durch Einzeichnung der Flächen $ade''o''$, $eoa''d''$, wo a, o, a'', o'', die Mitten der Kanten Ee, dI u. s. f. sind, die symmetrische Säule von 120° in derselben wiederhergestellt. Man lege die untere Flache $Ie''Ed''$ um $\frac{1}{4}$ der Höhe der Säule weiter hinauf, d. i. durch e', a', u. s. f., so wird man in dem Körper $aeoda'e'o'd'$, abgesehen von der ohnehin dem Auge nicht sichtbaren Berichtigung der Winkel, unser Feldspath-Hendyoëder, wiewohl in einer anderen Stellung als in der obigen Fig. 2. oder 5., in die Haüy'sche primitive Form eingezeichnet erblicken.

peltem Cosinus in der Diagonalzone von x, Gleichheit ihrer Neigung gegen P und gegen T, und für die Fläche mit 4fachem Cosinus in der Diagonalzone von P Gleichheit ihrer Neigung gegen P sowohl als gegen M, — daſs, sage ich, diese beiden Eigenschaften zusammen nur möglich sind an der Säule von 120° und 60°, d. i. an der des Feldspathes. Denn wenn $c = \frac{ab}{\sqrt{4a^2 + 3b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{16a^2 - b^2}}$, also $4a^2 + 3b^2 = 16a^2 - b^2$, oder $4a^2 + 4b^2 = 16a^2$, so folgt $4b^2 = 12a^2$, $b^2 = 3a^2$, und $b = \sqrt{3} \times a$, oder $a : b = 1 : \sqrt{3}$.

So involviren überhaupt je zwei der hier genannten drei geometrischen Eigenschaften des Systems, wenn sie gegeben sind, die dritte.

Für die Wahrheit der zweiten angegebenen Eigenschaft des Feldspathsystemes aber, d. i. für die gleiche Neigung unsrer Fläche $\left|\overline{\underline{4a:b:4c}}\right|$ gegen die Schief-Endfläche $\left|\overline{\underline{a:c:\infty b}}\right|$ und die Abstumpfungsfläche der scharfen Seitenkante der Säule, d. i. $\left|\overline{\underline{b:\infty a:\infty c}}\right|$, leistet die Natur selbst vollkommne Bürgschaft; und sie thut dies durch diejenige Zwillingskrystallisation, welche bei den Krystallen des Adulars vorzukommen pflegt, und bei dem gemeinen Feldspathe so vorzüglich schön an den bekannten Krystallen von Baveno sich findet. Das Gesetz dieser Zwillingskrystallisationen ist dieses: beide Individuen haben die Richtung einer der Flächen $\left|\overline{\underline{4a:b:4c}}\right|$ oder n unter einander gemein, die der Flächen des blättrigen Bruches aber, so wie die übrigen, umgekehrt gegen dieses n liegen, wie rechts und links *).

*) Fig. 9., 10. und 11. stellen solche Zwillinge vor. In Fig. 9. ist die Ebne *defg* (parallel der Fläche n, Fig 10 u 11.) diejenige, welche beide Individuen trennt, welche zugleich beide Individuen als eine Fläche n gemein haben, und gegen welche alle die übrigen Flächen beider Individuen umgekehrt liegen. Die zweite Fläche n, d. i. eine Abstumpfungsfläche der Kante zwischen M und M', würden allerdings beide Individuen wieder unter sich gemein, d. i. in gleicher Richtung liegen haben, aber nur, weil jede gegen die erste um 90° geneigt ist, so glich beide bei umgekehrter Lage gegen dieselbe wieder in Eine Ebne, oder eine in die Verlängerung der andern fallen.

Nun bilden aber an dem Zwilling die Flächen des ersten blättrigen Bruchs beider Individuen wieder einen rechten Winkel unter sich *), die des zweiten blättrigen Bruchs *M* gleichfalls, und beide zusammen am Zwilling wieder die rechtwinkliche vierseitige Säule, wie bei dem einfachen Individuum, so daſs die unter sich rechtwinklichen Richtungen des ersten und des zweiten blättrigen Bruchs in beiden Individuen gegenseitig sich vertauschen, und was in dem einen Richtung des ersten, in dem andern Richtung des zweiten wird, und so umgekehrt.

Bildete nun die Fläche *n*, welche beiden Individuen gemein ist, nicht genau 45° mit jeder dieser beiden Flächen, d. i. hätte sie nicht genau gleiche Neigung gegen die Fläche $P = \left|\overline{\underline{a:c:\infty b}}\right|$, welche der schief angesetzten Endfläche des Hendyoëders, wie gegen die Fläche $\left|\overline{\underline{b:\infty a:\infty c}}\right| = M$, welche der Abstumpfungsfläche der scharfen Seitenkante des Hendyoëders entspricht, so könnte die Zwillingssäule nicht rechtwinklich werden, wie sie ist, und die Richtungen des ersten und zweiten blättrigen Bruches könnten sich in den beiden Individuen nicht vertauschen; ja es könnten an der Zwillingssäule nicht einmal die entgegengesetzten Seitenflächen parallel seyn; vielmehr würde diese Säule einen stumpfen, einen gegenüberliegenden scharfen, und zwei rechte Winkel haben, vorausgesetzt, daſs die Ebne, in welcher beide Individuen an einander grenzen, die ihnen gemeinsame Fläche *n* wäre.

So liefert unsre Zwillingssäule dadurch, daſs sie rechtwinklich ist, den schärfst-möglichen Beweis, daſs die den beiden Individuen gemeinsame Ebne 45° gegen jede der zweierlei Seitenflächen derselben geneigt ist.

Nun könnte wohl jemand — zugestanden die rechtwinkliche Zwillingssäule selbst, welche sich der Beobachtung zufolge gar nicht in Zweifel ziehen läſst, — die Meinung hegen, entweder die beide Individuen trennende Ebne, welche einem Diagonalschnitt der rechtwinklichen Säule correspondirt und gegen die Seitenflächen derselben um 45° geneigt ist, entspreche gar keiner Krystallisationsebne, oder doch nicht der unsrigen mit dem Ausdruck $\left|\overline{\underline{4a:b:4c}}\right|$, d. i. der mit 4fachem Cosinus in der Diagonal-

*) In den Fig. 9—11. sind die Flächen des ersten blättrigen Bruches *P* nicht mit ihrem Buchstaben bezeichnet, weil sie an der hinteren Seite der abgebildeten Krystalle liegen; es sind die entgegengesetzten Flächen von *M* und *M'*.

zone der schiefen Endfläche des Hendyoëders. In beiden Fällen würde ihn die aufmerksamere Beobachtung gänzlich widerlegen.

Die erste Behauptung wäre ohnehin gegen die allgemeinen Gesetze aller Zwillingskrystallisationen. Denn nie ist es eine den Structuren beider Individuen fremde Ebne, deren Richtung beide gemein haben, und auf deren Gemeinschaft die gesetzmäfsige Stellung beider Individuen gegen einander sich stützt; vielmehr ist es jederzeit eine bestimmte Ebne ihrer Structur selbst, oder deren mehrere, welche zur gemeinschaftlichen unter beiden Individuen wird, und gegen welche die übrigen in den Gegensatz von Rechts in dem einen, Links in dem andern Individuum sich stellen. Nur die physikalische Realität, welche sie für jedes Individuum als krystallinische Structurebene hat, macht sie fähig, einem bestimmten wirksamen Verhältnifs unter ihnen bei dem zwillingsartigen Aneinanderwachsen zum Träger zu dienen.

Wollte man aber bezweifeln, dafs die den beiden Individuen gemeinsame Structurebne unsre Fläche $\left|\overline{\underline{4a:b:4c}}\right|$, oder die mit 4fachem Cosinus in der Diagonalzone sey, so würde — abgesehen von der Unzulässigkeit jeder andern etwa beliebigen Annahme — der vollständige Beweis, dafs es keine andre Ebne ist, als die genannte, geführt werden können durch die Beobachtung des Parallelismus der Linien, welche an unserm Zwilling die verschiedenen Krystallflächen unter sich, und mit der den beiden Individuen gemeinsamen Ebne bilden. Dieser Parallelismus entspricht vollkommen und aufs schärfste gerade derjenigen Lage der den beiden Individuen gemeinsamen Ebne, von welcher die Rechnung zeigt, dafs es die der Fläche $\left|\overline{\underline{4a:b:4c}}\right|$ ist.

Die Eigenschaften des Bavenoer oder Adularzwillings in Beziehung auf den Parallelismus seiner Kanten, welcher sich auf die Gemeinschaft der Ebne $\left|\overline{\underline{4a:b:4c}}\right|$ für beide Individuen gründet, sind so vielfach, und so überraschend, dafs sie eine eigenthümliche und ausführliche Entwickelung verdienen, so wie dieser Zwilling überhaupt nebst dem aus ihm hervorgehenden Drilling und Vierling für eine eigene Abhandlung einen interessanten Gegenstand abgiebt. Wir beschränken uns hier bei seiner Betrachtung blofs auf den Gesichtspunkt, sofern der vielfältige Parallelismus seiner Kanten über-

all beweiset, daſs die den beiden Individuen gemeinsame Ebne keine andre ist, als $|4a:b:4c|$.

Zum vollkommneren Verständniſs der Endkrystallisation dieses Zwillings wird es gut seyn zu bemerken, daſs alle diejenigen Flächen, in deren Zeichen ∞b enthalten ist (vgl. S. 244. Anm.), nebst der auf b senkrechten Fläche M, an einem einzelnen Individuum überhaupt einzeln, die übrigen gepaart vorhanden sind *). Kommen sie daher als Endigungsflächen am Zwilling vor, so zeigen die ersteren ein einfaches, die gepaarten ein doppeltes Verhältniſs an demselben Ende, verschieden für die zweierlei Flächen, welche ein Paar ausmachen, wegen ihrer verschiedenen Lage gegen die gemeinsame Ebne $|4a:b:4c|$.

Da die gleichnamigen Flächen beider Individuen gegen die gemeinsame Ebne $|4a:b:4c|$ umgekehrte Lage haben (wie Rechts und Links), so schneiden sich je zwei gleichartige Flächen der zwei Individuen, wenn sie am Zwilling zusammenstoſsen, einander in der nämlichen Kante, in welcher jede von ihnen die gemeinsame Ebne selbst schneidet; und es müssen am Zwilling alle Kanten beider Individuen zwischen solchen Flächen parallel werden, welche in jedem Individuum sich parallel mit der Linie schneiden, in welcher die gemeinsame Ebne $|4a:b:4c|$ von ihnen geschnitten wird. Dies ist das Prinzip für unsern Parallelismus am Zwilling. Eine Folge davon ist nun zuförderst diese: Weil die gepaarte Fläche $|4a:b:4c|$ von der Fläche $|a':3c:\infty b|$, wie die Theorie zeigt, genau in der nämlichen Richtung geschnitten wird, wie von einer der gepaarten $|2a':b:2c|$, so geschieht es, daſs von den letzteren Flächen $o = |2a:b:2c|$ die einen, und zwar die an dem gewöhnlich freien, in der Fig. 9—11. abgebildeten Ende von der Grenze beider Individuen auswärts liegenden, eine Zwillings-Zuschärfung bilden, deren Kante genau so läuft, wie die, welche die ungepaarten Flächen $y = |a':3c:\infty b|$ gleichfalls als Zwillingszuschärfung

*) Parallele Flächen werden für Eine gezählt; gepaart heiſsen hier zwei gleichartige nicht-parallele, sondern von verschiedenen Richtungen, die daher an jedem Ende eines Individuums sich doppelt finden.

unter sich bilden, so daſs, wenn, wie in Fig. 9., beide zusammen vorkommen, die letztere als nochmalige Zuschärfung der ersteren mit genau beibehaltener Richtung der Zuschärfungskante erscheint. Ja, diese zweite Zuschärfung kommt, wie in Fig. 10. dargestellt ist, nochmals, und zwar mit einspringendem Winkel, unter strenger Beibehaltung der Richtung der (nunmehr zur einspringenden Furche gewordenen) Zuschärfungskante vor, wenn von den gepaarten Flächen T oder $l = \left|\overline{a : b : \infty c}\right|$ auſser den wohl jederzeit vorhandenen *) und mehr nach auſsen liegenden die zweiten seltner sichtbaren, d. i. die an dem nämlichen Ende mehr einwärts gegen die Grenze der Individuen gekehrten, noch hinzutreten. Kommen dann noch die der Grenzebne selbst parallelen Flächen n (als Abstumpfungsflächen der von den Flächen P und M eines und desselben Individuums gebildeten Kante der rechtwinklich-vierseitigen Zwillingssäule) hinzu, so zeigt der Zwilling einen Parallelismus der Kanten zwischen n und o, o und y, y und T, T und T' (einspringend), weiter T' und y', y' und o', o' und n' jenseits am zweiten Individuum **); und so fort, wenn das zweite Ende die vorigen Flächen wiederholt, in welchem Falle der Winkel zwischen T' und T, welcher am oberen Ende einspringend war, am unteren ausspringend wird, mit gleichem Werth der Neigung wie oben. In den Fig. 9. u. 10. ist der beschriebene Parallelismus bloſs über das eine Ende hinweg verfolgt, der Krystall aber nach dem zweiten Ende zu durch einen Queerschnitt der Zwillingssäule abgebrochen dargestellt. Die Fig. 9. zeigt ihn erst in seinen Hauptgliedern allein, d. i. den Parallelismus der Kanten zwischen o und y, y und y', y' und o', sämmtlich parallel den Kanten, in welchen jede dieser Flächen die gemeinsame Ebne n schneiden würde; in Fig. 10. erscheint derselbe noch ausgeführter in allen den Kanten zwischen n, o, y, T, T', y', o', und n'.

Die andern der gepaarten Flächen $o = \left|\overline{2a' : b : 2c}\right|$ ***), welche an dem nämlichen Ende mehr einwärts gegen die Grenze beider Individuen

*) In Fig. 9. sind sie bloſs weggelassen, weil sie zum Zweck dieser Figur nicht gehören.

**) Wir geben den Flachen des einen Individuums den Buchstaben ohne, denen des andern mit dem Accent $'$.

***) Der Unterschied dieser zwei Flächen o, wenn er im Zeichen selbst ausgedrückt werden sollte, lieſse sich völlig consequent so ausdrücken, daſs die eine $\left|\overline{2a' : b : 2c}\right|$, die an-

zu liegen, schneiden die vorige Fläche $\left|\overline{\underline{4a:b:4c}}\right|$ in einer andern Linie, und zwar, wie die Theorie wiederum zeigt, in gleicher Richtung, wie die Fläche $\left|\overline{\underline{3a':c:\infty b}}\right|$, d. i. *q*, ja auch, wie eine der gepaarten Flächen $z = \left|\overline{\underline{3a:b:\infty c}}\right|$ die nämliche Fläche $\left|\overline{\underline{4a:b:4c}}\right|$ schneidet. Daher geben diese zweiten, oder einwärts liegenden Flächen *o* mit den Flächen *q* und *n*, so wie mit den einwärts liegenden der gepaarten Flächen *z*, einen ganz ähnlichen Parallelismus ihrer sämmtlichen Kanten unter einander, welcher sich von einem Individuum über die Grenze hinweg im andern fortsetzt. Die Fig. 11. zeigt diesen zweiten Parallelismus der Kanten zwischen *n* und *q*, *q* und jenem zweiten *o*, eben dem *o* und dem entsprechenden *o'* des zweiten Individuums, und dann im letzteren fort zwischen *o'* und *q'*, *q'* und *n'*, womit die obere Hälfte einer durch den Parallelismus dieser Kanten gebildeten Zone von Flächen am Zwilling sich schlieſst; die untere Hälfte würde den ganzen Parallelismus mit Vertauschung des ausspringenden Winkels zwischen *o* und *o'* in einen einspringenden zum zweitenmal vollständig wiederholen.

Denkt man sich also die Zuschärfung des Zwillings (Fig. 11.) zuerst gebildet durch die Flächen *q*, *q'*, so wird diese Zuschärfung, mit genauer Beibehaltung der Richtung der Zuschärfungskante, nochmals zugeschärft durch die zweiten oder einwärts liegenden *o*, *o'*, so wie vorhin (Fig. 9.) die Zuschärfung der ersten oder auswärts liegenden *o* weiter zugeschärft wurde durch *y*; auch die zweite Zuschärfung *o*, *o'* (Fig. 11.) würde nochmals, und zwar einspringend, unter eben so strenger Beibehaltung der Richtung in der Furche des einspringenden Winkels, weiter zugeschärft werden, wenn die einwärts gekehrten Flächen *z* hinzuträten, welche indeſs in der Abbildung als entbehrlich nicht beigefügt worden sind.

Auſser diesen zwei Hauptrichtungen eines Parallelismus der Kanten, welcher an unserm Zwilling von einem Individuum über die Grenze hinweg in das andre Individuum hinüberläuft, und auf der entgegengesetzten Seite in das erste zurückkehrt, entwickeln sich an unserm Zwilling deren noch

dre $\left|\overline{\underline{2a':b':2c}}\right|$ geschrieben würde. Und so auch der Unterschied zwischen den übrigen gepaarten Flächen, sofern ihn im Zeichen selbst zu machen zum Bedürfniſs werden kann.

noch mehrere. Die Zuschärfung, gebildet von den Flächen x und x' (Fig. 11.) oder den Flächen $\left|\overline{\underline{a' : c : \infty b}}\right|$, würde weiter, und zwar einspringend, zugeschärft werden durch das Hinzutreten der einwärts liegenden von den gepaarten Flächen $\left|\overline{\underline{4a' : 3b : 12c}}\right|$; eine andre Zuschärfung, gebildet von den auswärts liegenden Flächen $\left|\overline{\underline{4a' : 3b : 12c}}\right|$, würde einspringend weiter zugeschärft werden durch die Flächen $\left|\overline{\underline{a' : \infty b : \infty c}}\right|$; und auch von diesem seltner beobachtbaren Fall hat das hiesige Königl. Mineralienkabinet ein schönes Beispiel in der Wirklichkeit aufzuweisen.

Die ganze Reihe der hier entwickelten Eigenschaften des Bavenoer Feldspath-, und Adular-Zwillings aber beruht gänzlich auf der Bedingung, daſs es die Ebne einer Fläche $\left|\overline{\underline{4a : b : 4c}}\right|$ und keine andere ist, deren Richtung die beiden Individuen gemein haben, und gegen welche die übrigen Flächen sämmtlich umgekehrt in dem einen, als in dem andern Individuum, liegen. Denn nur diese Ebne ist es, welche in jedem Individuo von allen den genannten übrigen Flächen in den angegebenen parallelen Richtungen geschnitten wird, welches indeſs umständlich entwickeln zu wollen, hier allzu weitläuftig scheinen dürfte *). Nur dadurch aber, daſs sie beiden gemein ist, wird es möglich, daſs der Parallelismus, wie er dem einzelnen Individuum zukommt, theils an der Grenze beider Individuen in der hier gebildeten Zwillingskante, theils jenseit dieser Grenze in dem andern Individuo sich fortsetzt.

Ist nun aber durch die rechtwinklich vierseitige Säule des Zwillings schon bewiesen, daſs die den beiden Individuen gemeinsame Ebne, d. i. der Diagonalschnitt der Säule gegen die Seitenflächen derselben gleich geneigt ist, so ist es nunmehr auch in aller Strenge als Thatsache anzusehen, daſs unsre Fläche $\left|\overline{\underline{4a : b : 4c}}\right|$ die angegebene Eigenschaft beim Feldspath wirklich besitzt.

Was die Annahme betrifft, daſs die geschobene Säule des Feldspathes die von 120° ist, so wird ihre Richtigkeit am wenigsten dem Zweifel ausgesetzt seyn. Ihre Einfachheit giebt ihr den Vorzug vor jeder andern, so

*) Wir müssen vielmehr hier auf die Theorie des zwei-und-ein-gliedrigen Systems überhaupt verweisen.

lange sie mit der Beobachtung übereinstimmt; und keine Winkelmessung berechtiget, irgend von ihr abzugehen. Ja, es kommen sogar gewisse Zwillingskrystalle vor, welche auf ähnliche Weise eine strengere Bürgschaft für sie leisten, wie die Bavenoer für die obige Eigenschaft; nämlich Zwillingskrystalle, welche eine der Seitenflächen $T = \left|\overline{\underline{a : b : \infty c}}\right|$ dieser geschobnen Säule zur gemeinschaftlichen Ebne, die andre umgekehrt liegen haben. Dann wird diese zweite Ebne in dem einen Individuum parallel der Fläche des zweiten blättrigen Bruches M oder $\left|\overline{\underline{b : \infty a : \infty c}}\right|$ in dem andern; sie fällt in deren Verlängerung, und umgekehrt. Es sind mir neuerlich die deutlichsten Beweise des wirklichen Vorkommens auch dieser Art von Zwillingskrystallen beim Feldspath bekannt geworden.

Sind aber jene beiden Eigenschaften des Feldspathsystemes als vollkommen bewährt anzusehen, ist ferner der ächt hendyoëdrische Charakter desselben es gleichfalls, dann ist der Beweis in aller Strenge vollendet, daſs im Feldspath die drei unter sich rechtwinklichen Grunddimensionen, a, b und c sich verhalten, wie $1 : \sqrt{3} : \sqrt{\frac{3}{13}} = \sqrt{13} : \sqrt{39} : \sqrt{3}$

Haben wir aber in der Aufstellung der geometrischen Grundverhältnisse eines vom regulären abweichenden Krystallisationssystemes irgend ein Beispiel von Strenge, wie dieses, so haben wir auch Hoffnung genug, daſs es überhaupt gelingen könne, auch in den vom regulären abweichenden Krystallisationssystemen die wahren Verhältnisse nicht bloſs annäherungsweise, sondern in aller geometrischen Schärfe zu entdecken! Eben deshalb aber kann es nicht ohne allgemeines Interesse seyn, die Aechtheit und strenge Richtigkeit irgend einer Annahme für einen gegebenen Fall, wenn auch nur schrittweise verbürgt zu sehen, in einem Felde, wo sonst nur hypothetische Annahmen möglich scheinen, und am meisten bei einer Fossiliengattung, an deren schärfster Kenntniſs vergleichungsweise so viel gelegen ist, als an der des Feldspathes.

Wir gehen nach der jetzt gegebenen Erörterung der drei ersten Haupteigenschaften des Feldspathsystemes, wie sie auf das Grundverhältniſs

$a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{3.13} : \sqrt{3}$ gegründet sind, noch zu einigen anderen fort, welche gleichfalls bemerkenswerth scheinen.

Eine derselben ist eine direkte Folge derjenigen, deren genaue Richtigkeit wir so eben durch die Adular- und Bavenoer Zwillingskrystalle verbürgt gesehen haben, nämlich:

4) unsre Rhomboïdflächen $\left|\overline{\underline{2a' : b : 2c}}\right|$ bilden unter sich den Winkel, welchen am Schwefelkies-Dodekaëder je zwei in der Hauptkante dieses Dodekaëders zusammenstofsende Flächen unter sich bilden, d. i. den Winkel, für dessen Hälfte sich Sinus und Cosinus verhalten, wie 2 : 1, den Winkel von 126° 52′ 11″,5.

Hat nämlich unsre Fläche $\left|\overline{\underline{4a : b : 4c}}\right|$, (d. i. die Fläche mit vierfachem Cosinus in der Diagonalzone der Schief-Endfläche $P = \left|\overline{\underline{a : c : \infty b}}\right|$) gleiche Neigung gegen P und M, welche unter sich rechtwinklich sind, also gegen jede die Neigung mit dem Verhältnifs von Sinus zu Cosinus wie 1 : 1, so folgt, dafs die Fläche mit doppeltem Cosinus in der der vorigen gleichen Diagonalzone von x oder $\left|\overline{\underline{a' : c : \infty b}}\right|$, d. i. die Fläche $\left|\overline{\underline{2a' : b : 2c}}\right|$ gegen $M = \left|\overline{\underline{b : \infty a : \infty c}}\right|$ geneigt seyn müsse unter dem Verhältnifs von Sinus zu Cosinus wie $1 : \frac{1}{2} = 2 : 1$. Aber die die Neigung der Rhomboïdflächen $\left|\overline{\underline{2a' : b : 2c}}\right|$ unter sich halbirende Ebne, d. i. die, auf welche wir überhaupt die Neigungen der verschiedenen Flächen in den Diagonalzonen von P, x u. s. f. gemeinschaftlich beziehen, ist parallel der Fläche M; mithin hat die halbe Neigung der Rhomboïdflächen gegen einander das Verhältnifs von Sinus zu Cosinus, wie 2 : 1, wie oben gesagt wurde.

Eben diese halbe Neigung direct berechnet, giebt die Bestätigung. In dem Zeichen der Fläche $\left|\overline{\underline{2a' : b : 2c}}\right|$ ist unmittelbar ersichtlich, dafs für die gesuchte Neigung sich verhält $sin : cos = b : \frac{2a.\ 2c}{\sqrt{(2a)^2 + (2c)^2}} = b : \frac{2\,ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$; auch ihre Function, dafs sie die Fläche mit doppeltem Cosinus (bei gleichem Sinus) in der Diagonalzone von x ist (diejenige Fläche als die mit dem einfachen Cosinus zum Grunde gelegt, deren Neigung hat

$sin : cos = b : \frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$) sagt das nämliche aus. Aber wenn $a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{39} : \sqrt{3}$, so ist b : $\frac{2\,ac}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \sqrt{39} : \frac{2\sqrt{39}}{4} = 1 : \frac{1}{2} = 2 : 1$. Und somit ist die Neigung der Rhomboïdflächen unter sich beim Feldspath jene bekannte von $126° 52' 11'',5$, wie die Hauptneigung am Schwefelkies-dodekaëder. Fänden sich in den Diagonalzonen von *P* und *x* beim Feldspath noch mehrere Flächen ein, so würden auch sie in den Neigungen gegen einander eine ähnliche Gleichheit der Winkel mit andern Flächen aus der Kantenzone des Würfels zeigen, in welche bekanntlich die Fläche des Schwefelkies-Dodekaëders gehört.

5) Eine fernere merkwürdige Eigenheit des Feldspathsystems entspringt aus dem aufgefundenen Verhältniſs $a : c = \sqrt{13} : \sqrt{3}$. Es ist diese: Die Fläche $y = \left|\overline{\underline{a' : 3c : \infty b}}\right|$ ist gegen die (der Dimension *c* parallele) stumpfe Seitenkante der Säule *TT* genau unter demselben Winkel geneigt, wie die Fläche $\left|\overline{\underline{3a' : c : \infty b}}\right|$, d. i. *q* gegen die Schief-Endfläche $P = \left|\overline{\underline{a : c : \infty b}}\right|$; und umgekehrt: *q* gegen die stumpfe Seitenkante der Säule *TT* genau unter demselben Wirbel, wie *y* gegen *P*.

Gehen wir aus von der Neigung, welche die Schief-Endfläche *P* oder *x* gegen die Axe *c* hat, für welche Neigung nämlich $sin : cos = a : c$, so ist die Fläche *y* in dem, was wir die vertikale Zone dieses Systemes nennen, die Fläche mit dreifachem Cosinus der Neigung gegen die Axe (bei gleichem Sinus mit *x*), und umgekehrt die Fläche *q* ist die mit dreifachem Sinus (bei gleichem Cosinus mit *x*). Wir sagen also: die Eigenheit in der vertikalen Zone des Feldspathsystems ist diese, daſs die Fläche mit dreifachem Cosinus gegen die Seitenkante der Säule eben so geneigt ist, wie die Fläche mit dreifachem Sinus gegen die (jenseit der Axe ihr gegenüberliegende) Schief-Endfläche *P*; und umgekehrt.

Die letztere Neigung aber ist die Summe der Neigungen der Fläche *P* und *q* gegen die Axe. Nennen wir also die Neigung von *P* gegen die Axe α, die von *q* gegen dieselbe β (— beide sind scharf —), die von *y* aber gegen die Seitenkante der Säule γ (— die letztere Neigung ist stumpf —) so haben wir als gegeben

für den Winkel α, $sin : cos = a : c = \sqrt{13} : \sqrt{3}$
— — — β, — — $= 3a : c$
— — — γ, — — $= a : 3c$

Hieraus folgt für den Winkel $(\alpha + \beta)$, $sin : cos = a.c + c.3a : a.3a - c.c = 4ac : 3a^2 - c^2$

für den gegebenen Werth von a und c also, $sin(\alpha+\beta) : cos(\alpha+\beta) = 4\sqrt{13.3} : 3.13 - 3 = \sqrt{3.13} : 9 = \sqrt{13} : \sqrt{27}$

und für den Winkel γ ist gegeben, $sin\,\gamma : cos\,\gamma = a : 3c = \sqrt{13} : 3\sqrt{3} = \sqrt{13} : \sqrt{27}$

Unter der Voraussetzung $a : c = \sqrt{13} : \sqrt{3}$ sind also wirklich die beiden genannten Winkel gleich, jeder $= 145° \, 14' \, 37'',2$.

Geht man umgekehrt von der Gleichheit beider Winkel als dem Gegebnen aus, so folgt aus ihr ganz leicht das Verhältnifs $a : c = \sqrt{13} : \sqrt{3}$. Denn wenn $\gamma = \alpha + \beta$, so ist $4ac : 3a^2 - c^2 = a : 3c$, also

$12c^2 = 3a^2 - c^2$, mithin
$13c^2 = 3a^2$, und
$c^2 : a^2 = 3 : 13$, oder $c : a = \sqrt{3} : \sqrt{13}$

Eben so, wenn man die umgekehrte Eigenschaft zum Gegenstand der Untersuchung macht: dafs die Neigung von q gegen die Seitenkante der Säule gleich ist der Neigung von y gegen P, d. i. gleich der Summe der Neigungen von P und y gegen die Axe.

Es heifse dann wieder die Neigung von P gegen die Axe α, die von y gegen die Axe γ', die von q gegen die Seitenkante β' (— letztere ist stumpf, die beiden ersteren scharf —), so ist gegeben

für den Winkel α, $sin : cos = a : c$
— — — γ', — — $= a : 3c$
— — — β', — — $= 3a : c$

Folglich haben wir für den Winkel $\alpha + \gamma'$, $sin : cos = a.3c + c.a : a.a - c.3c = 4ac : a^2 - 3c^2$, d. i. wenn $a = \sqrt{13}$, $c = \sqrt{3}$, $sin(\alpha + \gamma') : cos(\alpha + \gamma') = 4\sqrt{13.3} : 13 - 9 = \sqrt{39} : 1$

Für β' aber ist gegeben $sin\,\beta' : cos\,\beta' = 3a : c = 3\sqrt{13} : \sqrt{3} = \sqrt{39} : 1$, gleich dem vorigen. Beide Winkel also, $\alpha + \gamma'$ und β', finden sich $= 99° \, 5' \, 50'',8$.

Oder sieht man als gegeben an, dafs $\alpha + \gamma' = \beta'$, so ist

$4ac : a^2 - 3c^2 = 3a : c$, folglich
$4c^2 = 3a^2 - 9c^2$, also
$13c^2 = 3a^2$, und $c : a = \sqrt{3} : \sqrt{13}$, wie oben.

Die hier erörterte Eigenschaft ſindet sich in der vertikalen Zone des Feldspathes wiederholt. So wie die Flächen y und q ihre Neigungen gegen die Seitenkante der Säule und gegen die Fläche P gegenseitig vertauschen, so thun es auch die Fläche $x = \left|\overline{\underline{a' : c : \infty b}}\right|$, und eine Fläche, deren Ausdruck seyn würde $\left|\overline{\underline{5a' : 5c : \infty b}}\right|$. Es heiſse wieder α der scharfe Winkel, welchen die Fläche $P = \left|\overline{\underline{a : c : \infty b}}\right|$, β, der ihm gleiche, welchen die Fläche x mit der Axe, und γ der stumpfe Winkel, welchen die Fläche $\left|\overline{\underline{3a' : 5c : \infty b}}\right|$ mit der Seitenkante der Säule bildet; so ist gegeben

für jeden der Winkel $\alpha = \beta$, $\sin : \cos = a : c$
für den Winkel γ, — — $= 3a : 5c$
für den Winkel $\alpha + \beta = 2\alpha$ also wird $\sin : \cos = 2ac : a^2 - c^2$

Bei den bekannten Werthen von a und c wird $\sin(\alpha + \beta) : \cos(\alpha + \beta) =$
$2\sqrt{13 \cdot 3} : 13 - 3 = \sqrt{39} : 5$
und für den Winkel γ ist gegeben $\sin : \cos = 3\sqrt{13} : 5\sqrt{3} = \sqrt{39} : 5$

Daher aus dem Verhältniſs $a : c = \sqrt{13} : \sqrt{3}$ die Gleichheit der angegebnen Winkel, jeder $= 128° \, 40' \, 56''$, wiederum wirklich folgt.

Umgekehrt folgt auch das Verhältniſs $a : c = \sqrt{13} : \sqrt{3}$ aus der gegebenen Gleichheit jener Winkel. Denn ihr zufolge ist

$2ac : a^2 - c^2 = 3a : 5c$, folglich
$10c^2 = 3a^2 - 3c^2$, also
$13c^2 = 3a^2$, mithin $c^2 : a^2 = 3 : 13$, und $c : a = \sqrt{3} : \sqrt{13}$

Stellt man auch diese Eigenschaft in der umgekehrten Form auf, so nämlich, daſs die Neigung der Fläche x gegen die Seitenkante der Säule gleich sey der Neigung der Fläche $\left|\overline{\underline{3a' : 5c : \infty b}}\right|$ gegen P, d. i. der Summe der Neigungen beider letzteren Flächen gegen die Axe; und nennt man wiederum den ersteren (stumpfen) Winkel β', die letzteren γ' und α, so ist gegeben

für den Winkel α, $\sin : \cos = a : c$
— — — γ, — — $= 3a : 5c$
— — — β', — — $= a : c$

Es wird nun für den Winkel $\alpha + \gamma'$, $sin : cos = a.\,5c + c.\,3a : a.\,3a - c.\,5c =$

$$8\,ac : 3a^2 - 5c^2$$

Ist also $a = \sqrt{13}$, $c = \sqrt{3}$, so ist $sin\,(\alpha + \gamma') : cos\,(\alpha + \gamma') = 8\sqrt{13.3} :$

$$39 - 15 = \sqrt{13.3} : 3 = \sqrt{13} : \sqrt{3}$$

Eben so ist für den Winkel β' gegeben, $sin : cos = a : c = \sqrt{13} : \sqrt{3}$, gleich dem vorigen; der Werth beider Winkel wird sonach $115° 39' 32''$.

Sieht man umgekehrt als gegeben an, daſs $\alpha + \gamma' = \beta'$, so ist

$8\,ac : 3a^2 - 5c^2 = a : c$, folglich

$8\,c^2 = 3a^2 - 5c^2$, also wieder

$13\,c^2 = 3a^2$, und $c : a = \sqrt{3} : \sqrt{13}$, wie vorher.

Ob die Fläche $\left|\overline{\underline{3a' : 5c : \infty b}}\right|$ beim Feldspath in der Wirklichkeit vorkomme, ist noch zweifelhaft, da sie in den Winkeln sehr nahe kommt mit einer andern, deren Ausdruck seyn würde $\left|\overline{\underline{2a' : 3c : \infty b}}\right|$. Die Neigung der letzteren gegen die Seitenkante würde betragen $125° 46' 52'',4$ statt $128° 40' 56''$, und gegen P, $118° 35' 55'',6$ statt $115° 39' 32'$. Eine dieser beiden Flächen findet sich allerdings zuweilen als Abstumpfungsfläche zwischen x und y, jedoch so selten von hinlänglicher Glätte, daſs die Entscheidung, mit welcher der beiden Formeln sie übereinkommt, noch dahin gestellt bleiben muſs.

Auch wenn man sich an die Haüy'schen Bestimmungen für den Feldspath streng hält, so ergiebt sich eine analoge Gleichheit für die den angegebenen entsprechenden Winkel seiner Flächen x, y, q, und einer vierten, welcher er das Zeichen $\overset{\frac{3}{2}}{I}$ geben würde, während er y das Zeichen $\overset{1}{I}$, x das Zeichen $\overset{2}{I}$ und q das Zeichen $\overset{3}{I}$ giebt. Es wird dann

für die Neigung von y gegen die Seitenkante der Säule,

$$sin : cos = 1 : \frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{12} - 1}}$$

und für die Neigung von q gegen P gleichfalls

$$sin : cos = 1 : \frac{4 - \sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{12} - 1}}$$

oder für die Neigung von q gegen die Seitenkante der Säule

$$sin : cos = 1 : \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{12} - 1}}$$

für die Neigung von y gegen P aber auch,

$$sin : cos = 1 : \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{12}-1}}$$

Die beiden ersten der unter sich gleichen Winkel werden hienach jeder zu 145° 18′ 40″, die beiden letzteren jeder 99° 41′ 12″,5.

Für die Neigung von x gegen die Seitenkante der Säule ist ferner zufolge der Haüy'schen Angaben

$$sin : cos = 1 : \frac{\frac{5}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{12}-1}}$$

und für die Neigung einer Fläche $\overset{\frac{3}{2}}{I}$ gegen P gleichfalls,

$$sin : cos = 1 : \frac{\frac{5}{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{12}-1}}$$

oder auch für die Neigung der Fläche $\overset{\frac{3}{2}}{I}$ gegen die Seitenkante der Säule,

$$sin : cos = 1 : \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{12}-1}}$$

so wie für die Neigung von x gegen P auch

$$sin : cos = 1 : \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{12}-1}}$$

Die beiden ersten Winkel werden jeder = 116° 4′ 7″,5, und die beiden letzten jeder = 128° 55′ 45″,3.

Allein wir können, wie schon oben S. 250 erinnert wurde, wenn wir die Haüy'schen Bestimmungen zum Grunde legen, weder der Fläche x, d. i. Haüy's $\overset{2}{I}$, gleiche und umgekehrte Neigung von P gegen die Axe beilegen, noch die Fläche y (d. i. Haüy's $\overset{1}{I}$) die mit dreifachem Cosinus, oder die Fläche q (d. i. sein $\overset{3}{I}$) die mit dreifachem Sinus (in der vertikalen Zone) nennen; und eben so wenig wird seine Fläche $\overset{\frac{3}{2}}{I}$ die unsrige mit $\frac{5}{3}$fachem Cosinus werden. Vielmehr beruhen diese unsrer Darstellung angehörigen Werthe der genannten Flächen auf unsrer Ansicht des Feldspathsystemes als eines hendyoëdrischen in dem Sinne, in welchem es nach der Haüy'schen Darstellung ein solches nicht ist. Es zeigt sich statt dessen

aus

aus den eben angeführten Resultaten der Rechnung, und aus dem, was oben S. 250. angeführt wurde, dafs für die Neigungen der Haüy'schen Flächen $\overset{1}{\underset{y}{I}}$, $\overset{2}{\underset{x}{I}}$, $\overset{3}{\underset{q}{I}}$, $\overset{\frac{3}{2}}{I}$ und P gegen die Axe bei gleichem Sinus sich die Cosinusse verhalten würden wie

$$4 - \sqrt{3} : \tfrac{5}{2} - \sqrt{3} : 2 - \sqrt{3} : 3 - \sqrt{3} : \sqrt{3} - 1;$$

und wenn wir diesen Verhältnissen der Cosinusse die gegenüberstellen, wie sie sich für die nämlichen Flächen des Feldspathsystemes unsern Untersuchungen zufolge ergeben, so erhalten wir statt des obigen Verhältnisses dieses:

$$3 : 1 : \tfrac{1}{3} : \tfrac{5}{3} : 1 = 9 : 3 : 1 : 5 : 3 \quad ^{*}).$$

dessen grofse Einfachheit, vergleichungsweise gegen jenes, nicht wenig zur Empfehlung der Prämissen gereichen wird, aus denen es gefolgert ist.

6) Die Eigenheiten der vertikalen Zone des Feldspathes flossen aus dem Verhältnifs $a : c = \sqrt{15} : \sqrt{3}$. Andre Eigenschaften dieses Systemes fliefsen aus dem Verhältnifs $a : b = 1 : \sqrt{3}$, und sind dem Feldspath mit jedem zwei-und-ein-gliedrigen, oder auch zwei-und-zwei-gliedrigen Systeme gemein, welchem die Säule von 120° und 60°, d. i. das Verhältnifs $a : b = 1 : \sqrt{3}$ zum Grunde liegt.

Dahin gehört fürs erste der an sich evidente Uebergang einer solchen Säule in die gleichwinklich-sechsseitige (welche doch nie mit der regulären zu verwechseln ist, weil immer ein bestimmter physikalischer und krystallonomischer Unterschied zwischen den Seitenflächen der Säule von 120° und den geraden Abstumpfungsflächen ihrer scharfen Seitenkanten bleibt, wie er z. B. beim Feldspath so ausnehmend sich beweist, und welcher der regulären sechseitigen Säule fremd ist); dahin gehört ferner der Umstand, dafs die Flächen z der Haüy'schen Abbildungen, d. i. die Flächen $\left|\overline{\underline{3a : b : \infty c}}\right|$ oder die mit 3fachem Cosinus in der horizontalen Zone (ihre Neigung gegen die durch die stumpfen Seitenkanten gelegte Ebne $\left|\overline{\underline{b : \infty a : \infty c}}\right|$ in Betracht gezogen, und mit der Normalneigung der Seitenfläche T, d. i.

*) Wenn in der Wirklichkeit vielleicht nicht die Flache $\left|\overline{\underline{3a' : 5c : \infty b}}\right|$, sondern die $\left|\overline{\underline{2a' : 3c \cdot \infty b}}\right|$ vorkommen möchte, so würde sie die Flache mit $\frac{3}{2}$fachem Cosinus seyn, und die obige Verhaltnifsreihe der Cosinusse sich verandern in diese, $3 : 1 : \frac{1}{3} : \frac{3}{2} : 1$, die der Sinusse (bei gleichen Cosinussen) aber in diese, $\frac{1}{3} : 1 : 3 : \frac{2}{3} : 1 = 1 : 3 : 9 : 2 : 3$.

$|\overline{a:b:\infty c}|$ gegen dieselbe verglichen) unter sich wieder die Säule von 120° und 60° bilden, mit umgekehrter Lage der stumpfen und scharfen Kanten, als in der der Flächen $|\overline{a:b:\infty c}|$. Die letzteren nämlich haben für diese Neigung das Verhältniſs $sin : cos = b : a = \sqrt{3} : 1$, die Flächen z aber, wie schon ihr Zeichen es unmittelbar ausspricht, das Verhältniſs $sin : cos = b : 3a = \sqrt{3} : 3 = 1 : \sqrt{3}$, folglich das umgekehrte des ersten.

Fügt man noch die beim Feldspath nicht selten vorkommenden geraden Abstumpfungsflächen der stumpfen Seitenkanten der Säule, d. i. die Flächen $|\overline{a:\infty b:\infty c}|$ zu den vorigen hinzu, so hat man den Uebergang in die gleichwinklich zwölfseitige Säule, aber wieder mit dem Unterschied der Flächen $|\overline{3a:b:\infty c}|$ und $|\overline{a:\infty b:\infty c}|$, welcher bei der aus der regulär-sechsseitigen entspringenden wegfällt.

Aber es gehören zu den aus dem Verhältniſs $a : b = 1 : \sqrt{3}$ flieſsenden Eigenschaften auch noch andre weniger in die Augen fallende, und um so merkwürdigere, von denen ich die hauptsächlichste hier entwickeln will. Nämlich: jedesmal, wenn die Säule das Verhältniſs hat $a : b = 1 : \sqrt{3}$, das Verhältniſs von $a : c$ sey welches es wolle, würden zwei Flächen $|\overline{6a':2b:3c}|$ gemeinschaftlich mit der Schief-Endfläche $|\overline{a:c:\infty b}|$ eine ächt-rhomboëdrische dreiflächige Zuspitzung geben, d. i. mit gleichen Neigungen der Zuspitzungsflächen unter sich, und gleicher Neigung gegen die Axe; und es würden diese drei Flächen $|\overline{a:c:\infty b}|$, $|\overline{6a':2b:3c}|$ und $|\overline{6a':2b':3c}|$ *) auf die abwechselnden Seitenkanten der gleichwinklich-sechsseitigen Säule des Systemes gerad aufgesetzt erscheinen, wie im rhomboëdrischen System die Flächen eines Rhomboëders auf die abwechselnden Seitenkanten derjenigen regulären sechsseitigen Säule gerad aufgesetzt sind, deren Flächen die geraden Abstumpfungsflächen der Lateralkan-

*) In diesem letztern Zeichen deute ich, dem in der Anm. zu S. 244 gesagten gemäſs, an, daſs die entsprechende Dimension in b in entgegengesetzter Richtung zu nehmen ist, als bei der Flache $|\overline{6a:2b:3c}|$, so wie $|\overline{a:c:\infty b}|$ als das Zeichen für P, und $|\overline{a':c:\infty b}|$ als das Zeichen für x, für die beiden bezeichneten Flächen einen ähnlichen Gegensatz der Richtung in der Dimension a andeuten, u. s. w. Wo es nicht nothig ist, diesen Gegensatz besonders auszudrücken, dient ein und dasselbe Zeichen für beide.

ten des Rhomboëders, d. i. nach Haüy's Ausdruck $\overset{1}{D}$ sind, und welche ich die zweite sechsseitige Säule des rhomboëdrischen Systems nenne.

Die Flächen aber $\left|\overline{\underline{6a':2b:3c}}\right|$, welche für den Fall $a:b = 1:\sqrt{3}$ die merkwürdige Eigenschaft besitzen, mit der Fläche $\left|\overline{\underline{a:c:\infty b}}\right|$ zusammen eine rhomboëdrische Zuspitzung der Säule zu bilden, würden an einem Hendyoëder als Grundform die Haüy'sche Bezeichnung $\overset{\frac{2}{3}}{B}$ bekommen *); sie würden an demselben die scharfen Endkanten B abstumpfen, oder, wie ich mich auszudrücken pflege, in die scharfe Hälfte der Kantenzone des Hendyoëders fallen. Der Beweis, daſs sie mit der Schief-Endfläche P zusammen eine rhomboëdrische Zuspitzung bilden, zerfällt in die zwei Theile:

a) daſs die Neigung einer solchen Fläche gegen die Seitenfläche $\left|\overline{\underline{a':b:\infty c}}\right|$, in deren Kantenzone sie fällt, gleich ist der Neigung der Schief-Endfläche $P = \left|\overline{\underline{a:c:\infty b}}\right|$ gegen die der vorigen parallele Seitenfläche $\left|\overline{\underline{a:b':\infty c}}\right|$; oder was dasselbe ist: daſs die Neigungen der einen, wie der andern, gegen eine den genannten Seitenflächen parallele, das Hendyoëder halbirende Ebne sich gleich sind; (— die letzteren Neigungen sind die Complemente der ersteren —).

b) daſs eben die letztgenannte scharfe Neigung gleich ist der Hälfte der Neigung einer der Flächen $\left|\overline{\underline{6a':2b:3c}}\right|$ gegen die andre $\left|\overline{\underline{6a':2b':3c}}\right|$.

Ich bediene mich zum Erweis beider Sätze einiger allgemeiner für das hendyoëdrische System geltender krystallonomischer Formeln, deren Deduction anderwärts gegeben wird.

1. Für die Neigung der Schief-Endfläche $\left|\overline{\underline{a:c:\infty b}}\right|$ gegen die Seitenfläche $\left|\overline{\underline{a:b:\infty c}}\right|$ gilt allgemein folgende Formel,

$$\sin : \cos = a\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : bc$$

Wenn also $b = a\sqrt{3}$, so verwandelt sich diese Formel in folgende,

$$\sin : \cos = a\sqrt{4a^2 + c^2} : ac\sqrt{3} = \sqrt{4a^2 + c^2} : c\sqrt{3}$$

*) Vgl. Haüy's Lehrbuch, Taf. LIV. Fig. 132. oder 138.

2. Für die Neigung irgend einer Fläche, welche in die scharfe Hälfte der Kantenzone des Hendyoëders gehört, gegen die Seitenfläche dieser Zone gilt allgemein diese Formel

$$sin : cos = n\,a\,b\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : c\,(a^2 + (1 - n)\,b^2)$$

Hier ist der Werth von n zu erläutern. Es heiſse in dem Dimensionszeichen der Fläche wie $\left|\overline{\underline{6a' : 2b : 3c}}\right|$ der Coëfficient von b, β, der Coëfficient von c heiſse γ, so ist $n = \frac{\beta}{\gamma}$, im vorliegenden Fall $n = \frac{2}{3}$ *).

Daſs aber die Fläche $\left|\overline{\underline{6a' : 2b : 3c}}\right|$ wirklich in die Kantenzone des Hendyoëders fällt, — und nur in diesem Falle paſst die obige Formel auf sie —, das setze ich hier voraus; der Beweis dafür wird ebenfalls anderswo gegeben. So wird also für $\left|\overline{\underline{6a' : 2b : 3c}}\right|$ die obige Formel diese:

$$sin : cos = \tfrac{2}{3}\,a\,b\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : c\,(a^2 + \tfrac{1}{3}\,b^2)$$

folglich, wenn $b = a\sqrt{3}$,

$$sin : cos = \frac{2}{\sqrt{3}}\,a^2\sqrt{4a^2 + c^2} : c.\,2a^2 = \sqrt{4a^2 + c^2} : c\sqrt{3},$$ wie oben bei 1.

Die Gleichheit dieser beiden Neigungen wäre demnach bewiesen.

3. Die halbe Neigung der beiden Flächen $\left|\overline{\underline{6a' : 2b : 3c}}\right|$ gegen einander, d. i. die Neigung einer jeden gegen eine Ebne $\left|\overline{\underline{b : \infty a : \infty c}}\right|$ ergiebt sich aus ihrem Dimensionszeichen sehr leicht. Man nenne wieder α, β, γ, die Coëfficienten von a, b und c, wie sie im Zeichen angegeben sind, so ist für die gesuchte Neigung jederzeit

$$sin : cos = \beta.\,b : \frac{\alpha.\,a \times \gamma.\,c}{\sqrt{\alpha^2 a^2 + \gamma^2 c^2}}$$

für die Fläche $\left|\overline{\underline{6a' : 2b : 3c}}\right|$ also

$$sin : cos = 2b : \frac{18\,ac}{\sqrt{36a^2 + 9c^2}} = b : \frac{3\,ac}{\sqrt{4a^2 + c^2}} = b\sqrt{4a^2 + c^2} : 3\,ac$$

*) Dieses $n = \frac{\beta}{\gamma}$ findet sich auch jederzeit identisch mit dem Exponenten in dem auf das Hendyoëder sich beziehenden Haüy'schen Zeichen der Fläche — (hier $\overset{\frac{2}{3}}{B}$) — wenn derselbe über den Buchstaben der Kante gesetzt wird.

Wenn aber $b = a\sqrt{3}$, so ist

$$sin : cos = \sqrt{4a^2 + c^2} : \sqrt{3} \times c,$$ wie bei No. 1. und 2.

Folglich sind alle drei Neigungen gleich, mithin auch ihre Doppelten; und das sind die Neigungen der drei genannten Flächen unter sich in den Kanten der von ihnen gebildeten dreiflächigen Zuspitzung, welche deshalb in ihren geometrischen Eigenschaften wahrhaft rhomboëdrisch ist. Daſs die Flächen $\left|\overline{\underline{6a' : 2b : 3c}}\right|$ gerad aufgesetzt sind auf die Seitenkanten der gleichwinklich sechsseitigen Säule, welche von einer Fläche $\left|\overline{\underline{a : b : \infty c}}\right|$ und einer Fläche $\left|\overline{\underline{b : \infty a : \infty c}}\right|$ eingeschlossen werden, ist in der obigen Demonstration mit enthalten; denn No. 2. gab ihre Neigung gegen die Seitenfläche $\left|\overline{\underline{a : b : \infty c}}\right|$, No. 3. die gegen die Fläche $\left|\overline{\underline{b : \infty a : \infty c}}\right|$ an. Zugleich leuchtet ein, daſs diese merkwürdige Eigenschaft der Fläche $\left|\overline{\underline{6a' : 2b : 3c}}\right|$ ganz unabhängig ist von dem Werthe von c, und lediglich an das Verhältniſs von $a : b = 1 : \sqrt{3}$ gebunden.

Im zwei-und-zwei-gliedrigen System kommen ähnliche Uebergänge in das sechsgliedrige System vor, wenn das Verhältniſs $a : b = 1 : \sqrt{3}$ bei ihnen sich gegeben findet.

Betrachten wir aber unsre Fläche $\left|\overline{\underline{6a' : 2b : 3c}}\right|$ noch etwas näher, so lesen wir in ihrem Zeichen zwei Eigenschaften, nämlich: daſs sie in die vertikale Zone einer Fläche $\left|\overline{\underline{6a' : 2b : \infty c}}\right|$, d. i. $\left|\overline{\underline{3a' : b : \infty c}}\right|$, d. i. der Fläche mit dreifachem Cosinus in der horizontalen Zone fällt, oder mit andern Worten: in die vertikale Zone der Feldspathfläche z, also auf dieser eine horizontale Kante (als eine auf sie gerad aufgesetzte Zuspitzungsfläche) bilden würde. Die andre Eigenschaft ist: daſs sie in eine Diagonalzone der Fläche $\left|\overline{\underline{6a' : 3c : \infty b}}\right| = \left|\overline{\underline{2a' : c : \infty b}}\right|$, d. i. der Fläche mit doppeltem Sinus in der vertikalen Zone des Feldspathes fallen würde. Sie wäre demnach selbst leicht deducirt, und erscheint als eine der Flächen, welche in einem Krystallisationssysteme nicht allein sehr wohl möglich, sondern auch sehr nahe begründet scheinen.

Kommt diese Fläche aber mit ihrer sonderbaren Eigenschaft, unser zwei- und-ein-gliedriges System gleichsam in ein rhomboëdrisches umzugestalten,

wohl wirklich vor? — Beim Feldspath gewiſs am wenigsten! Ueberhaupt aber lassen sich gegen ihr wirkliches Vorkommen zwei Wahrnehmungen anführen, welche zu den charakterisirenden für das zwei-und-ein-gliedrige System überhaupt gehören; die eine ist: daſs dem zwei-und-ein-gliedrigen System es höchst fremd ist, Krystallisationsflächen in den vertikalen Zonen der Seitenflächen seiner Säule (oder der Flächen seiner horizontalen Zone) zu zeigen, — während doch eine solche Ausbildung des Systems bei dem ihm so verwandten zwei-und-zwei-gliedrigen zu den gewöhnlichen Erscheinungen gehört; die andre ist die: daſs in der vertikalen Zone eines zwei-und-ein-gliedrigen Systemes (— und selbst in der horizontalen —) nicht leicht die Fläche mit doppeltem Sinus oder Cosinus, sondern dagegen gleichsam als charakteristisch die mit dreifachem Sinus oder Cosinus sich zu bilden pflegt, wie eben beim Feldspath sehr einleuchtet; wogegen wiederum bei dem zwei-und-zwei-gliedrigen Systeme nichts gemeiner ist, als die Bildung der Flächen mit doppeltem Sinus oder Cosinus in den analogen Zonen. Aehnliche sehr constante allgemein unterscheidende und gleichsam die Physiognomie eines Krystallisationssystemes bestimmende Züge lassen sich mehrere anführen, durch welche die in ihrem Fundament so ganz nah verwandten zwei-und-zwei-, und zwei-und-ein-gliedrigen Systeme doch in der Erscheinung, in dem Gange ihrer weiteren Entwickelung, auffallend contrastiren.

7) Man erlaube mir endlich, noch in ein Paar verstecktere Eigenheiten unsres Feldspathsystemes einzugehen, welches in Eigenheiten beinahe schon überreich sich erwiesen hat. Welche Winkel haben sich nicht schon unter der Voraussetzung $a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{3.\ 13} : \sqrt{3}$ überraschend gleich gefunden, zu deren Gleichheit sonst gar kein Anschein ist! Es finden sich deren in andern Zonen des Feldspathes noch mehrere, wo man sie noch weniger suchen würde. An sich ist es interessant, auf eine Zone des Feldspathes aufmerksam zu werden, welche von *T* über *y* hinweg *) nach dem jenseitigen *o* und *n* bis wieder zu *T*, dem entgegengesetzten des ersten, geht; alle Kanten, welche die genannten Flächen unter sich bilden, sind, wie es die Grundeigenschaft einer jeden Zone mit sich bringt, parallel unter einander, parallel der Axe der Zone. Ich nenne die eben erwähnte die zweite Kantenzone des Feldspathes oder eines jeden ähnlichen Syste-

*) Vgl. die Haüy'schen Kupfertafeln, Taf. XLIX. Fig. 86. 88.

mes. Ihre Axe ist parallel der Endkante, welche die Fläche $y = \left|\overline{a':5c:\infty b}\right|$ als Schief-Endfläche eines Hendyoëders statt der eigentlichen Schief-Endfläche $\left|\overline{a:c:\infty b}\right|$ mit den vorigen Seitenflächen $\left|\overline{a:b:\infty c}\right|$ bilden würde. Nun ist es wohl auffallend zu finden, daſs in dieser Zone o' gegen T genau eben so geneigt ist, wie n' gegen y, und folglich auch y gegen T eben so wie o' gegen n', — immer vorausgesetzt, daſs $a : b : c = \sqrt{13} : \sqrt{3.13} : \sqrt{3}$.

Der Beweis läſst sich auf folgende Art geben: Wir construiren uns in Gedanken das Hendyoëder der Flächen T, T und y, so wird für dieses neue Hendyoëder das Verhältniſs der drei unter sich rechtwinklichen Dimensionen $a^\times : b^\times : c^\times = a : b : 5c$, wie aus der Substitution der Fläche mit 5fachem Cosinus in der vertikalen Zone oder $\left|\overline{a':5c:\infty b}\right|$ statt $\left|\overline{a:c:\infty b}\right|$ und aus der unveränderten Beibehaltung des Verhältnisses $a^\times : b^\times = a : b$ für das neue Hendyoëder einleuchtet.

In Bezug auf dieses neue Hendyoëder wird also der Dimensionsausdruck für die Fläche o, welcher vorhin $\left|\overline{2a':b:2c}\right|$ war, kein andrer werden als $\left|\overline{2a^\times : b^\times : \tfrac{2}{5}c^\times}\right| = \left|\overline{6a^\times : 5b^\times : 2c^\times}\right|$, weil $c^\times \doteq 5c$ geworden ist. Eben so gestaltet sich der alte Ausdruck für n, d. i $\left|\overline{4a:b:4c}\right|$ in Beziehung auf das neue Hendyoëder um in den Ausdruck $\left|\overline{4a^\times : b^\times : \tfrac{4}{5}c^\times}\right| = \left|\overline{12a^\times : 5b^\times : 4c^\times}\right|$. Beide Flächen, o und n aber fallen sichtlich in die scharfe Hälfte unsrer neuen Kantenzone, oder würden an dem neuen Hendyoëder Abstumpfungsflächen der scharfen, nicht der stumpfen Endkanten seyn. Für die Neigung der Fläche o als $\left|\overline{6a^\times : 5b^\times : 2c^\times}\right|$ am neuen Hendyoëder gegen die Seitenfläche T, mit welcher sie gemeinschaftlich in der neuen Kantenzone liegt, gilt daher die schon oben gebrauchte Formel,

$$sin : cos = nab\sqrt{a^2+b^2+c^2} : c(a^2+(1-n)b^2)$$

und, wie sich aus dem Zeichen ergiebt, es ist $n = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{3}{2}$, also die Formel,

$$sin : cos = \tfrac{3}{2}ab\sqrt{a^2+b^2+c^2} : c(a^2 - \tfrac{1}{2}b^2) = 3ab\sqrt{a^2+b^2+c^2} : c(2a^2-b^2)$$

Aber für das neue Hendyoëder ist $a : b : c$ (oder $a^\times : b^\times : c^\times$) $= \sqrt{15} : \sqrt{3.15} : 5\sqrt{3} = \sqrt{13} : \sqrt{39} : \sqrt{27}$; diese Werthe in die Formel substituirt, so wird sie

$$sin : cos = 3\sqrt{13.39.79} : \sqrt{27} \times - 13 = \sqrt{79} : - 1$$

Der negative Werth des Cosinus zeigt an, daſs die Neigung scharf wird gegen diejenige Seitenfläche, deren scharfe Endkante die berechnete Fläche abstumpft, also stumpf gegen die ihr parallele, d. i. gegen die, welche von der berechneten Fläche aus jenseit der Schief-Endfläche des Hendyoëders liegt.

Für die Neigung der Fläche n als $\left|\overline{\underline{12a^\times : 3b^\times : 4c^\times}}\right|$ am neuen Hendyoëder gegen die Schief-Endfläche desselben y gilt, weil sie, wie oben bemerkt, gleichfalls in die scharfe Hälfte der Kantenzone desselben fällt, folgende allgemeine Formel,

$$sin : cos = ac\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : b(na^2 + (n-1)c^2),$$

sie verwandelt sich, da $n = \frac{3}{4}$, in diese,

$$sin : cos = ac\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : b(\tfrac{3}{4}a^2 - \tfrac{1}{4}c^2) = 4ac\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : b(3a^2 - c^2)$$

und, die obigen Werthe von a, b und c in die Formel gebracht, in diese,

$$sin : cos = 4\sqrt{13.27.79} : \sqrt{39} \times (39 - 27) = \sqrt{13.27.79} : 3\sqrt{39} = \sqrt{79} : 1.$$

Der Cosinus ist positiv, und zeigt an, daſs die untersuchte Neigung von n gegen die Schief-Endfläche y stumpf ist.

So hat sich also mit Hülfe der angewendeten Formeln die neue Eigenschaft des Feldspathes abermals bewährt, daſs in der zweiten Kantenzone desselben o' gegen das ihm jenseit y liegende T *) eben so geneigt ist, wie n' gegen y; beide Neigungen sind zu 96° 25′ 9″,5.

Es ist leicht daraus abzuleiten, daſs in der nämlichen Zone y geneigt ist gegen T, wie n' gegen o'; beiderlei Neigungen = 135° 21′ 29″,2.

Nächst dieser zweiten Kantenzone ist im Feldspathsystem noch eine Zone bemerkenswerth durch ihre Ausbildung; sie geht von einer Fläche aus über o nach q und dem jenseitigen n' **), von wo sie wieder das entgegengesetzte z' trifft, und durch die parallelen der vorherigen Flächen fort-

*) Daſs für das zweite o und n die Haüy'sche Fläche l die Stelle von T vertritt, welcher sie durchaus gleich ist, bedarf keiner weiteren Erwähnung.

**) Vgl. Haüy, Taf. XLIX. Fig. 89. 90.

fortgesetzt, in sich selbst zurückkehrt. Diese Zone also entspricht der Kantenzone eines Hendyoëders, dessen Seitenflächen z', dessen Schief-Endfläche q wäre; und o stumpfte an diesem Hendyoëder die stumpfe, n die scharfe Endkante ab.

Nun findet sich in dieser Zone, sonderbar genug, wiederum die der vorigen analoge Eigenschaft: die Neigung von o gegen z' ist gleich der Neigung von n' gegen q; und hieraus folgt wieder leicht: die Neigung von n' gegen o ist gleich der von q gegen z' *).

Wir haben die Prämissen, um den Beweis zu führen. Wir construiren uns das neue Hendyoëder. Seine Seitenflächen z hatten in Beziehung auf die Grunddimensionen des Feldspathes den Ausdruck $\left|\overline{\underline{3a : b : \infty c}}\right|$, also ist für das neue Hendyoëder $a^{\times} : b^{\times} = 3a : b = 3 : \sqrt{3} = \sqrt{3} : 1$

Die Schief-Endfläche desselben q hatte den Ausdruck $\left|\overline{\underline{3a' : c : \infty b}}\right|$, also ist das Verhältniſs $a^{\times} : c^{\times}$ beim neuen Hendyoëder $= 3a : c = \sqrt{39} : 1$, oder das Verhältniſs der drei neuen Dimensionen $a^{\times} : b^{\times} : c^{\times} = 3a : b : c = 3\sqrt{15} : \sqrt{5.13} : \sqrt{3} = \sqrt{3.13} : \sqrt{13} : 1 = \sqrt{39} : \sqrt{13} : 1$.

Der alte Ausdruck für $o = \left|\overline{\underline{2a' : b : 2c}}\right|$ verwandelt sich an dem neuen Hendyoëder in $\left|\overline{\underline{\tfrac{2}{3}a^{\times} : b^{\times} : 2c^{\times}}}\right| = \left|\overline{\underline{2a^{\times} : 3b^{\times} : 6c^{\times}}}\right|$, weil $a^{\times} = 3a$ geworden ist, während die Werthe von b und c unverändert blieben.

Der alte Ausdruck für $n = \left|\overline{\underline{4a : b : 4c}}\right|$ verwandelt sich aus demselben Grunde in $\left|\overline{\underline{\tfrac{4}{3}a^{\times} : b^{\times} : 4c^{\times}}}\right| = \left|\overline{\underline{4a^{\times} : 3b^{\times} : 12c^{\times}}}\right|$.

Nun die Neigung von $o = \left|\overline{\underline{2a^{\times} : 3b^{\times} : 6c^{\times}}}\right|$ gegen die Seitenfläche z des neuen Hendyoëders. Jetzt ist die Fläche o Abstumpfungsfläche der stumpfen Endkante am neuen Hendyoëder, oder fällt in die stumpfe Hälfte der Kantenzone desselben. Deshalb gilt für ihre Neigung gegen die Seitenfläche statt der oben gebrauchten Formel folgende,

$$sin : cos = n\,ab\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} : c(a^2 + (1+n)b^2);$$

*) Für das zweite o, nämlich o', und das zweite n vertritt wiederum die Fläche z die Stelle der ihr gleichen z'.

n aber ist $= \frac{\beta}{\gamma} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; also ist

$$sin:cos = \tfrac{1}{2}ab\sqrt{a^2+b^2+c^2} : c(a^2+\tfrac{3}{2}b^2) = ab\sqrt{a^2+b^2+c^2} : c(2a^2+3b^2)$$

Wenn aber im neuen Hendyoëder $a:b:c = \sqrt{39}:\sqrt{13}:1$, so ist

$$sin:cos = \sqrt{39\cdot 13\cdot 53} : 78+39 = \sqrt{39\cdot 13\cdot 53} : 117 = \sqrt{3\cdot 53} : 9 = \sqrt{53}:\sqrt{27}$$

Die Neigung der Fläche $n = \left|\overline{\underline{1a^{\times} : 3b^{\times} : 12c^{\times}}}\right|$ aber gegen die Schief-Endfläche q des neuen Hendyoëders wird, weil sie in die scharfe Hälfte der Kantenzone desselben fällt, wieder durch die nämliche allgemeine Formel bestimmt, deren wir uns im gleichen Fall oben bedient haben,

$$sin:cos = ac\sqrt{a^2+b^2+c^2} : b(na^2+(n-1)c^2)$$

In dieser Formel ist $n = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$; sie verwandelt sich daher in

$$sin:cos = ac\sqrt{a^2+b^2+c^2} : b(\tfrac{1}{4}a^2 - \tfrac{3}{4}c^2) = 4ac\sqrt{a^2+b^2+c^2} : b(a^2-3c^2)$$

Die Werthe von a, b und c, wie sie für das neue Hendyoëder gelten, in die Formel gebracht, so wird sie

$$sin:cos = 4\sqrt{39\cdot 53} : \sqrt{13}\times(39-3) = \sqrt{39\cdot 53} : 9\sqrt{13} = \sqrt{53}:\sqrt{27},$$

wie oben.

Der Cosinus ist positiv, also die untersuchte Neigung gegen die Schief-Endfläche stumpf, wie die von o gegen die Seitenfläche z.

Die Formeln haben also wieder die angekündigte Gleichheit der genannten Winkel dargethan; und diese werden $= 125° 31' 2''$.

Aus ihr folgt wieder leicht die Gleichheit der Neigung von q gegen z' mit der von o gegen das jenseitige n'; beide $= 94° 32' 3'',7$.

Aber die zwei Zonen, in welchen wir jetzt wieder die Gleichheit der genannten Neigungen als Eigenthümlichkeit des Feldspathsystemes nachgewiesen haben, eben diese Zonen — also die, welche wir die zweite Kantenzone nannten, und die zuletzt betrachtete von z' nach q gehende — sind uns schon aus den vorhergegangenen Betrachtungen bekannt. Diese Zonen sind es, und keine andern, von denen wir oben in Beziehung auf die Bavenoer und Adular-Zwillingskrystalle gesprochen haben. Der doppelte Parallelismus von Kanten, welchen wir an jenen Zwillingen verfolgten, war kein anderer, als der diesen zwei Zonen angehörige. Es ist eben unsre zweite Kantenzone, welche die Kanten des ersten Parallelismus, nämlich die zwischen o, y, T und n (s. unsre Fig. 9. 10.) parallel macht; es ist die zu-

letzt betrachtete Zone $z'q$, welche die Kanten zwischen n und q, q und o (vgl. unsre Fig. 11.), o und dem am Zwilling einspringenden z in jedem Individuum parallel macht; der Zwilling zeigt nur denselben Parallelismus aus dem einen Individuum sich im andern fortsetzend, und wurde uns dadurch zu einem eigenthümlichen Beweis der Richtigkeit unsrer Angaben für das Feldspathsystem; der Parallelismus in jedem Individuum für sich ist das Werk unsrer Zonen.

Und so greift dieser letztere Theil unsrer Betrachtungen in den früheren wieder ein, und knüpft die Eigenheiten des Feldspathsystemes, die wir eine nach der andern bemerkt, wieder näher an einander. Diese Eigenheiten sind zu vielfach, als dafs wir nicht, nachdem wir sie einzeln erörtert, eine Art Bedürfnifs fühlen sollten, sie noch in einem kurzen Ueberblick zusammenzufassen. Diesem zu genügen, stellen wir sie nochmals kurz zusammen.

Die dargethanen Eigenheiten des Feldspathsystems — abgesehen von den allgemeinen Eigenschaften, welche ihm als einem zwei-und-ein-gliedrigen (oder hendyoëdrischen) System zukommen — bestehen also in folgenden:

1. In seiner (ersten) Kantenzone hat die Rhomboïdfläche $\left|\overline{\underline{2a' : b : 2c}}\right|$ gleiche Neigung gegen Seitenfläche und Schief-Endfläche (s. oben No. 1.).

2. In der Diagonalzone von $\left|\overline{\underline{a' : c : \infty b}}\right|$, in welcher die nämliche Rhomboïdfläche die mit doppeltem Cosinus ist, erhält sie gegen die andre Rhomboïdfläche die Neigung, gleich der am Schwefelkies-Dodekaëder in der Hauptkante (oben No. 4.).

3. In der Diagonalzone der Schief-Endfläche $\left|\overline{\underline{a : c : \infty b}}\right|$ hat die Fläche mit vierfachem Cosinus, d. i. die Fläche $\left|\overline{\underline{4a : b : 4c}}\right|$ gleiche Neigung gegen Schief-Endfläche und Abstumpfungsfläche der scharfen Seitenkante $\left|\overline{\underline{b : \infty a : \infty c}}\right|$ (oben No. 2.). Diese Eigenschaft wird durch den Bavenoer und Adular-Zwilling ganz besonders bekräftiget (vgl. oben No. 3.).

4. In der vertikalen Zone kehren sich um: die Neigungen der Fläche mit dreifachem Cosinus, d. i. $\left|\overline{\underline{a' : 3c : \infty b}}\right|$, und der mit dreifachem Sinus, d. i. $\left|\overline{\underline{3a' : c : \infty b}}\right|$ (beide der hinteren Seite), in Beziehung auf die vordere Schief-Endfläche, und die Seitenkante der Säule (s. oben No. 5.).

Eben so würden sich umkehren die Neigungen der Fläche $\left| a':c:\infty b \right|$ und $\left| 3a':5c:\infty b \right|$ — (beide auch der hinteren Seite des Endes) — gegen die vordere Schief-Endfläche $\left| a:c:\infty b \right|$ und gegen die Seitenkante der Säule oder deren Abstumpfungsfläche $\left| a':\infty b:\infty c \right|$ (s. ebendaselbst).

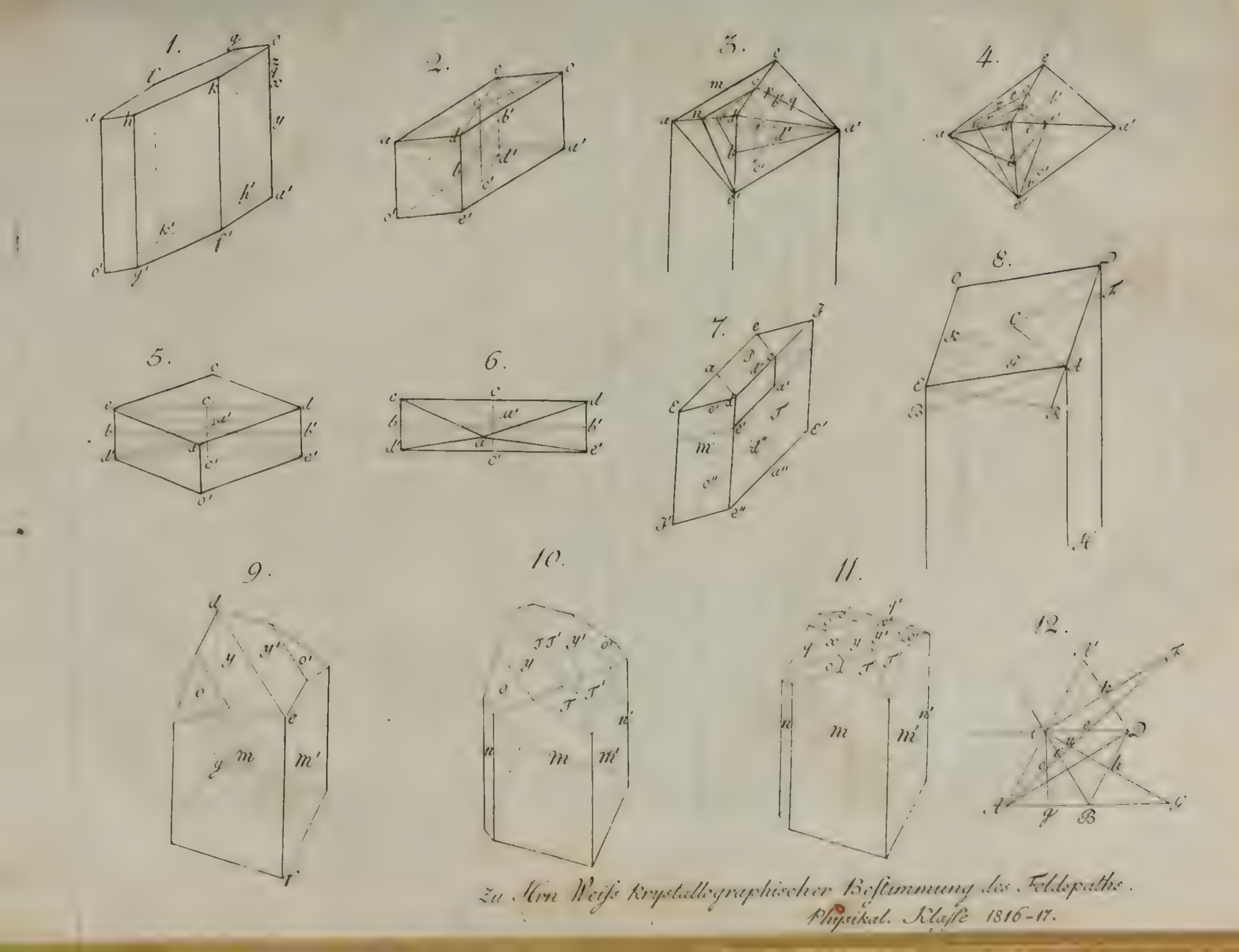
5. In der horizontalen Zone ist der Uebergang in die gleichwinklich-sechsseitige und -zwölfseitige Säule begründet, und die Flächen mit dreifachem Cosinus, d. i. $\left| 3a:b:\infty c \right|$ haben die umgekehrten Winkel (60° u. 120°) der Seitenflächen $\left| a:b:\infty c \right|$ selbst (s. oben No. 6.).

6. Die Fähigkeit des Systems, vermittelst einer Fläche $\left| 6a':2b:3c \right|$ aus dem zwei-und-ein-gliedrigen einen Uebergang in das rhomboëdrische zu bilden, ist zufolge der Säule von 120°, zwar vorhanden, aber unausgebildet (s. ebendaselbst).

7. In der zweiten Kantenzone (der Seitenflächen $\left| a:b:\infty c \right|$ und der Schief-Endflächen $\left| a':3c:\infty b \right|$) ist die Neigung der Rhomboïdfläche $\left| 2a':b:2c \right|$ gegen die Seitenfläche $\left| a':b':\infty c \right|$ gleich der der Fläche $\left| 4a:b:4c \right|$ gegen die Schief-Endfläche $\left| a':3c:\infty b \right|$, so wie die Neigung der ersten der genannten Flächen gegen die dritte gleich der der zweiten genannten gegen die vierte (s. oben No. 7.).

8. In einer ähnlichen Zone (von den Seitenflächen $\left| 3a:b:\infty c \right|$ gegen eine Schief-Endfläche $\left| 3a':c:\infty b \right|$) ist wiederum die Neigung der Rhomboïdfläche $\left| 2a':b:2c \right|$ gegen die Seitenfläche $\left| 3a':b:\infty c \right|$ gleich der Neigung der Fläche $\left| 4a:b:4c \right|$ gegen die Schief-Endfläche $\left| 3a':c:\infty b \right|$, und wieder die Neigung der ersten der genannten Flächen gegen die dritte gleich der der zweiten gegen die vierte (s. ebenfalls oben No. 7.).

Alle diese Eigenschaften waren Folgen der Annahme dreier unter sich rechtwinklicher Dimensionen im Verhältniſs von $\sqrt{13} : \sqrt{3.13} : \sqrt{3}$ als Grundlagen eines hendyoëdrischen Systemes. Jenes Verhältniſs mit den in



zu Hrn Weiß krystallographischer Bestimmung des Feldspaths.
Physikal. Klasse 1816-17.

ihm eingeschlossenen einzelnen, $1:\sqrt{3}$, $\sqrt{13}:\sqrt{3}$, $\sqrt{13}:1$ bietet zu Reflexionen über die Art ihrer Verschlingung wieder neuen Stoff; aber es müfsten solche Reflexionen zugleich über die analogen Verhältnisse andrer Krystallisationssysteme vergleichend ausgedehnt werden können, wenn wir hoffen dürften, durch sie zu neuen Wahrheiten und Gesetzen der krystallinischen Structur geführt zu werden. Ob es möglich seyn werde, künftig in der Verknüpfung der einzelnen zweitheiligen Verhältnisse zu dem dreifachen Gesammt-Verhältnifs dreier verschiedener unter einander rechtwinklicher Dimensionen strengere Gesetze überhaupt zu erkennen, so dafs, wenn zwei bestimmt sind, das Verhältnifs der dritten zu ihnen nicht mehr jedes beliebig denkbare seyn könne, sondern durch strengeren Causalzusammenhang an die beiden vorigen gebunden, und somit seine Statthaftigkeit in engere Grenzen eingeschlossen erscheinen würde, dahin reicht unsre jetzige Kenntnifs noch nicht, obwohl ein solcher festerer Zusammenhang unter den in Einem Structursystem liegenden Dimensionsverhältnissen sich billig muthmafsen läfst. Endlich kann es auch nur einer künftigen Stufe des Studiums vorbehalten seyn, weiter aufzufinden, was ein solches gegebenes Verhältnifs innrer Verschiedenheit in einer der ältesten und herrschendsten unter den unorganischen Naturbildungen, dem Feldspathe, von der Erdentwickelung selbst an den Tag legt, sofern sie sich in ihm, als einem ihrer bedeutendsten Glieder, regt.

Ueber
eine verbesserte Methode für die Bezeichnung der verschiedenen Flächen eines Krystallisationssystemes;
nebst
Bemerkungen über den Zustand von Polarisirung der Seiten in den Linien der krystallinischen Structur.

Von Herrn WEISS *).

Die sinnreiche Erfindung von kurzen Zeichen, mit welchen die abgeleiteten Flächen eines Krystallisationssystemes bezeichnet, und wodurch ihre Lage gegen eine vorher bestimmte Grundfigur (*forme primitive*) angegeben wird, gehört ohnstreitig zu den wesentlichen Verdiensten Haüy's um eine strengere geometrische Krystallisationslehre, deren Schöpfer er wurde. Allein so klar und bestimmt auch die Haüy'sche Bezeichnungsmethode in den gewöhnlichsten Fällen ist, so viele andre Fälle giebt es doch, wo sie völlig zweideutig und doppelsinnig, und selbst mehrdeutiger und vielsinniger wird, wo sie daher zu Verwechslungen, Irrthümern und Mifsverständnissen führen mufs, und wo die grofse Mühe, welche sie dann macht, um nur der wahren Bedeutung des Zeichens gewifs zu werden, zuletzt doch vergeblich wird; nichts destoweniger war es ein Leichtes, diese Mühe zu vermeiden, und das Zeichen so einzurichten, dafs der Sinn desselben für einen jeden Fall allem Zweifel überhoben war.

*) Vorgelesen den 20. Februar 1817.

Auch für diejenigen also, deren Absicht es wäre, sich an eine möglichst gleiche Behandlung des Gegenstandes, wie die Haüy'sche, anschlieſsen zu wollen, kann seine Bezeichnungsweise der secundären Flächen nicht durchgängig so, wie sie ist, beibehalten werden. Herr Prof. Bernhardi, ein Mann, der mit der Krystallographie, seit sie durch Haüy ihre gegenwärtige Gestalt erhalten hat, sich gründlich beschäftiget, und durch seine eignen Untersuchungen sich reelle Verdienste um dieselbe erworben hat, war der erste, der das Unzureichende der Haüy'schen Bezeichnungsmethode öffentlich aussprach *), und darauf eine abweichende Methode der Bezeichnung gründete. Ihm gebührt schon das Verdienst, den wesentlichen Punkt, worin die Haüy'sche Methode nothwendig verbessert werden muſs, richtig angegeben zu haben; und es ist kein Zweifel, daſs sich hierin Alle begegnen werden, welche die Haüy'sche Krystallographie wirklich studirt haben, und um so sichrer und geraderen Weges, je unbefangner sie an das Studium gegangen, und je weniger sie von den mechanischen Vorstellungen von Decrescenzen, wie sie auch Hr. Bernhardi noch hegte, eingenommen waren.

Was ich im ersten Abschnitt dieser Abhandlung über die Nothwendigkeit einer Berichtigung der Haüy'schen Bezeichnungsmethode sagen werde, hat mit dem, was Hr. Prof. Bernhardi a. a. O. bereits gesagt hat, vieles gemein; doch hat es mir nicht überflüssig geschienen, die Unzulänglichkeit der Haüy'schen Bezeichnungsweise weiter zu erörtern, als es von Hrn. Bernhardi **) geschehen ist; der übrige Theil dieses Abschnittes aber wird sich von selbst, als durch die Bernhardi'sche Abhandlung nicht unnöthig gemacht, rechtfertigen.

Im zweiten Abschnitt dagegen werde ich mich von der Haüy'schen sowohl, als Bernhardi'chen Betrachtungsweise um vieles weiter entfernen, indem ich dann den Begriff der Grundformen als Basis der Bezeichnungsmethode ganz aufgebe.

An die Haüy'sche Behandlungsart des Gegenstandes nämlich werden sich nur solche Bezeichnungsmethoden der verschiedenen Flächen eines Systemes direct anschlieſsen, welche auf eine gegebene Grundform (*forme primitive*) bauen. Durch weitere Analyse der Grundform selbst glaube ich auf eine noch reinere und einfachere Darstellung der Sache geleitet worden

*) S. Gehlens Journal für die Chemie, Physik und Mineralogie, B. V. Heft 2. u. f.

**) A. a. O. S. 177.

zu seyn, welche, wie ich hoffe, Jedem willkommen, deren Vorzüge aber insbesondere für das mathematische Studium der Krystalle einleuchtend seyn werden.

Erster Abschnitt.

Ueber die Bezeichnung der abgeleiteten Flächen, wenn eine primitive oder Primärform zum Grunde gelegt wird.

Bekanntlich giebt es in der Haüy'schen Lehre dreierlei Gattungen von Decrescenzen an einer gegebenen oder der Darstellung zum Grunde gelegten primitiven Form; solche nämlich, welche gerade an den Kanten, oder gerade an den Ecken, oder in einer zwischen beide vorigen fallenden Richtung vor sich gehen. Beiden ersten Fällen zusammen giebt Haüy auch den Namen der gewöhnlichen oder gemeinen Decrescenzen; ihre Gesetze sind einfacher; die letzten dagegen nennt er intermediäre; und deren Gesetze sind verwickelter. In der Bestimmung, welcher von diesen drei Gattungen eine bestimmte Decrescenz angehört, ist die Richtung ausgedrückt, nach welcher die durch die Decrescenz abzuleitende Fläche von derjenigen Fläche der primitiven Form aus hin liegt, auf welcher die Decrescenz als vor sich gehend gedacht wird; also die Richtung der Kante, in welcher die neue Fläche die eben erwähnte der primitiven Form schneidet. Zu dieser Bestimmung tritt dann noch hinzu das Quantitätsverhältnifs der Decrescenz, oder das Verhältnifs von Höhe zu Breite für dieselbe; und daraus folgt der Winkel, welchen die neue Fläche mit der der primitiven Form bildet.

Bei den geraden Decrescenzen, an den Kanten sowohl als an den Ecken, zeigt sich das Bedürfnifs einer verbesserten Bezeichnung anstatt der Haüy'schen nur in seltneren Fällen; von diesen soll nachher noch besonders die Rede seyn. Bei den intermediären oder schiefen Decrescenzen aber ist das Bedürfnifs beständig fühlbar; und deshalb wollen wir hier über diese zuerst sprechen.

Gesetzt

Gesetzt erst, die Haüy'sche Bezeichnungsmethode für sie wäre in sich vollkommen consequent und ausreichend, wie sie es nicht ist, so wären dennoch zwei Umstände vorhanden, welche eine Verbesserung derselben sehr rathsam machen würden; und diese Verbesserung, da sie so höchst leicht, und der Faſslichkeit und Anschaulichkeit des Gesetzes so förderlich gegeben werden kann, würde sich auch in diesem Falle von selbst empfehlen. Die gemeinten beiden Umstände sind diese:

1) Von einem und demselben intermediären oder schiefen Decrescenzgesetze sind allemal wenigstens drei ganz verschiedene Bezeichnungen nach der Haüy'schen Methode möglich, welche sich gar nicht ähneln, und von denen es ganz und gar nicht am Tage liegt, sondern erst durch Rechnung gefunden werden muſs, daſs sie alle wirklich eine und dieselbe Fläche bezeichnen. Der Grund liegt darin, daſs die neue Fläche von den verschiedenen Flächen der primitiven Form aus angesehen werden kann, welche in der Ecke, an welcher die Decrescenz schief vor sich geht, zusammenstoſsen; daſs es völlig willkührlich ist, von welcher der zusammenstoſsenden Flächen aus man sich die Decrescenz denken will, und daſs sie, von jeder aus betrachtet, ein ganz andres Ansehen in Richtung und Lage erhält. Sind der in der Ecke zusammenstoſsenden Flächen drei, so erhält man dreierlei verschiedne Ausdrücke für dieselbe Sache. Sind ihrer mehrere, so erhält man die Ausdrücke in gleichem Verhältniſs vervielfacht.

So wird z. B. am Quarz, wenn man für ihn, Haüy's Annahme gemäſs, als primitive Form das Rhomboëder zum Grunde legt, der Ausdruck für die Haüy'sche Fläche *s*, oder die Rhombenfläche werden,

von der einen Fläche des Rhomboëders gesehen: $(E^2\ B^1\ D^2)$,

von der andern: $({}^{\frac{1}{4}}E\ B^2\ D^1)$,

und von der dritten: $(\overset{\frac{1}{2}}{e}\ D^1\ D^4)$.

Wer würde nicht in diesen dreierlei Zeichen gewiſs verschiedene Flächen ausgedrückt glauben?

Die zweite Hälfte der Rhombenflächen am Quarz — denn Haüy hat nur die eine Hälfte derselben in seinem gröſseren Werke erwähnt, und in seiner Abhandlung über den *quartz coordonné* die zweite zwar abgebildet, aber nicht, wie es der Consequenz nach hätte geschehen sollen, beson-

ders bezeichnet, — diese zweite Hälfte würde die dreierlei Ausdrücke erhalten: $({}^{2}E\, B^{1}\, D^{2}) = (E^{\frac{1}{4}}\, D^{1}\, B^{2}) = (\overset{\frac{1}{2}}{e}\, D^{1}\, D^{4})$.

Die Fläche, welche Haüy in den Abbildungen mit x bezeichnet, erhält, auf den dreierlei Flächen angesehen, die dreierlei Ausdrücke:

$$(E^{\frac{1}{4}}\, B^{1}\, D^{2}),\ ({}^{\frac{1}{2}}E\, B^{1}\, D^{4}),\ \text{und}\ (\overset{2}{e}\, D^{\bar{2}}\, D^{1}).$$

Die zweite Hälfte der analogen Flächen beim Quarz, x', welche Haüy wegen der Annahme eines Rhomboëders als Kerngestalt des Quarzes genöthiget ist aus einem ganz andern Decrescenzgesetz abzuleiten, als die ihnen gleichenden x, erhalten abermals, je nachdem man die ihnen zugehörige Decrescenz von der einen oder der andern Fläche des Rhomboëders aus sich denkt, die dreierlei sich ganz unähnlichen Bezeichnungen:

$$({}^{\frac{4}{5}}E\, B^{1}\, D^{2}),\ (E^{\frac{1}{2}}\, B^{4}\, D^{5})\ \text{und}\ (\overset{\frac{5}{4}}{e}\, D^{5}\, D^{8}).$$

Die von Haüy am *quartz coordonné* beschriebene Fläche u kann in gleicher Rücksicht auf die dreifache Weise in Bezug auf das Rhomboëder geschrieben werden:

$$(E^{\frac{1}{8}}\, B^{1}\, D^{2}),\ E^{\frac{1}{2}}\, B^{1}\, D^{8})\ \text{und}\ (\overset{2}{e}\, D^{1}\, D^{4}).$$

Ein ähnliches gilt wiederum von dem Gegenstück dieser Fläche, u', welches, wie vorhin x', wieder einer anderen Bezeichnung bedurfte, als u.

Haüy schreibt u' gleichfalls als eine intermediäre Decrescenz $({}^{1}E\, D^{2}\, B^{1})$; diese aber ist identisch mit einer geraden oder gewöhnlichen Decrescenz ${}^{\frac{1}{2}}E$, wie sie auf der andern Fläche betrachtet erscheint; ihr dritter Ausdruck, wenn man sie von der dritten Fläche aus betrachtet, wird wieder ein intermediärer, nämlich $(\overset{1}{e}\, D^{2}\, D^{1})$.

Sieht man aufserdem, dafs Haüy selbst unter den mehrerlei Bezeichnungen derselben Fläche nicht jederzeit die analogen aus den jedesmaligen dreien gewählt hat, sogar indem er eine und dieselbe Gattung und eine und dieselbe Varietät beschreibt (wie viel mehr noch bei der abgesonderten Behandlung verschiedener Gattungen!); sieht man, wie er x und u in der Abhandlung über den *quartz coordonné*, wo sie wenigstens richtig geschrieben sind, mit dem Ausdruck bezeichnet, welcher sich auf die Ansicht der De-

crescenz von der unteren Fläche, oder dem dem Endspitzenwinkel gegenüberliegenden Winkel *e* der Lateralecke gründet, während er für die übrigen das Zeichen wählt, welches sich auf die Ansicht derselben Ecke von der Seite her, oder auf einer der oberen Flächen gründet, so kann es nur um so auffallender werden, daſs die Wahl zwischen den dreierlei Bezeichnungen willkührlich ist. Der Uebelstand einer Methode aber, welche die Identität eines Gegenstandes hinter drei- oder mehrerlei ganz unähnlichen Gestalten und Ausdrücken verbirgt, regt nothwendig das Bedürfniſs einer Verbesserung an.

2) Der zweite oben angekündigte Umstand, welcher ein gleiches thut, ist dieser: Um aus dem gegebenen Zeichen irgend Folgerungen zu ziehen, und die Berechnung der Winkel darauf zu gründen, bedarf es erst einer Uebersetzung desselben in eine anschauliche Vorstellung der Lage der gemeinten Fläche an der gewählten primitiven Form, d. i. kurz gesagt, durch welche Punkte der letzteren man sich die Ebne gelegt denken soll. Dieses Endresultat der Uebersetzung konnte aber sehr leicht unmittelbar angegeben, und durch das Zeichen sogleich anschaulich gemacht werden; dann fiel nicht allein die unnöthige Mühe der jedesmaligen Uebertragung des Zeichens in diesen seinen wahren Gehalt weg, sondern es wurden auch alle die Zweideutigkeiten und Miſsverständnisse vermieden, in welche die Deutung der Haüy'schen Zeichen noch auſserdem verwickelt; und die in drei- oder mehrerlei unter sich unkenntlichen Gestalten verhüllten Zeichen fanden sich, auf ihren wahren Werth reducirt, in Einem und demselben Ausdruck wieder zusammen.

Nennen wir also die Ecke der primitiven Form, welche durch die zu bezeichnende secundäre Fläche von der Peripherie aus zuerst getroffen und weggeschnitten wird, umgeben wir sie mit den Buchstaben, welche die Kanten bezeichnen, die sie einschlieſsen, und schreiben wir hin, der wie vielte Theil einer jeden dieser Kanten im Verhältniſs gegen die übrigen durch die neue Fläche, von der Ecke aus, weggeschnitten werden wird: so ist das Bild der Lage der Fläche an der primitiven Form klar, anschaulich und unzweideutig vor uns.

Die dreierlei Ausdrücke der Haüy'schen Rhombenfläche *s* also, d. i. $(E^2\,B^1\,D^2)$, $({}^{\frac{1}{4}}E\,B^2\,D^1)$ und $(\overset{\frac{1}{2}}{e}\,D^1\,D^4)$, bedeuten die Lage einer Fläche, welche wir am bequemsten und verständlichsten schreiben werden bei glei-

cher angenommener Primärform und bei gleicher Bezeichnung ihrer verschiedenen Ecken und Kanten mit den Haüy'schen Buchstaben, so: ${}^{\frac{1}{4}}D\overset{\frac{1}{2}B}{E}{}^{1}D$.

Es ist nämlich der Anschauung noch bequemer, die Buchstaben, welche die Kanten bezeichnen, um den der Ecke in der Ordnung herumzusetzen, wie sie der Zeichnung der Primärform entsprechen, auf welche sich das Zeichen jedesmal bezieht, als etwa dieselben mit dem Buchstaben der Ecke in Eine Linie zu setzen, und sie z. B., wie Haüy bei seinen intermediären Decrescenzen verfährt, zusammen mit Klammern zu umschlieſsen. In eben der Rücksicht ziehe ich es vor, diejenige Kante, von welcher der respective gröſste Theil weggeschnitten wird, im Zeichen als ganz weggeschnitten oder in der Einheit zu nehmen, die übrigen aber mit dem Bruch zu bezeichnen, welcher die entsprechende Gröſse des abgeschnittenen Stückes ausdrückt, anstatt durch Multiplication sämmtlicher Exponenten der Kanten mit den Zahlen der Nenner der Brüche sie alle in ganze Zahlen von dem nämlichen Verhältniſs unter einander zu verwandeln, und also statt ${}^{\frac{1}{4}}D\overset{\frac{1}{2}B}{E}{}^{1}D$ zu schreiben: ${}^{1}D\overset{2B}{E}{}^{4}D$, welches immer etwas minder anschaulich seyn würde, als jenes. Kaum wird es noch nöthig seyn, in Worten hinzuzufügen, daſs das eben geschriebene Zeichen eine Fläche anzeigt, welche von den drei Kanten, die die Ecke E einschlieſsen, in einem solchen Verhältnisse Stücke abschneidet, daſs, wenn an der rechts von E gezeichneten Lateralkante D das Ganze, von der ihr gegenüberliegenden auch mit D, links von E, bezeichneten Lateralkante $\frac{1}{4}$, und von der oberhalb der Ecke aufsteigenden Endkante B die Hälfte weggeschnitten wird. Parallel der hiemit bestimmten Richtung kann man sich dann leicht die Lage der Fläche durch andre Punkte und Stellen der gewählten Primärform fortlegen, wie man es etwa im weiteren Verfolg der Betrachtungen bedarf.

Zu mehrerer Erläuterung füge ich nur noch die Ausdrücke bei, wie ich sie dem eben gesagten gemäſs an die Stelle der übrigen je drei vorhin erörterten gleichgeltenden Zeichen der Haüy'schen Bezeichnungsmethode setze. Es werden also die 3 obigen Zeichen für s', oder die zweite Hälfte der Rhombenflächen, d. i. $({}^{2}E\,B^{1}\,D^{2})$, $(E^{\frac{1}{4}}\,D^{1}\,B^{2})$ und $(\overset{\frac{1}{2}}{e}\,D^{1}\,D^{4})$ identisch mit ${}^{1}D\overset{\frac{1}{2}B}{E}{}^{\frac{1}{4}}D$

Ferner die drei Ausdrücke für x, d. i. $(E^{\frac{1}{4}}\, B^1\, D^2)$, $({}^{\frac{1}{2}}E\, B^1\, D^4)$ und $(e\, D^2\, D^1)$ verwandeln sich gemeinschaftlich in den Ausdruck ${}^{1}D\underset{\frac{1}{4}B}{E}{}^{\frac{1}{2}}D$, wenn ein für allemal E die Lateralecke bedeutet, da es hier nicht mehr darauf ankommt, von welcher Fläche her sie betrachtet wird, und also die Unterscheidung von e und E, wie sie bei den Haüy'schen Zeichen Statt findet, unnöthig wird. Das $\frac{1}{4}B$ setze ich hier unter den Buchstaben E, weil es eine der unteren Lateralecken E ist, von welcher aus also die Endkante B abwärts läuft, an welcher die zu bezeichnende Fläche gegen das obere Ende der Axe sich neigt. Im vorhergehenden Fall war es eine der oberen Lateralecken, an welcher die durch das Zeichen angegebne Fläche sich nach oben neigte.

Die drei Ausdrücke für x' oder das Gegenstück von x, nämlich $({}^{\frac{4}{5}}E B^1\, D^2)$, $(E^{\frac{1}{2}}\, B^4\, D^5)$ und $(\overset{\frac{5}{4}}{e}\, D^5$ [illegible]duciren sich dagegen auf den gemeinschaftlichen Ausdruck ${}^{1}D\overset{\frac{1}{2}B}{E}{}^{\frac{5}{8}}D$.

Beide Ausdrücke ${}^{1}D\underset{\frac{1}{4}B}{E}{}^{\frac{1}{2}}D$ und ${}^{1}D\overset{\frac{1}{2}B}{E}{}^{\frac{5}{8}}D$ wiederholen sich hier nicht durch die umgekehrten, ${}^{\frac{1}{2}}D\underset{\frac{1}{4}B}{E}{}^{1}D$ und ${}^{\frac{5}{8}}D\overset{\frac{1}{2}B}{E}{}^{1}D$, wie vorhin die Ausdrücke für s und s', wenn wir bei den Haüy'schen Beschreibungen stehen bleiben. Das Wahre aber ist, daſs wirklich die einen oder die andern an einem gegebenen Individuum vorkommen, niemals aber beiderlei an Einem Individuum beisammen. Dies ist eine Eigenthümlichkeit der Quarzkrystallisation, welche ich anderwärts *) schon erläutert habe. Hier, wo bloſs von der Bezeichnungsweise als solcher die Rede ist, wird schon der Mangel der Wiederholung des nämlichen Zeichens in umgekehrter Richtung der Buchstaben es zu erkennen geben, daſs nur die eine Hälfte und zwar gleichsinnig liegender Flächen zusammen vorkommen, die entgegengesetzten (zur Linken, statt zur Rechten, oder umgekehrt), man könnte auch sagen, gegensinnig liegenden aber nicht. Diese werden, als wieder allein vorkommend, in andern Individuen oder Varietäten, gerade durch das umgekehrte Zeichen, ohne Beisatz des ersten, auszudrücken seyn.

*) S. das Magazin der Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin, VII. Jahrgang, 3tes Heft.

Alles dies würde auch auf die Flächen u und u' seine Anwendung ſinden, welches aber in Bezug auf sie umständlich zu erörtern ich hier unterlasse, und mich begnüge, bloſs für die je drei oben gegebenen Haüyschen Zeichen das gemeinsame Zeichen zu substituiren; den ersteren, u, wird es, dem obigen gemäſs, nun so zu Theil: ${}^{1}D\underset{\frac{1}{8}B}{E}{}^{\frac{1}{3}}D$, den zweiten, u', aber, wenn man anders das simple Zeichen, welches eines der drei Haüyschen war, nämlich ${}^{\frac{1}{2}}E$, hier nicht eintreten lassen will, als dessen Aequivalent, den übrigen conform ausgedrückt, folgendermaſsen: ${}^{1}D\overset{\frac{1}{2}B}{E}{}^{\frac{1}{2}}D$.

Die hier angegebene Bezeichnungsweise stimmt im Wesentlichen mit der des Herrn Prof. Bernhardi *) überein. Nur die Art, wie Herr B. die Zahlen oder Exponenten des Zeichens schreibt, kann ich nicht billigen. Er will die Verhältnisse der Werthe von dem, was an den verschiedenen Kanten einer Ecke durch die neue Fläche weggeschnitten wird, in Brüche verwandeln, deren Zähler allemal Eins ist, und dann die Nenner allein statt der Brüche an die entsprechenden Stellen schreiben. Er setzt voraus, daſs die Nenner hiebei allemal ganze Zahlen werden, und nicht selbst wieder Brüche. Das ist aber nicht allgemein der Fall; und schon das obige Beispiel für x' liefert dazu einen Beleg **). Die drei Verhältnisse $1 : \frac{1}{2} : \frac{5}{8}$ sind hier von der Art, daſs das dritte gar nicht auf einen simplen Bruch mit dem Zähler Eins gebracht werden kann, wenn die beiden ersten solche Brüche sind. Wir müssen daher die Brüche im Zeichen beibehalten, wie sie sind, und gewinnen damit zugleich den Vortheil einer unmittelbareren Anschaulichkeit, welche das Zeichen gewährt, so daſs es selbst ohne Erläuterung sich verständlich macht, statt daſs das Bernhardi'sche ohne die gegebene und dem Gedächtniſs wohl eingeprägte Erläuterung miſsverstanden werden muſs.

Herr Prof. Bernhardi läſst auch in den gewöhnlichen Fällen die Buchstaben der einzelnen Kanten, welche die Ebne umgeben, weg, und schreibt bloſs den ihnen zukommenden Exponenten an die der Figur entsprechende Seite des die Ecke bezeichnenden Buchstabens. Gröſsere Anschau-

*) A. a. O.

**) Einen zweiten, das bald anzuführende Beispiel der Fläche des Pyramidenwürfels beim Fluſsspath.

lichkeit gewährt es, die Buchstaben der Kanten selbst dem Zeichen hinzuzufügen; und es wird immer gut seyn, dies ausführlicher geschriebene Zeichen zum Grunde zu legen. Wo bei öfter wiederholtem Gebrauch kein Mifsverständnifs zu fürchten ist, wenn der Buchstabe der Kante wegbleibt, da wird das abgekürzte Zeichen, mit Weglassung desselben, sehr wohl an die Stelle des ausführlichen treten können. Nur eben, dafs der Kürze halber nicht Mifsverständnisse veranlafst werden dürfen; sonst geht der ganze Zweck, und mit ihm der Nebenvortheil der Kürze auch, verloren.

Zu den zwei bisher erörterten Umständen, welche die Vorzüge der Bernhardi'schen sowohl, als der hier abgeändert angegebenen Bezeichnungsweise vor der Haüy'schen auf eine zu evidente Weise darthun, als dafs sie noch mehr ins Licht gestellt zu werden bedürften, gesellt sich noch ein dritter, zwar zufälliger, der aber das Bedürfnifs einer Verbesserung der Haüy'schen Bezeichnungen noch um vieles steigert; und das ist die unläugbare Inconsequenz, mit welcher in dem Haüy'schen Hauptwerke die intermediären Decrescenzen im allgemeinen, die gänzliche und entschiedene Unrichtigkeit, mit welcher viele darunter geschrieben worden sind, so dafs, wenn man sie nach den Haüy'schen Grundregeln auslegt, sie einen ganz falschen Sinn geben, und also das Studium nur verwirren können, statt es zu erleichtern und zu befördern. So ist, um bei den vorhin genannten Flächen des Quarzes stehen zu bleiben, die Rhombenfläche *s* im gröfseren Haüy'schen Werke *t.* II. *p.* 413. ganz irrig ($E^4\ B^1\ D^2$) *), in der neueren Abhandlung über den *quartz coordonné* dagegen richtig ($E^2\ B^1\ D^2$) geschrieben worden; die Fläche x im gröfseren Werke *t.* II. *p.* 61. eben so irrig ($\overset{4}{e}\ D^2\ D^1$), und *p.* 413. sogar widersprechend ($E^4\ D^2\ D^1$), in der späteren Abhandlung aber richtig ($\overset{2}{e}\ D^2\ D^1$), die Fläche x' dagegen auch im Hauptwerke richtig ($^{\frac{4}{3}}E\ D^2\ B^1$). Diese auffallende Inconsequenz ist auch schon mit Grund von Hrn. Prof. Bernhardi, ohne dafs er übrigens in die Kritik der Haüy'schen Bezeichnungsmethode weiter eingeht, gerügt worden, und es würde nicht ohne Verdienst um das Studium der Haüy'schen Ar-

*) Wenn er sie im geometrischen Theile, *t.* II. *p.* 60. ($E^4\ {}^4E\ B^1\ D^2$) schreibt, so würde die andere Hälfte der Rhombenflächen, vgl. oben S. 289 darin mitbegriffen seyn. Die Unrichtigkeit des Zeichens aber beruht darauf, dafs Haüy, gegen seine eigne Regel, die längere Breitenrichtung der Decrescenz, und nicht die kürzere, zum Maafsstab für die Höhe genommen hat. Eben so bei dem folgenden Zeichen ($\overset{4}{e}\ D^2\ D^1$) statt ($\overset{2}{e}\ D^2\ D^1$).

beiten seyn, alle die Fälle, welche von intermediären Decrescenzen bei ihm vorkommen, kritisch zu beleuchten, und z. B. tabellarisch die in ganz verschiedenem Sinne zu nehmenden Bezeichnungen Haüy's zusammenzustellen. Indeſs so lange noch eine zweite Ausgabe des Haüy'schen Werkes aus des Verfassers Händen zu hoffen ist, von welcher eben so wohl die Berichtigung mancher Mängel der ersten Ausgabe, als eine ungemeine Bereicherung des Materials der Krystallographie im Einzelnen erwartet werden darf, so lange möchte zu einer solchen kritischen Zusammenstellung der schicklichere Zeitpunkt noch nicht vorhanden seyn. Dagegen vereinigen wir uns mit Allen, welchen das krystallographische Studium werth ist, in dem lebhaften Wunsche, daſs der hochverdiente Verfasser uns mit dieser zweiten Ausgabe auch noch wirklich beschenken möge; und wir würden es als einen unersetzlichen Verlust betrauern, wenn wir die schon lange uns gemachte Hoffnung nicht in Erfüllung gehen sehen sollten.

Es wird hier nur gut seyn, darauf aufmerksam zu machen, worin der Hauptgrund der in dem Haüy'schen Werke sich findenden Unrichtigkeiten in Beziehung auf die Schreibart intermediärer Decrescenzen liege; ich sage dies nicht sowohl in Beziehung auf die eben angeführten Beispiele vom Quarz, als vielmehr in Beziehung auf die Gesammtheit des Werkes. Am häufigsten ist gefehlt in dem Werthe des Exponenten, welcher das Verhältniſs der Decrescenz in Breite gegen Höhe ausdrückt; und die Entwickelung der Grundregeln dafür in dem allgemeinen oder raisonnirenden Theile ist zu kurz, und auf allzu einfache Beispiele eingeschränkt, als daſs aus ihr die Anwendung auf die verwickelteren Fälle mit hinlänglicher Klarheit hervorgehen sollte. Der Consequenz nach sollte auch im intermediären Zeichen der zum Buchstaben der Ecke gesetzte Exponent 1 jederzeit Gleichheit der Anzahl der decrescirenden Reihen in Breite und Höhe bedeuten, der Exponent $\frac{1}{2}$ dagegen Verdoppelung in Höhe gegen die Breite, der Exponent 2 Verdoppelung in Breite gegen die Höhe, der Exponent $\frac{2}{3}$ eine Decrescenz um 3 Reihen in die Höhe gegen zwei Reihen in die Breite u. s. f., und zwar die Decrescenz in der Breite jederzeit bezogen auf diejenige Seite der schiefen Richtung der Decrescenz, welche den kleineren Exponenten, der Kante beigesetzt, hat, wie sich über diesen letzteren Umstand Haüy im raisonnirenden Theile deutlich erklärt.

Allein daſs der Exponent an der Ecke jederzeit das Verhältniſs von Höhe gegen Breite ausdrücken muſs, ist öfters nicht beobachtet worden;

den; sondern zuweilen scheint Haüy einen gewissen absoluten Werth damit haben ausdrücken zu wollen. Ein Beispiel hievon liefert beim Flufsspath die Fläche des Pyramidenwürfels x, welche Haüy durch $(\overset{\frac{1}{2}}{A}\, B^3\, B^2)$ bezeichnet. Es ist die Fläche, welche am Würfel als primitive Form unzweideutig $\overset{3}{B}$ geschrieben werden würde. Am Octaëder würden wir sie nach unsrer Methode so zu schreiben haben: $\tfrac{2}{3}B \underset{1B}{\overset{\frac{1}{2}B}{A}} \tfrac{2}{3}B$. Das Haüy'sche Zeichen sollte dem gemäfs seyn $(\overset{1}{A}\, B^3\, B^2)$, nicht $(\overset{\frac{1}{2}}{A}\ldots)$, weil gegen $2B$ oder 2 Reihen in die Breite auch $2B$ oder Reihen in die Höhe wegfallen, also gegen 1 in die Breite auch 1 in die Höhe, d. i. $\overset{1}{A}$. Hier sucht Haüy durch das $\overset{\frac{1}{2}}{A}$ zwei Reihen in die Höhe in einem gewissen absoluten Sinn auszudrücken, nicht in dem nothwendigen der Relation gegen die Breite. Er hätte vielmehr schreiben sollen $\overset{\frac{2}{2}}{A} = \overset{1}{A}$ u. s. f., eben weil zwei Reihen in die Breite gegen zwei in die Höhe wegfallen.

Oder gesetzt, es wäre die Rede von einer Fläche am Rhomboëder, deren Lage wir ausdrücken würden mit $1D \overset{\frac{2}{5}B}{E} \tfrac{1}{3}D$, und Haüy wolle sie bezeichnen von der Fläche aus, wo gegen $1D$ der einen Seite, $\tfrac{2}{5}B$ der andern weggeschnitten würden, so also dafs $B^2\, D^5$ einen Theil des Zeichens bilden müfsten, so findet sich auch wohl, dafs Haüy, indem er sich nicht, wie vorhin, 2 ganze B und 5 ganze D weggeschnitten gedacht hat, sondern $\tfrac{2}{5}B$ gegen ein ganzes D, er auch den Punkt der dritten Kante im Auge gehabt hat, von welcher dann $\tfrac{2}{3}$ weggeschnitten werden sollen, und er, um auszudrücken, dafs $\tfrac{2}{3}$ in der Richtung der Höhe durch die Decrescenz weggeschnitten werde, sich hat verleiten lassen, den umgekehrten Bruch $\tfrac{3}{2}$ zum Exponenten an der Ecke zu nehmen, wodurch dann freilich eine völlige Verwirrung in die Zeichensprache hat kommen müssen; denn von der Stellung des Exponenten, rechts, links, über oder unter den Buchstaben der Ecke hier abgesehen, mufste z. B. $(\overset{\frac{3}{2}}{E}\, B^2\, D^5)$ bedeuten, dafs gegen $2B$ $\tfrac{4}{3}$ jenes zweiten D, also gegen $\tfrac{2}{5}$ des ersten $\tfrac{4}{15}$ des andern, nicht aber $\tfrac{2}{3}$ desselben weggeschnitten würden. Und umgekehrt, dafs $\tfrac{2}{3}$ von diesem gegen $\tfrac{2}{5}$ von jenem, also $\tfrac{10}{3}$ von ersterem gegen 2 ganze des letzteren, folglich $\tfrac{5}{3}$

von jenem D gegen $1B$, oder 5 jenes D gegen $3B$ wegfallen sollen, konnte meines Erachtens consequenterweise von Haüy nur so geschrieben werden $(E^{\frac{3}{5}} B^2 D^5)$. Selbst die Schreibart $(E^{\frac{3}{10}} B^2 D^5)$, wodurch etwa ausgedrückt werden sollte, daſs gegen $2B$ in die Breite, $\frac{10}{3}$ jenes D, d. i. in der Richtung der Höhe wegfallen, würde mir nicht consequent scheinen, da vielmehr der Exponent an E überhaupt das Verhältniſs in Höhe gegen die (kleinere) Breite der Decrescenz ankündigen soll; und $\frac{3}{5} = \frac{2}{5} : \frac{2}{3}$.

Ich habe hiemit zugleich gezeigt, in welche Schwierigkeiten die Haüy'sche Bezeichnungsmethode bei schiefen Decrescenzen verwickelt, ehe sie nur in sich consequent wird; und so würde man es, selbst nachdem diese Schwierigkeiten überwunden wären, noch immer für eine groſse Erleichterung ansehen, wenn an die Stelle eines Zeichens wie $(E^{\frac{3}{5}} B^2 D^5)$ eines gesetzt würde, wie $1D\overset{\frac{2}{5}B}{E}\frac{2}{3}D$, welches unmittelbar die Bedeutung aussagt, die es haben soll, und in welche das erstere dagegen erst mühsam übersetzt werden muſs, wenn auch bei gehöriger Consequenz die Uebersetzung zu dem rechten Ziele, und nicht zu einem falschen führt. Es fehlt aber in den Erläuterungen des raisonnirenden Theiles an einer Auseinandersetzung der Methode für die Fälle, wo die schiefe Decrescenz an der einen Kante nicht gerade das Vielfache von dem an der andern Kante hinwegnimmt, und daher der Exponent an keiner der beiden Kanten die Einheit wird.

Ohne Zweifel würde Haüy selbst eine Bezeichnung, der unsrigen ähnlich, gewählt haben, wenn er anerkannt hätte, daſs es eigentlich auf gar nichts weiter ankam, als auf die Bezeichnung der geometrischen Lage der zu bezeichnenden Fläche gegen die gegebenen der Primärform. Seine Hypothese von decrescirenden Reihen und Decrescenzen trat aber der einfachen und natürlicheren Auffassung des Problems in den Weg, und verwickelte die Behandlung durch selbstgeschaffne Schwierigkeiten zu ihrem groſsen Nachtheil fast bis zur Unkenntlichkeit. Es müssen hier, wie überall, erst die mechanisch-atomistischen Vorstellungen, welche Hrn. Haüy leiteten, abgestreift werden, um die gewonnene Kenntniſs der mathematischen Gesetze und Verhältnisse krystallinischen Baues rein hervortreten zu lassen.

Bisher haben wir nur von den Haüy'schen intermediären oder den in schiefer Richtung wirkenden Gesetzen gesprochen, weil in den häufigsten Fällen die gerad wirkenden keiner verbesserten Bezeichnung zu bedürfen

scheinen. Allein die Fälle treten dennoch nicht selten ein, wo selbst bei diesen geraden Decrescenzen, an den Ecken oder Kanten, das Bedürfnifs einer verbesserten Bezeichnung eben so fühlbar wird, als bei den schiefen. Die Haüy'sche Bezeichnungsweise für sie ist nur in den Fällen unzweideutig, wenn die verschiedenen Seiten der Stelle, an welcher die Decrescenz vorkommt, gleiche geometrische Verhältnisse haben. Wo dies der Fall nicht ist, da soll zwar die Stellung des Exponenten, rechts oder links, oben oder unten, dem Ausdruck die noch erforderliche Bestimmtheit geben; allein sie thut auch das nicht auf eine hinreichende Weise, und die Unvollkommenheit der Methode hat auch hier zu nicht minder üblen Verwechselungen, Zweideutigkeiten und Unrichtigkeiten geführt, als bei den schiefen Decrescenzen.

Wählen wir zum Beleg des Gesagten das Beispiel des Augites (*pyroxène, H.*) und seine hendyoëdrische Primärform, d. i. eine geschobene vierseitige Säule, die Endfläche schief angesetzt, aber auf die (schärferen) Seitenkanten gerad aufgesetzt. Die Ecken derselben, welche Haüy mit E bezeichnet, d. i. diejenigen, welche an den Seitenkanten anliegen, auf welche die Endflächen nicht aufgesetzt sind, haben nach jeder ihrer drei Seiten hin andre geometrische Verhältnisse, entsprechend den dreierlei ebnen Winkeln und den dreierlei Kanten, welche die Ecke bilden. Ein und dasselbe Decrescenzgesetz, seinem Exponenten nach bestimmt, bringt völlig verschiedenartig liegende Flächen hervor, je nachdem es nach der einen oder der andern Seite von der Ecke aus als wirkend gedacht wird. Deshalb wird der Exponent, über den Buchstaben der Ecke, rechts von demselben oder links von demselben gesetzt, jedesmal eine ganz verschiedene Fläche bezeichnen. Die Bedeutung des Zeichens, wenn der Exponent über den Buchstaben gesetzt wird, bleibt sich gleich, es mag dasselbe bezogen werden, auf welche Ecke E man wolle. Nicht so bei der Stellung rechts oder links von der Ecke. Denn an den zwei mit E bezeichneten Ecken, welche an der oberen Grundfläche sich befinden, wird der Exponent, rechts neben den Buchstaben der Ecke gesetzt, gerade die Fläche bezeichnen müssen, welche an der anderen derselbe Exponent, links gesetzt, bedeutet, und umgekehrt. Also wird, wenn wir z. B. den Exponenten 3 haben, und eine Fläche einzeln in Bezug auf die eine Ecke schreiben, ${}^3E$ gleich einem E^3 an der anderen Ecke genommen, das E^3 der ersten aber $= {}^3E$ der zweiten; und somit ist, wenn nur eine Fläche geschrieben wird, in dem Zeichen der wesentliche Unterschied gänzlich ver-

tilgt, welcher nach Haüy allein durch die Stellung rechts oder links vom Buchstaben der Ecke angegeben werden kann.

In dem einen Falle also ist gemeint eine Fläche, welche wir nach dem obigen schreiben würden ${}^1D\overset{\frac{1}{3}B}{E}{}^1G$, d. i. es fällt von der scharfen Endkante B das Drittheil weg, wenn die stumpfe Endkante D sowohl als die Seitenkante der Säule, G, ganz wegfallen. Im andern Falle wird verstanden eine Fläche, durch welche von der stumpfen Endkante D ein Drittheil weggeschnitten wird, während die scharfe und die Seitenkante ganz, d. i. eine Fläche ${}^{\frac{1}{3}}D\overset{1B}{E}{}^1G$. Die erstere von beiden, welche in den Haüyschen Abbildungen mit *o* bezeichnet ist, wird von ihm geschrieben in seinem Werke E^3, und dies würde richtig seyn, wenn man es auf die in der Zeichnung der primitiven Form links liegende Ecke E bezieht. Bezieht man es aber auf die rechts gezeichnete Ecke E, so bedeutet E^3 die entgegengesetzte, ihr gänzlich unähnliche. Auch diese kommt in den Haüy'schen Beschreibungen, und abgebildet mit der Bezeichnung *z*, vor, und zwar an seiner *var. trioctonale*, deren er gelegentlich erwähnt in seiner Abhandlung über die Analogie des Diopsides mit dem Pyroxen (*Annales du Mus. d'hist. nat. t. XI.*), als an einem von Newyork ihm gesendeten Krystalle von ihm beobachtet, und er schreibt sie da auch wirklich E^3, also mit demselben Zeichen, was vorhin eine ganz andere Fläche bedeutete. Es ist zu verwundern, daſs er ihrer in der späteren Abhandlung über die Pyroxene von Newyork (*Ann. t. XIX.*) als einer bloſs imaginären Fläche unter der Bezeichnung E^3 und in der Aufzählung der sämmtlichen am Augit ihm vorgekommenen Flächen in seiner noch neueren zweiten Fortsetzung der Abh. über das Gesetz der Symmetrie (*Journal du Mus. d'hist. nat. t. I.*) gar nicht wieder gedenkt. Allein sie findet sich wirklich nicht allzu selten; und das Königl. Mineralienkabinet besitzt sie an mehreren der gemeinen Augite, aus Sicilien sowohl, als aus andern Ländern.

Die erste, häufiger vorkommende Fläche *o* aber schreibt Haüy in allen seinen neueren Abhandlungen, wo er sie erwähnt, nicht mehr, wie in seinem Lehrbuch, E^3, sondern umgekehrt ${}^3E$, und dies allerdings natürlicher in Beziehung auf die dem Auge bei Betrachtung der Figur, welche die primitive Form vorstellt, noch mehr sich darbietende Ecke E rechter Hand. Dagegen bedeutet freilich dasselbe Zeichen ${}^3E$, auf die Ecke linker Hand

bezogen, abermals die keineswegs gemeinte, gänzlich von ihr verschiedene andere Fläche *z*. So hätte man also von Haüy selbst die Verwechselung ganz verschiedener Gegenstände durch den Gebrauch der nämlichen Zeichen bei geraden Decrescenzen an den Ecken eben so vollständig, als nur immer bei den schiefen Decrescenzen geschehen konnte.

Was aber von ${}^3E$ oder E^3 gilt, das gilt von einem jeden ihm analogen Decrescenzzeichen mit einem andern Exponenten, ausgenommen mit 1; denn nur bei diesem gleicht sich der Unterschied im Erfolg, je nachdem sein Gesetz auf die rechte oder auf die linke Seite derselben Ecke bezogen wird, in einem und demselben Resultate aus.

Am consequentesten würde noch der Unterschied der beiderlei Flächen nach der Haüy'schen Bezeichnungsweise ausgedrückt werden können, wenn man die Fläche *o* schriebe $E^3\,{}^3E$, und die Fläche *z*, ${}^3E\,E^3$; welches bezeichnen würde, daſs man die erstere Decrescenz sich denken solle an der links auf der Figur stehenden Ecke zur Rechten, und der rechts stehenden zur Linken hin wirkend, bei der zweiten aber das umgekehrte. Indeſs, abgesehen davon, daſs Haüy selbst sie nicht so geschrieben hat, so wird es jederzeit beschwerlich bleiben, mit so ähnlichen Zeichen, welche in andern Fällen (wo nämlich die rechte und linke Seite der Ecke sich gleichen), wirklich das nämliche bedeuten, hier wesentliche Verschiedenheiten als ausgedrückt der Anschauung gegenwärtig zu erhalten; und so würde zu häufigen Verwechselungen und Miſsverständnissen der Anlaſs gegeben bleiben. Diese aber werden vermieden, wenn das Zeichen die Stellen selbst nennt, welche ganz anders in dem einen als in dem andern Falle von der bezeichneten Fläche getroffen werden. Und deshalb müssen wir auch in solchen Fällen Zeichen, wie die unsrigen, ${}^{1}D\overset{\frac{1}{3}B}{E}{}^{1}G$, und ${}^{\frac{1}{3}}D\overset{1B}{E}{}^{1}G$, den Vorzug gröſserer Bestimmtheit und Anschaulichkeit, so wie der vollkommensten Unzweideutigkeit, vor den obigen $E^3\,{}^3E$ und ${}^3E\,E^3$ einräumen.

Es kommen bei den geraden Decrescenzen an den Kanten gleichfalls Fälle vor, wo ähnliche Verwechselungen durch die Haüy'schen Bezeichnungen verursacht werden können, nämlich immer dann, wenn die verschiednen Seiten der Kante, die rechte oder die linke, die obere oder die untere, ungleiche Verhältnisse haben. Die Stellung des Exponenten über oder unter den Buchstaben der Ecke läſst auch hier, wie im vorigen Fall, nicht leicht eine Zweideutigkeit zurück, wohl aber die Stellung zur Rechten oder zur Linken. Man nehme nur als Beispiel jedes rechtwinkliche Pa-

rallelepiped von dreierlei Werth seiner Flächen, oder dreifacher Verschiedenheit der auf ihnen senkrechten Dimensionen, wie z. B. die Haüy'schen primitiven Formen des Chrysolithes (*péridot*), des Chrysoberilles (*cymophane*), des Stilbites u. s. w. sind; und erwäge die Bedeutung der Decrescenzen an den Kanten, welche als Seitenkanten genommen und mit G bezeichnet worden sind, und zwar Decrescenzen mit einem andern Exponenten als 1; so hat man genau das Gegenstück zu dem, was wir so eben am Beispiele des Augites für die geraden Decrescenzen an den Ecken entwickelt haben. G^2 bekommt wieder eine andere Bedeutung als ${}^2G$; aber G^2 an der Kante G zur Linken ist $= {}^2G$ an der Kante G, die an der Figur zur Rechten liegt, und wiederum ${}^2G$ an jener $= G^2$ an dieser. Man schreibe nun auch aufs möglichst consequente für jene jederzeit $G^2\,{}^2G$, für diese ${}^2G\,G^2$, so behält man doch gleich schwierige Anschaulichkeit, da man von andern Fällen gewohnt ist, in beiden Zeichen dasselbe ausgedrückt zu lesen; man geräth leicht in Gefahr, das zu verwechseln, was ganz und gar nicht verwechselt werden darf; und man wird, um diesem zu entgehen, auch hier das, obwohl etwas weitläuftigere, dagegen aber das Gemeinte unmittelbar und ohne alle Zweideutigkeit ausdrückende Zeichen vorziehen, ${}^{\frac{1}{2}B}_{\frac{1}{2}B}G^{1C}_{1C}$, welches sich auch gar wohl abkürzen läfst in ${}^{\frac{1}{2}B}G^{1C}$, und welches identisch ist mit ${}^{1C}G^{\frac{1}{2}B}$ oder ${}^{1C}_{1C}G^{\frac{1}{2}B}_{\frac{1}{2}B}$; und wenn wir auch in diesem wie in dem vorigen Falle dem Haüy'schen Zeichen eine gröfsere Eleganz zugestehen, so gilt sie doch hier nur auf Kosten der Deutlichkeit; und im Gegentheil das Hinzutreten andrer Buchstaben in dem unsrigen vergegenwärtigt uns wieder die Anschauung der wesentlich zu unterscheidenden Stellen an der gewählten Primärform, ohne Rücksicht auf welche doch ein Zeichen wie G^2 nicht verstanden werden kann. Ja ich würde in andern Fällen, so sehr ich die Kürze und Einfachheit der Zeichen schätze, eine noch gröfsere Ausführlichkeit der Zeichen empfehlen, weil dadurch noch mehr charakteristische geometrische Eigenschaften der einzelnen Flächen unmittelbar der Anschauung sich darbieten lassen; und weil im weiteren Studium des Zusammenhangs, welcher in einem Krystallisationssysteme herrscht, dadurch die Uebersicht aller Verhältnisse sehr befördert und erhöht werden kann, ganz besonders auch die verschiedenen Zonen, in welche eine und dieselbe Fläche fällt, auf diese Weise grofsentheils schon im Zeichen selbst gelesen werden können.

Wenn eine Ecke von vier oder auch mehr Flächen eingeschlossen wird, so reicht allerdings die Nennung dreier Kanten und des Verhältnisses der an ihnen weggeschnittenen Stücke hin, die geometrische Lage der zu bezeichnenden neuen Fläche, gehöre sie einer geraden oder einer schrägen Decrescenz an dieser Ecke an, bestimmt zu bezeichnen. Nichtsdestoweniger würde ich es vorziehen, das proportionale Stück auch an der vierten oder den mehreren Kanten in das Zeichen mit aufzunehmen, theils weil die Wahl der drei unter den mehreren willkührlich seyn könnte und würde, und dann dieselbe Fläche wieder mehrere unter sich unähnliche Bezeichnungen erhalten würde, je nachdem man sich nach Gefallen der einen oder der andern Kanten hierzu bediente, und im Gegentheil es darauf ankommt, durch die Methode der Bezeichnung ein einzig-mögliches Zeichen für dasselbe Zubezeichnende festzusetzen, theils weil dadurch die geometrischen Verhältnisse der neuen Fläche zu dem Hauptkörper, so wie zu andern abgeleiteten, welche das eine oder das andre Verhältniſs mit ihr gemein haben, vollständiger und unmittelbar am Zeichen anschaulich an den Tag gelegt werden, und weil überhaupt die ganze Lage der neuen Fläche an dem Hauptkörper hiedurch dem Auge um so vollkommner versinnlicht wird, und sich ihm um so fester eindrückt; ja die Hinzufügung der vierten oder übrigen Kanten kann noch als Rechnungsprobe genutzt werden, um die Uebereinstimmung der Angabe in sich darzuthun, oder im entgegengesetzten Fall den Irrthum zu entdecken. Und so will ich zurückkehren zum Quarz und dessen Flächen, von welchen ich oben gehandelt habe; und statt daſs wir vorhin in die Haüy'sche Annahme einer rhomboëdrischen primitiven Form für denselben eingingen, um die Haüy'sche Bezeichnungsmethode zu beleuchten, wollen wir jetzt die dem Quarz gebührende Primärform einer doppelt-sechsseitigen Pyramide oder eines Dihexaëders wieder in ihre Rechte einsetzen, und an ihr entwickeln, wie wir nunmehr die Flächen, von denen oben die Rede war, und andre ihnen verwandte werden zu bezeichnen haben. Sie alle gehörten in eine und dieselbe Zone, welche ich die Kantenzone *) des Dihexaëders nenne; und legen wir zum Grunde die Neigung einer Fläche P des Dihexaëders oder der Primärform selbst gegen eine Ebne, welche durch die an dieser Fläche P anliegende Endkante und die jenseit der Axe ihr gegenüberliegende gelegt wird (welche Ebne ich

*) Abgekürzt statt Endkantenzone; der Charakter dieser Zone ist, daſs alle ihr zugehörigen Flächen sich in Linien schneiden, parallel einer der Endkanten des Dihexaëders.

den Aufriſs dieser Kantenzone, oder den Kantenaufriſs nenne); so ſindet sich, daſs die Rhombenſläche *s* gegen den nämlichen Kantenaufriſs geneigt ist mit dem dreifachen Cosinus von *P* bei gleichem Sinus, die Fläche *u* mit dem 7fachen Cosinus von *P* bei gleichem Sinus, die Fläche *x* aber mit 11fachem Cosinus von *P* bei gleichem Sinus. In andern verwandten Krystallisationssystemen, wie Apatit, kommen statt jener in der nämlichen (oder analogen) Kantenzone Flächen gebildet vor, deren Gesetz ist der 5fache Cosinus von *P* bei gleichem Sinus, oder auch der 9fache, immer für die Neigung gegen den Kantenaufriſs. Und deshalb wollen wir diese Fälle hier mit aufnehmen in die Reihe der Flächen aus der Kantenzone des Dihexaëders, deren Zeichen nun am Dihexaëder als Primärform nach unserm obigen Verfahren folgende werden:

Nennen wir *E* die Lateralecken, *B* die Endkanten, *F* die Lateralkanten am Dihexaëder, so erhält die Rhombenſläche, oder *s* beim Quarz, d. i. die Fläche mit dreifachem Cosinus von *P* bei gleichem Sinus, den Ausdruck $_{1F}\overset{1B}{\underset{\frac{1}{3}B}{E}}{}_{1F}$

die Fläche mit fünffachem Cosinus, den Ausdruck $_{\frac{1}{2}F}\overset{\frac{1}{2}B}{\underset{\frac{1}{4}B}{E}}{}_{1F}$ und $_{1F}\overset{\frac{1}{2}B}{\underset{\frac{1}{4}B}{E}}{}_{\frac{1}{2}F}$

— — — siebenfachem, oder *u* beim Quarz $_{\frac{1}{3}F}\overset{\frac{1}{3}B}{\underset{\frac{1}{5}B}{E}}{}_{1F}$ und $_{1F}\overset{\frac{1}{3}B}{\underset{\frac{1}{5}B}{E}}{}_{\frac{1}{3}F}$

— — — neunfachem den, $_{\frac{1}{4}F}\overset{\frac{1}{4}B}{\underset{\frac{1}{6}B}{E}}{}_{1F}$ und $_{1F}\overset{\frac{1}{4}B}{\underset{\frac{1}{6}B}{E}}{}_{\frac{1}{4}B}$

und die mit dem eilffachem, oder *x* beim Quarz den Ausdruck: $_{\frac{1}{5}F}\overset{\frac{1}{5}B}{\underset{\frac{1}{7}B}{E}}{}_{1F}$ und $_{1F}\overset{\frac{1}{5}B}{\underset{\frac{1}{7}B}{E}}{}_{\frac{1}{5}F}$.

Indem man nämlich die rechts und links vom Buchstaben der Ecke stehenden Theile des Zeichens vertauscht, so wird die eine oder die andre der oben erwähnten, unter sich analogen, aber gegensinnig liegenden Flächen ausgedrückt, von welchen wir oben erinnerten, daſs der Quarz die Eigenthümlichkeit besitzt, nur die einen oder die andern in einem und demselben Individuum, nicht aber beide an Einem, zu zeigen.

Haüy hat, wie bekannt, das Dihexaëder oder Bipyramidal-Dodekaëder, wie er es nennt, als primitive Form zu behandeln vermieden, und auch

auch da, wo es die Beobachtung als solche darbot, ihm ein Rhomboëder substituirt. So würde es sogar in seiner Bezeichnungsweise noch einigem Zweifel ausgesetzt seyn, wie und mit welchen Exponenten die oben geschriebenen Flächen, als gerade Decrescenzen an den Lateralecken des Dihexaëders genommen, — denn das werden sie an dieser Primärform alle — ihm zufolge geschrieben werden müfsten. Die Analogie könnte nämlich hier ungewifs lassen, ob eine Decrescenz *E* an der Lateralecke einer solchen Primärform eine Fläche bedeute, welche, während sie die eine Endkante *B* ganz, und die eine Lateralkante *F* ebenfalls ganz wegschnitte, die andre Lateralkante *F*, oder aber die andre Endkante *B* ebenfalls ganz wegschneiden würde. Beides aber wäre etwas ganz verschiedenes; und danach würde sich der jedesmalige Exponent für jede Fläche richten, und somit, nach der einen oder der anderen Voraussetzung, ein ganz verschiedener werden. Auf solche Primärformen konnte Hr. H. seine Decrescenzlehre überhaupt nicht unmittelbar anwenden; er erfand zur Vermittelung solcher Fälle mit seiner Theorie die subtractiven Molekuls, d. i. einen Aufbau von wahren Molekuls und leeren Räumen zu einer parallelepipedischen Form, um nun durch das Decresciren Räume wegfallen lassen zu können, welche sich zu einem Continuo im Raume an einander fügten; eine gezwungene und willkührliche Vorstellung, deren man nicht mehr bedarf, sobald man die Decrescenzen aufgiebt, und anerkennt, dafs die Aufgabe in nichts besteht als darin: die Lage der neuen Fläche gegen die Primärform zu bestimmen.

Zweiter Abschnitt.

Ueber eine Bezeichnung der Flächen eines Krystallisationssystemes, welche von der Annahme einer Primärform völlig unabhängig ist.

Die bisher erörterten Methoden für die Bezeichnung der Krystallisationsflächen gründeten sich sämmtlich auf die Voraussetzung eines gegebenen Körpers als der sogenannten primitiven Form; und lediglich an derselben

wurden die übrigen Flächen des Systemes betrachtet und bezeichnet. Die Lehre von der primitiven Form der krystallisirenden Körper aber ist noch nichts weniger als aufs Reine gebracht; und es ist eine sehr subtile Untersuchung, in wie weit sie Realität habe; denn daſs sie einige wirklich besitzt, das wird sich zuletzt allerdings ausweisen. Aber diese Realität möchte ihr in einem anderen Sinne zukommen, als man dem Begriff bisher untergelegt hat; sie möchte sich bewähren freilich durch Auszeichnung der einen Flächenrichtungen vor den andern; aber dies wird theils zu einer Reihe führen, wo mehrere Stufen unterschieden werden müssen; und deshalb behalte ich für die ganze Reihe die Benennungen von primären, secundären, tertiären Flächen u. s. f., nach ihren sämmtlichen physischen Auszeichnungen gewürdiget, vor, anstatt ein seynsollendes Primitive und Nichtprimitive, d. i. Secundäre nach gewöhnlicher Bedeutung anzuerkennen; — theils möchte es eben so wesentlich seyn, nicht bloſs die Subordinationen, die Reihenfolge von primären, secundären, tertiären u. s. f., sondern auch die Coordinationen eines Systemes zu verfolgen, durch welche von dem ersten Schritt aus eine Mehrheit von Gliedern gleichen und entgegengesetzten Ranges eintreten dürfte, ein solcher ursprünglicher Gegensatz, durch welchen mehrere gleich-primäre Gestaltungen, sich gegenseitig ausschlieſsend und bekämpfend, in ihrem nothwendigen Zwiespalt zur Grundlage würden, einem Zwiespalt, welcher, durch die Ausführung und Vollendung des ganzen Systemes geeiniget und versöhnt, dennoch selbst das Prinzip der inneren Entwickelung, d. i. der Gliederung des Systemes zu seyn scheint.

So wie die Lehre von einer primitiven Form, welche dann gewiſs in ihrem Innersten erschüttert ist, bisher lag, so war eine gewisse Willkühr in der Wahl der primitiven Form eines gegebenen Systemes von ihr fast unzertrennlich; und in einem Systeme, dessen Grundgesetz es ist, mit einer bestimmten, durch ein festes Verhältniſs geregelten Verschiedenheit nach drei unter einander senkrechten Dimensionen im Raume seinen Gestaltungsgang zu gehen, konnten mit beinahe gleichem Rechte, und wirklich mit gleichem Erfolge für die Bedürfnisse der mathematischen Behandlung, ein Rhombenoctaëder, dreierlei ihm zunächst verwandte Oblong- oder zwei-und-zwei-flächige Octaëder, auch dreierlei geschobne vierseitige Säulen mit gerad angesetzten Endflächen, endlich auch ein rechtwinkliches Parallelepiped von einem bestimmten Verhältniſs seiner Dimensionen, als primitive

Form gewählt werden; und alles, was an dem Systeme vorkam, liefs sich sowohl von dem einen als dem andern dieser acht Glieder oder achterlei primitiven Formen aus, genügend und folgerecht entwickeln. Ja man konnte weiter z. B. an dem Parallelepiped die eine Dimension gegen die beiden andern verdoppeln, und die Formen nehmen, welche sich auf dieses so veränderte Parallelepiped eben so bezogen, wie die vorigen auf das erste, so erhielt man die ganze Reihe der acht primitiven Formen mit geringer Veränderung noch einmal, und es glückte die mathematische Ableitung sämmtlicher Flächen des Systemes noch leidlich wie zuvor. Wie vielmal aber derselbe Prozefs mit den Umwandlungen der primitiven Formen in andern Richtungen, oder auch durch Halbirung, Verdreifachung u. s. f. einer und derselben Dimension allenfalls wiederholt werden konnte, dem wollen wir vorläufig gar nicht die Grenze bezeichnen, noch weniger die zufälligeren Abwege verfolgen, auf die der Krystallograph bei Aufsuchung seiner primitiven Form gerathen konnte, und die nur zu noch unkenntlicheren Verkrüppelungen derselben und theoretischen Mifsgeburten führen mufsten.

Als ich im Jahre 1809 beim Antritt meiner ordentlichen Lehrstelle in Leipzig meine beiden lateinischen Dissertationen *de indagando formarum crystallinarum charactere geometrico principali* herausgab, theilte ich noch die allgemeine Meinung von der Nothwendigkeit der Annahme und von dem reellen Vorhandenseyn einer primitiven Form in einem dem gewöhnlichen wenigstens ähnlichen Sinne; und indem ich nur eine dynamische Begründung derselben statt der verwerflichen atomistischen Denkweise darüber suchte (inzwischen aber bei der Wahl meiner primitiven Formen, wo nicht hinlänglich sprechende Thatsachen vorhanden waren, mit einem gewissen natürlichen Gefühl zu Werke ging, über welches ich jetzt wohl mir mehr Rechenschaft abzulegen im Stande bin), so entwickelte sich mir gleichsam unter der Hand an meinen primitiven Formen, welchen ich bis dahin noch eine ursprüngliche Realität beimafs, das, was eigentlich über ihnen steht, und an dem zufälligen Schwanken unter ihnen nicht Theil nimmt, das Grundverhältnifs in den Dimensionen, in welchen und nach welchem eine Mehrheit innrer Gegensätze, einander gleich nothwendig und gegenseitig sich fordernd, zusammengehörig und zusammengreifend, jeder polarisch in sich, durch die Masse des Krystallisirenden hindurch stetig sich entwickelt, so dafs die Gestaltung mit dieser Mehrheit der innern Gegensätze beginnt und fortschreitet. Seitdem habe ich — und was war natür-

licher? — jenes Grundverhältniſs an und für sich als Fundament der Sache und der Lehre erkannt, und mich bemüht, alles Zufällige in der Annahme einer primitiven Form abzustreifen, um nur die wirklichen Werthe eines jeden Gliedes im Systeme durch seine sämmtlichen physischen und geometrischen Eigenschaften sich geltend machen zu lassen, nicht das eine durch geflissentliche Hervorziehung des andern zu verdunkeln, vielmehr in Einer Anschauung vom Ganzen des Baues jedes Glied in seinem Werthe hervortreten zu lassen, ohne es ungebührlich zu erheben, oder ungerecht hintanzusetzen.

Und was ist nunmehr natürlicher, als hierauf auch eine Bezeichnung der sämmtlichen Flächen eines Systemes zu gründen, sowohl derer, die vorher für primitive galten, als derer, die man nur immer in Beziehung auf diese zu denken sich gewöhnte, nicht, wie sie wohl gedacht werden müssen, in ihrem reineren Werthe, unabhängig von jenen, also mit und ohne Beziehung auf die letzteren, aber in nothwendiger und gerader Beziehung auf die Dimensionen selbst.

Da haben wir nun die zwei Hauptfälle — ich kenne nur diese zwei als wirklich vorhanden *) —: Entweder — und das ist bei weitem der häufigste Fall — ist das erwähnte Grundverhältniſs in drei auf einander senkrechten Dimensionen gegeben. Oder — es finden sich gegen Eine Dimension drei andre unter sich gleiche, auf der ersten rechtwinkliche Dimensionen, und das System beruht auf dem Verhältniſs jener ersten Dimension gegen die drei andern. Wir wollen den ersten Fall zuvörderst beleuchten.

A. Erster Hauptfall.

Wir nennen die drei unter einander senkrechten Dimensionen, oder besser ihre Hälften, *a*, *b*, *c*; ihr Verhältniſs ist jederzeit für ein gegebenes System ein bestimmtes, meist diesem eigenthümliches; und dieses Verhältniſs in seinem wirklichen Werthe ausgedrückt, wird der Schlüssel zu den speciellen Eigenschaften und Winkelverhältnissen des Systemes.

Wir denken uns von einem Punkte — er kann den Mittelpunkt der Masse oder des zu construirenden Körpers vorstellen — drei Linien in den Richtungen von *a*, *b*, *c* ausgehend, so wird eine jede Fläche sich ausdrükken lassen durch diejenigen drei Punkte, in welchen sie diese drei Linien

*) Vgl. meine Abhandlung im vorhergehenden Bande dieser Schriften.

durchschneidet, oder durch das Verhältnifs ihrer Abstände von dem angenommenen Mittelpunkt in den drei unter sich senkrechten Linien *a*, *b*, *c* als Coordinaten. Die Richtung der Fläche eines Krystallisationssystemes aber wird sich jederzeit in einem einfachen Zahlenverhältnifs der drei Dimensionen oder Coordinaten *a*, *b*, *c* ausdrücken lassen. Man darf also diese Zahlen nur zu den Dimensionen, welchen sie zugehören, hinzusetzen, so ist die Lage der Fläche bezeichnet.

So wird das Zeichen $\left|\overline{\underline{a:b:c}}\right|$ die Flächen eines Octaëders ausdrükken, dessen drei gegen einander rechtwinkliche Axen unter sich in dem Verhältnifs der Linien *a*, *b* und *c* stehen. Wenn alle drei Linien ungleich sind, so wird es die Fläche eines Rhombenoctaëders seyn; sind zwei darunter gleich, und verschieden von der dritten, so ist es die Fläche eines Quadrat- oder 4gliedrigen Octaëders. Sind alle drei Linien unter sich gleich, so ist es die Fläche des regulären Octaëders. Die Gleichheit der Dimensionen wird auch durch Gleichheit der Buchstaben auszudrücken seyn, und die Fläche des 4gliedrigen Octaëders demnach durch $\left|\overline{\underline{a:a:c}}\right|$, die des regulären durch $\left|\overline{\underline{a:a:a}}\right|$ am schicklichsten bezeichnet werden *).

$\left|\overline{\underline{a:b:2c}}\right|$ wird die Fläche eines Octaëders seyn, welches bei gleicher Grundfläche mit dem vorigen doppelte Höhe hat;

$\left|\overline{\underline{2a:2b:c}}\right|$ die eines Octaëders, welches bei der nämlichen Grundfläche — (dies spricht sich dadurch aus, dafs $2a : 2b = a : b$) — die halbe Höhe des ersten hat. Möchte man auch lieber schreiben wollen $\left|\overline{\underline{a:b:\tfrac{1}{2}c}}\right|$ anstatt $\left|\overline{\underline{2a:2b:c}}\right|$, so halte ich es doch im Allgemeinen für dienlicher, nur in ganzen Zahlen statt der Brüche die Verhältnisse in den Dimensionen *a*, *b* und *c* für jede Fläche auszudrücken.

$\left|\overline{\underline{2a:b:c}}\right|$ würde, wie man sieht, die Fläche eines Octaëders bezeichnen, welches mit dem ersten eine Grundfläche gemein hätte, deren Diagonalen in den Richtungen von *b* und *c* lägen, dessen Höhe aber in der

*) Nur in sofern (wie sich unten in Bezug auf das Tetraëder und Pentagon-Dodekaëder zeigen wird) das Bedürfnifs eintreten kann, auch die unter sich gleichen Dimensionen im Zeichen von einander zu unterscheiden, wird es gut seyn, sie mit den verschiedenen Buchstaben *a*, *b*, *c* zu bezeichnen, wenn gleich alsdann $a = b = c$ gesetzt ist.

Richtung von a genommen würde; und diese Höhe würde für die eben bezeichnete Fläche verdoppelt seyn gegen die erste. U. s. f.

Der Sinn eines Zeichens, wie $\left|\overline{\underline{a : 2b : 3c}}\right|$ oder wie $\left|\overline{\underline{2a : b : 6c}}\right|$ u. s. f. wird eben so wenig zweideutig seyn, und keiner weiteren Erläuterung bedürfen.

Flächen, welche einer der Dimensionen a, b oder c parallel sind, werden zu dem Zeichen dieser Dimension das Zeichen des Unendlichen, ∞, beigesetzt erhalten; so wird $\left|\overline{\underline{a : b : \infty c}}\right|$ die Seitenfläche einer vierseitigen Säule ausdrücken, deren Diagonalen sich verhalten, wie $a : b$, also die geraden Abstumpfungsflächen derjenigen Kanten des ersten Octaëders $\left|\overline{\underline{a : b : c}}\right|$, welche wir uns gleich anfangs als Kanten der gemeinschaftlichen Grundfläche der Pyramiden dachten.

$\left|\overline{\underline{a : 2b : \infty c}}\right|$ bezeichnet eine andere Seitenfläche mit gleicher Axe der Säule, oder in derselben horizontalen Zone, deren Neigung gegen die Linie b doppelten Cosinus bei gleichem Sinus mit der vorigen Fläche hat, oder gegen die Linie a doppelten Sinus bei gleichem Cosinus mit der vorigen $\left|\overline{\underline{a : b : \infty c}}\right|$.

Was $\left|\overline{\underline{b : c : \infty a}}\right|$ oder $\left|\overline{\underline{2a : 3c : \infty b}}\right|$ u. s. f. bedeuten wird, kann eben so wenig zweifelhaft erscheinen.

Man würde, käme es bloſs auf möglichste Kürze des Zeichens an, hier auch die Dimensionen mit dem Zeichen des Unendlichen aus demselben hinweglassen können; aber der harmonischen Darstellung des Ganzen wird es angemessener seyn, sie beizubehalten.

Endlich diejenigen Flächen, welche zweien Dimensionen, a, b oder c parallel gehen, mithin auf der dritten senkrecht sind, erhalten zu dem einfachen Zeichen der letzteren die der beiden ersteren, beide mit dem Beisatz ∞; also ist $\left|\overline{\underline{a : \infty b : \infty c}}\right|$ das Zeichen für die Fläche senkrecht auf a, $\left|\overline{\underline{b : \infty a : \infty c}}\right|$ das für die Fläche senkrecht auf b, und $\left|\overline{\underline{c : \infty a : \infty b}}\right|$ das für die Fläche senkrecht auf c.

Man wird es im Gebrauch bequemer finden, die Zeichen der Dimensionen, welche den Beisatz des Unendlichen bekommen, zuletzt zu schrei-

ben, aufserdem aber der Ordnung der Buchstaben *a*, *b*, *c* in den Zeichen immer zu folgen. Eine geringfügige Aenderung wäre es wenigstens, auch wo das Zeichen des Unendlichen vorkommt, der Ordnung der Buchstaben *a*, *b*, *c* ohne Ausnahme folgen zu wollen.

Diese Bezeichnungsweise mag sich durch ihre Klarheit und Bündigkeit von selbst empfehlen; sie hat aber noch Vortheile, welche wohl noch bemerklich gemacht zu werden verdienen. Zuerst für die Berechnung. Man liest gleichsam im Zeichen schon den einfachen Gang der Berechnung; ja man sieht, wenn man anders die drei rechtwinklichen Dimensionen vor der Seele hat, mit dem Auge schon alle die hauptsächlichern geometrischen Eigenschaften des bezeichneten Körpers, und gewöhnt sich sogar leicht, indem man den Dimensionen *a*, *b* und *c* ihre jedesmaligen Werthe substituirt, bei den einfacheren Fällen durch eine leichte Kopfrechnung auch die Winkel annäherungsweise angeben zu können, die der bezeichnete Körper haben wird.

Man sieht ohne Schwierigkeit, dafs die Fläche $\left|\overline{\underline{a : b : 2c}}\right|$ für ihre Neigung gegen die Axe *c* bekommt das Verhältnifs von Sinus zu Cosinus $= \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} : 2c$, dafs das umgekehrte Verhältnifs den halben Neigungswinkel der bezeichneten Fläche gegen die anliegende der untern Pyramide giebt; man rechnet eben so leicht, dafs die Fläche $\left|\overline{\underline{2a : 3b : 6c}}\right|$ gegen die Linie *a* geneigt ist mit dem Verhältnifs von Sinus zu Cosinus $= \frac{3b.\ 6c}{\sqrt{9b^2+36c^2}} : 2a$ $= \frac{6bc}{\sqrt{b^2+4c^2}} : 2a = \frac{3bc}{\sqrt{b^2+4c^2}} : a.$ Die Neigungen der Kanten eines so bezeichneten Octaëders aber gegen die dreierlei Dimensionslinien *a*, *b*, *c* springen wie von selbst in die Augen.

Was hier von den mathematischen Verhältnissen der verschiedenen Krystallisationsflächen unmittelbar einleuchtet, das ist bei den Haüy'schen und ähnlichen Bezeichnungen gröfstentheils versteckt; die Rechnung mufs es erst hervorheben, und dann hat sie das, was in jener Bezeichnungsweise unnütz ist, und nicht direct zum Ziele führt, erst abzustreifen, und mehr oder

weniger mühsam die geometrischen Eigenschaften des Bezeichneten als den eigentlichen Sinn des Zeichens erst auf Umwegen aus ihm abzuleiten.

Auch die besten und untadelhaftesten Haüy'schen Bezeichnungen bedürfen bei der Berechnung noch einer solchen Uebersetzung. Denn daſs z. B. G^2, wenn G die Seitenkante einer symmetrischen geschobnen vierseitigen Säule ist, eine Fläche mit 3fachem Sinus der Neigung gegen eine unserer Dimensionen b, welche auf G senkrecht steht, bei gleichem Cosinus mit der Seitenfläche der Primärform selbst bedeutet, muſs denn doch erst durch Rechnung sich ergeben; in unsrer Bezeichnung heiſst sie $\left|\overline{\underline{3a:b:\infty c}}\right|$. Und wer sieht es vollends etwa dem Zeichen $G^{\frac{5}{3}}$ an, daſs damit die Fläche mit 4fachem Sinus in derselben Beziehung gemeint ist, d. i. unsre Fläche $\left|\overline{\underline{4a:b:\infty c}}\right|$? oder dem Zeichen G^5, daſs es der Fläche mit $\frac{3}{2}$fachem Sinus in gleicher Bedeutung, oder unserer Fläche $\left|\overline{\underline{3a:2b:\infty c}}\right|$ angehört?

Hier kommt ein sehr bedeutender Punkt an den Tag. Dadurch, daſs die Haüy'schen Bezeichnungen, auch wo sie am geläutertesten sind, doch nur darauf hinausgehen, die Lage der abgeleiteten Flächen äuſserlich an der primitiven Form anzugeben, entfernen sie sich von der directen Angabe des Wesentlicheren: wie nämlich die bezeichneten Flächen gegen diese inneren Normallinien der Figur liegen. Aber freilich muſsten diese Normallinien erst als das Wesentlichste und Regierende der ganzen Gestalt hervorgehoben werden, ehe auch die Bezeichnung auf sie sich direct richten konnte. Wie eine zu bestimmende Fläche gegen diese inneren Grundlinien aller krystallinischen Structur liege, das bleibt die Hauptsache, und danach fragt auch die Rechnung hauptsächlich. Wie die Fläche jenseit dieser inneren Hauptlinien irgend ein jenseitiges Glied des Systemes trifft und durchschneidet, das ist ein untergeordneter, zufälligerer Theil der Betrachtung, und mag seiner eignen Berücksichtigung vorbehalten bleiben, welche aber immer nur eine abgeleitetere, und untergeordneteren Werthes seyn wird. Zunächst hat sich die Bestimmung eines neuen Gliedes um jenes Jenseitige und die äuſserliche Erscheinung an ihm nicht zu kümmern. Darauf aber ist die Haüy'sche Bezeichnungsmethode in ihrem Wesentlichsten gerichtet und gegründet.

Noch ein andrer Vortheil ist mit unserer Bezeichnungsweise verbunden. Man sieht in einem jeden einzelnen Zeichen sehr leicht, in welche der

der hauptsächlicheren Zonen des Krystallisationssystems *) die bezeichnete Fläche fällt; und durch die Zusammenstellung der Zeichen für die verschiedenen Flächen eben so leicht, welche gemeinschaftlich in Eine und dieselbe Zone fallen. Dafs z. B. eine Fläche wie $|\overline{\underline{2a : b : 2c}}|$ als Zuspitzungsfläche gerad aufgesetzt seyn würde auf eine Seitenkante der Säule $|\overline{\underline{2a : b : \infty c}}|$, oder dafs sie in eine vertikale Zone der eben genannten Seitenfläche fällt; eben so dafs sie in eine Hauptzone des Octaëders $|\overline{\underline{a : b : c}}|$ die Dimension b zur Axe genommen, oder, was dasselbe ist, dafs sie in eine Diagonalzone der mit b parallelen Fläche $|\overline{\underline{a : c : \infty b}}|$ fällt, das und mehreres liegt in dem Zeichen $|\overline{\underline{2a : b : 2c}}|$ offen am Tage. Denn die Axen der genannten Zonen gehen parallel den Linien, welche zwei im Zeichen angegebene Endpunkte zweier Dimensionslinien unter sich verbinden. Die Axe der vertikalen Zone der Seitenfläche $|\overline{\underline{2a : b : \infty c}}|$ geht parallel der Linie, aus dem Endpunkte der Linie $2a$ nach dem Endpunkte $1b$ gezogen; die der zweiten erwähnten Zone geht parallel einer Linie vom Endpunkt der Linie $1a$ nach dem von $1c$ gezogen, also auch von $2a$ nach $2c$, wie das Verhältnifs $2a : 2c = a : c$ in dem Zeichen unsrer Fläche sichtlich macht; und welche verschiedene Flächen in ihrem Zeichen ein solches Verhältnifs unter sich gemein haben, die fallen auch stets gemeinschaftlich in diejenige Zone, deren Axe die Linie ist, welche durch das ihnen gemeinsame Verhältnifs bestimmt wird. Also Flächen wie $|\overline{\underline{2a : b : c}}|$, $|\overline{\underline{4a : 2b : 3c}}|$ u. s. f. würden in die erste, Flächen wie $|\overline{\underline{a : 2b : c}}|$, $|\overline{\underline{3a : 2b : 3c}}|$ u. s. f. würden in die zweite der angegebenen Zonen gemeinschaftlich fallen.

Wir haben bisher eigentlich die einzelne Fläche bezeichnet. Sollen die mehreren unter sich gleichartigen Flächen oder der ganze von ihnen

*) Es giebt leichte Formeln, mittelst welcher sich aus dem gegebnen Zeichen der Fläche in Beziehung auf jede erdenkliche Zone schnell entnehmen lafst, ob die bezeichnete Fläche in die gedachte Zone falle oder nicht. Diese Formeln werden wir bei einer andern Gelegenheit mittheilen. Hier wollen wir nur das Verhältnifs unsrer Zeichen zu denjenigen Zonen berücksichtigen, deren Axe parallel geht einer Linie, gezogen aus einem bestimmten Punkte der einen unserer drei Grunddimensionen nach einem bestimmten Punkte von einer der beiden andern; und bei diesen bedarf es keiner besondern Formeln, um zu sehen, ob einer solchen Zone eine auf unsre Weise bezeichnete Fläche angehört oder nicht.

begrenzte Körper ausgedrückt werden, so bedarf es, wenn die Zahl der Flächen, deren jede für sich durch das Zeichen ausgedrückt ist, vollständig vorhanden ist, keiner besondern Bezeichnung; es sind die Flächen $\left|\overline{a:b:c}\right|$ u. s. f. oder der Körper mit den Flächen $\left|\overline{a:b:c}\right|$. Sind sie aber unvollzählich vorhanden, und soll dies im Zeichen ausgedrückt werden, so kann auch dies sehr leicht geschehen. Da in solchen Fällen eine Regel für das Ausfallen, und zwar des Ausfallens einer Hälfte der Flächen, welche das Zeichen gemein haben, Statt findet, auch bloſs diese einem bestimmten Gesetz folgenden Bildungen solcher Art, nicht aber jede andre zufällige, in einer allgemeinen Zeichensprache aufgenommen zu werden verdienen, so vereinfacht sich das, was zum Ausdrücken eines solchen Gesetzes erfordert wird, von selbst schon.

Einer der vornehmsten Fälle wird seyn der unserer zwei-und-eingliedrigen oder augitartigen Systeme. Hier verhalten sich die einander zugekehrten Seiten zweier Dimensionen — man erinnert sich der verschiedenen Seiten eines Lichtstrahles, welche ganz etwas analoges darbieten, — verschieden; oder, unsre obigen Linien *a*, *b*, *c* jetzt über ihren Schneidungspunkt hinaus zu gleicher Gröſse verlängert, also sie als drei unter sich rechtwinkliche in ihren Mitten gegenseitig sich schneidende Dimensionen gedacht, so verhält sich diejenige Seite von *c*, welche dem einen Endpunkte der Dimension *a* zugekehrt ist, anders als die entgegengesetzte dem entgegengesetzten Endpunkte von *a*, d. i. a' zugekehrte Seite des nämlichen *c*. Wiederum verhält sich an *a* die dem *c* zugekehrte Seite anders, als die dem entgegengesetzten c' zugekehrte. Daraus folgt wieder, daſs c' sich gegen *a* anders verhält, als *c* sich gegen dasselbe *a* verhielt; denn sonst verhielte sich ja *a* gegen *c*, wie gegen c', und das ist nicht. Also sind es nicht die Seiten einer ganzen Dimension cc', welche sich verschieden von einander verhalten, wie etwa die Rechte und die Linke, sondern es sind die einzelnen Hälften einer jeden, wie die obere und die untere, deren Seiten, die rechte und die linke, mit dieser Differenz sich zeigen; und die untere kehrt nicht die gleichnamige Seite der oberen zu, d. i. gegen dasselbe *a*, also auch nicht beide gegen einander; sondern sie kehrt sie von jener ab, d. i. gegen das a', als das entgegengesetzte von *a*, und die ungleichnamige der oberen zu. Hiedurch bildet sich für die Stellung dieser Differenzen in den Dimensionen ein in sich zurückkehrender Kreis, und

eine Differenz der Richtung in demselben, d. i. der Drehungsrichtung. Wie aber überhaupt Drehung in der Natur, also Axendrehung u. s. f. physikalisch begreiflich werde, oder einen innern, physikalisch nachweislichen Grund erhalte durch solche Differenz in den Seiten zweier in Bezug auf einander polarisirter, unter sich rechtwinklicher, Dimensionen — denn so werden wir jetzt das beschriebene Verhältnifs wohl ohne Einspruch zu nennen haben —, das möchte wohl erheblich genug seyn, um sich die Ansprüche auf eine selbstständigere Entwickelung noch vorzubehalten. Bei den zwei-und-ein-gliedrigen Systemen ist die dritte Dimension in Bezug auf jene Gegensätze in den zwei unter sich polarisirten Dimensionen indifferent; sie ist gleichsam die Rotationsaxe.

Ich unterscheide jetzt für zwei der Dimensionen solcher Systeme ein a und ein entgegengesetztes a', ein c und ein entgegengesetztes c'; das b bleibt ohne Differenz $= b$. So charakterisirt die zwei-und-ein-gliedrigen Systeme, dafs, wenn z. B. eine Fläche wie $\left|\overline{\underline{a : c : \infty b}}\right|$, d. i. die schief angesetzte Endfläche des Hendyoëders gegeben ist, zwar die ihr parallele $\left|\overline{\underline{a' : c' : \infty b}}\right|$ gleicherweise vorkommt, nicht aber die ihr jenseit c gegenüberliegende $\left|\overline{\underline{a' : c : \infty b}}\right|$ oder die dieser parallele $\left|\overline{\underline{a : c' : \infty b}}\right|$; dafs sonach ein Unterschied dieser zweierlei Flächen eintritt, welcher bis zum Verschwinden der zweiten geht, und dafs, wenn die letztere auch vorkommt, sie ganz andre Verhältnisse gegen die übrigen sich bildenden Flächen annimmt, als die erste. Soll ausgedrückt werden, dafs die zweite wegfällt, so wird man schreiben können $\left|\overline{\underline{a : c : \infty b}}\right|$ und o. $\left|\overline{\underline{a' : c : \infty b}}\right|$. Sollte ausführlich geschrieben werden, dafs die parallele Fläche der ersten eben so vorhanden ist, wie jene, und dafs die parallele der zweiten eben so fehlt, wie diese, so würde man zu schreiben haben: $\left|\overline{\underline{a : c : \infty b}}\right|$; $\left|\overline{\underline{a' : c' : \infty b}}\right|$; o. $\left|\overline{\underline{a' : c ; \infty b}}\right|$; o. $\left|\overline{\underline{a : c' : \infty b}}\right|$. Indefs, wo parallele Flächen sich gleichen, bedürfte es im Allgemeinen keiner solchen Wiederholung.

Eben so die paarweise die Endigung eines zwei-und-ein-gliedrigen Sytemes charakterisirenden Zuschärfungsflächen mit schief laufenden Endkanten. Die gemeinste darunter, die gewöhnliche des Augites selbst, ist die $\left|\overline{\underline{2a : b : 2c}}\right|$; sie ist doppelt an jedem Ende; denn b und sein entgegenge-

setztes b gleichen sich; also von denselben a und c aus rechts gegen den einen Endpunkt von b, und links gegen den andern, ist gleiche Bildung von Fläche; auch die parallelen Flächen $\left|\overline{\underline{2a':b:2c'}}\right|$ gelten gleicherweise, und bedürfen deshalb nicht besonderer Nennung. Aber die gegenüberliegenden desselben Endes, nämlich $\left|\overline{\underline{2a':b:2c}}\right|$, und wiederum die diesen parallelen $\left|\overline{\underline{2a:b:2c'}}\right|$ stehen nicht im Gleichgewicht mit den ersten. Und wenn das Zeichen ausdrücken soll, daſs sie fehlen, so wird dies dadurch geschehen können, daſs man schreibt $\left|\overline{\underline{2a:b:2c}}\right|$; o. $\left|\overline{\underline{2a':b:2c}}\right|$. Und so in allen ähnlichen Fällen.

Die Art und das Gesetz, wie beim Tetraëder die Hälfte der Flächen verschwunden sind, welche beim Octaëder in Beziehung auf die drei Grunddimensionen gleichförmig sich bilden, ist ein ganz anderes. Sollte dies Wegfallen der einen vier gegen die übrig bleibenden andern vier Flächen, wie sie das Tetraëder bilden, durch unsre Zeichen geschrieben werden, so würde es, abgesehen von jeder leicht nach Convenienz anzubringenden Abkürzung, der Consequenz des obigen gemäſs, so geschehen können: $\left|\overline{\underline{a:b:c}}\right|$; $\left|\overline{\underline{a':b':c}}\right|$; $\left|\overline{\underline{a:b':c'}}\right|$; $\left|\overline{\underline{a':b:c'}}\right|$; o. $\left|\overline{\underline{a':b':c'}}\right|$; o. $\left|\overline{\underline{a:b:c'}}\right|$; o. $\left|\overline{\underline{a':b:c}}\right|$; o. $\left|\overline{\underline{a:b':c}}\right|$.

Hier fallen nämlich diejenigen Flächen weg, welche den bleibenden parallel sind. Alle drei Dimensionen nehmen gleichen Antheil an der Differenz ihrer *Seiten*. Ja es sind *je drei in Bezug auf einander* (nicht jede in Bezug auf die andern einzeln) *differenzirt* oder *polarisirt*. Die Differenz in einer jeden Dimensions*hälfte* tritt ein in *zwei Queerrichtungen*, oder nach *vier Seiten*, welche nicht den beiden anderen *einzelnen* Dimensionen, sondern den Diagonalen zwischen denselben zugekehrt sind, folglich dem *Ineinanderwirken je dreier*, nicht der Wirkung von einer auf *eine andere*, entsprechen; und die eintretende Differenz der vier Seiten ist so, daſs zwei gegenüberliegende gleichnamig, die zwei zwischenliegenden wieder gleichnamig unter sich, und ungleichnamig den ersten polarisirt sind. Die untern Dimensionshälften im Gegensatz gegen die obern wieder so, daſs die ungleichnamigen einander zugekehrt, folglich das + Paar

der Seiten der oberen Hälfte dem — Paare der Seiten der unteren, und das — Paar der ersteren dem + Paare der letzteren entgegentritt.

Um noch den Fall des Pentagon- oder Schwefelkies-Dodekaëders zu erwähnen, so ist dessen Ausdruck im Zeichen noch einfacher, als der vorige. Er würde durch $\left|\overline{\underline{a:2b:\infty c}}\right|$; $\left|\overline{\underline{2a:c:\infty b}}\right|$; $\left|\overline{\underline{b:2c:\infty a}}\right|$ hinreichend ausgesprochen seyn. Das Gesetz des Wegfallens ist für ihn dieses, daſs, wenn $\left|\overline{\underline{a:2b:\infty c}}\right|$ vorhanden ist, nicht umgekehrt auch das $\left|\overline{\underline{2a:b:\infty c}}\right|$ mit gebildet wird, u. s. f., obgleich $a = b$. Dies braucht aber im Zeichen nicht ausdrücklich gesagt zu werden, da das Zeichen $\left|\overline{\underline{a:2b:\infty c}}\right|$ als solches gar nicht berechtiget, das $\left|\overline{\underline{2a:b:\infty c}}\right|$ u. s. f. stillschweigend mitzuverstehen. Dagegen bleiben mit den vorhandenen Flächen auch zugleich die ihnen parallelen; und die entgegengesetzten Endpunkte einer Dimension, wie a, verhalten sich gegen beide Endpunkte einer andern, wie c, ebenfalls gleich; daher bedarf es im Zeichen keiner Unterscheidung von a und a', b und b', oder c und c'. Das wahre Verhältniſs der in den Seiten der Dimensionen eingetretenen Differenzen aber ist hier dieses: Die vier Seiten einer jeden sind polarisirt, welche den beiden anderen Dimensionen, und zwar jeder einzelnen derselben, zugekehrt sind, eine jede von einem Endpunkt der Dimension zum andern gleichnamig; die gegenüberliegenden, beiden Endpunkten der zweiten Dimension zugekehrten Seiten auch gleichnamig, die zwischenliegenden, den Endpunkten der dritten Dimension zugekehrten Seiten wieder gleichnamig unter sich, und ungleichnamig den vorigen. So, wenn die dem b zugekehrten Seiten von a im +-Zustand sich befinden, so die dem c zugekehrten im —-Zustand. Dann aber die dem a zugekehrten Seiten von b im —, und die dem c zugekehrten im +, endlich die dem a zugekehrten Seiten von c im +, und die dem b zugekehrten Seiten von c im — Zustand; so daſs also die benachbarten Dimensionen sich ihre ungleichnamigen Seiten einander zukehren. Die entgegengesetzten Hälften einer und derselben Dimension kehren sich hier ihre gleichnamigen Seiten zu, aber eben deshalb dem ihnen ungleichnamigen Paare von Seiten der zwischen ihnen sich senkrecht stellenden Queerdimension entgegen.

In den Fällen, wo solches verschiedenes Verhalten in den Seiten der Dimensionen Statt findet, thut man, wie schon oben bemerkt wurde, wohl, auch für das reguläre System die drei verschiedenen Buchstaben a, b, c für

die drei, allerdings unter sich gleichen, rechtwinklichen Dimensionen beizubehalten. Denn außerdem würde sich alles das eben erörterte Wegfallen gewisser Flächen nur auf eine weit lästigere und schwierigere Art ausdrükken lassen. Auſserdem aber, wenn die unter einem und demselben Gesetz der Lage gegen die Dimensionen stehenden Flächen vollzählig vorhanden sind, d. i. in den gewöhnlichen Fällen des regulären Krystallisationssystems wird, da $a = b = c$ ist, auch der Gebrauch des Buchstabens a allein, dreimal wiederholt, anstatt der Unterscheidung von a, b und c schicklich eintreten; und es wird sich dadurch das reguläre System im Zeichen selbst sogleich unmittelbar ankündigen, da für dasselbe ein $\left|\overline{\underline{a:a:a}}\right|$ u. s. f. an die Stelle des sonstigen $\left|\overline{\underline{a:b:c}}\right|$ tritt.

Auch das *viergliedrige* System, in welchem 2 der drei Dimensionen gleich, aber von der dritten verschieden sind, wird sich im Zeichen eben so eigenthümlich und deutlich dadurch ankündigen, daſs, indem $a = b$ die charakteristische Eigenschaft des viergliedrigen Systems ist, in unseren Zeichen auch statt b wiederum a gesetzt, und a also zweimal, d. i. für zwei Dimensionen gebraucht, für die dritte, c, aber am liebsten derselbe Buchstabe c beibehalten wird. Und so wäre also — von den Fällen des unvollzähligen Vorkommens abgesehen — $\left|\overline{\underline{a:a:a}}\right|$ der Ausdruck der Fläche des regulären Octaëders, $\left|\overline{\underline{a:a:c}}\right|$ der des viergliedrigen, und $\left|\overline{\underline{a:b:c}}\right|$ der des Rhomben- oder zwei-und-zwei-kantigen Octaëders; alle drei entsprechend den drei groſsen Abtheilungen von Krystallisationssystemen, welche in unserm ersten Hauptfalle begriffen waren, dem, wo ein gegebenes Verhältniſs dreier auf einander senkrechter Dimensionen die Grundlage des Systemes bildet.

B. Zweiter Hauptfall.

Wir haben noch von dem zweiten Hauptfalle zu sprechen, dem, wo gegen eine Dimension drei andre unter sich gleiche, gemeinschaftlich senkrecht auf der ersten, und in einem bestimmten Verhältniſs zu ihr gegeben sind; welcher zweite Hauptfall diejenigen Systeme begreift, welche ich die sechsgliedrigen, und die drei-und-drei-gliedrigen Systeme nenne.

Wenn wir uns zuförderst ganz an die Analogie der Bezeichnungsweise halten, welche wir im ersten Hauptfalle befolgt haben, so wird es am

natürlichsten seyn, die drei unter sich gleichen Queerdimensionen, jede mit *a*, die Längendimension aber z. B. wieder mit *c* zu bezeichnen; und es scheint anschaulicher, die Bezeichnungen der drei in Einer Ebne liegenden Queerdimensionen neben einander in Eine Linie, den Buchstaben aber, welcher die Längendimension bezeichnet, über die vorigen zu schreiben. So wird sich der Unterschied der beiden Hauptfälle sogleich im Zeichen um so auffallender darlegen. Eine jede der Dimensionslinien erhält nun für die Bezeichnung der Lage einer zu bestimmenden Fläche gegen dieselben den entsprechenden Beisatz der Zahlen.

So wäre dann $\left|\frac{c}{a : a : \infty a}\right|$ der Ausdruck für die Fläche der ersten, oder primären, sechsgliedrigen Doppelpyramide oder Dihexaëders, z. B. für die gewöhnliche Doppelpyramide des Quarzes. Alle Flächen der vertikalen Zone dieser Pyramide hätten unter sich gemein die Gleichheit der beiden ersten *a*, und das Zeichen des Unendlichen beim dritten. Die oberen, stumpfwinklicheren Pyramiden dieser Zone bekämen ein erhöhtes Verhältnifs der beiden ersteren *a* gegen das *c*, wie z. B. $\left|\frac{c}{2a : 2a : \infty a}\right|$; die schärferen, unteren umgekehrt ein erhöhtes Verhältnifs in *c* gegen beide erstere *a*, wie z. B. eine dem Quarz insbesondere zukommende Fläche $\left|\frac{5c}{a : a : \infty a}\right|$. Die Seitenfläche der ersten, d. i. der in diese vertikale Zone fallenden regulären sechsseitigen Säule würde bezeichnet werden durch $\left|\frac{\infty c}{a : a : \infty a}\right|$, da sie sowohl dem dritten *a* als dem *c* parallel ist. Die Endfläche der Säule würde zu bezeichnen seyn mit $\left|\frac{c}{\infty a : \infty a : \infty a}\right|$; denn sie ist senkrecht auf *c* und parallel allen drei Queerdimensionen. Die Seitenfläche der zweiten regulären sechsseitigen Säule, welche auf einer der Queerdimensionen *a* senkrecht steht, würde zum Ausdruck erhalten: $\left|\frac{\infty c}{a : \frac{1}{2}a : a}\right| = \left|\frac{\infty c}{2a : a : 2a}\right|$; denn während sie mit *c* parallel ist, schneidet sie von der Queerdimension, auf welcher sie senkrecht steht (vom Mittelpunkt aus gerechnet), halb so viel ab, als von jeder der beiden andern.

Nach derselben Methode werden auch alle übrige Flächen sich bezeichnen lassen. Die Rhombenfläche *s* beim Quarz z. B. wird das Zeichen erhalten: $\left|\frac{c}{a : \frac{1}{2}a : a}\right| = \left|\frac{2c}{2a : a : 2a}\right|$; aber es scheint bequemer, das erstere Zeichen vorzuziehen. Der Ausdruck verräth in beiden Fällen, daſs die Fläche eine Lage hat, zufolge welcher sie als Zuspitzungsfläche auf die Seitenfläche der zweiten sechsseitigen Säule gerad aufgesetzt seyn, d. i. in die vertikale Zone der zweiten sechsseitigen Säule fallen würde. Alle Flächen dieser Zone nämlich würden das nämliche Verhältniſs der drei Queerdimensionen unter sich, $a : \frac{1}{2}a : a$, oder $2a : a : 2a$ mit einander gemein haben.

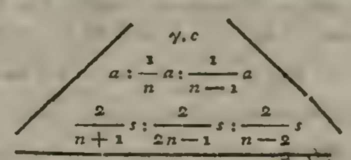
Die Flächen aus der Kantenzone unsers primären Dihexaëders erhielten in ihren Ausdrücken sämmtlich gemein die Gleichheit des Coëfficienten an *c* mit dem Coëfficienten des einen *a*; denn eine Linie vom Endpunkte von *c* nach dem Endpunkte eines *a* gezogen, ist die Lage der Endkante des Dihexaëders, d. i. der Axe der erwähnten Zone; und diese Linie fällt in jede Fläche, welche dieser Zone angehört. Die Rhombenfläche *s* fällt in zwei solche Kantenzonen; das drückt das Zeichen $\left|\frac{c}{a : \frac{1}{2}a : a}\right|$ sehr deutlich aus.

Für die oben beschriebene Trapezfläche *u* des Quarzes, oder jede ähnlich liegende Fläche eines sechsgliedrigen Systemes, d. i. für die Fläche mit 7fachem Cosinus in der Kantenzone des Dihexaëders (vgl. oben S. 304.), wäre der consequente Ausdruck: $\left|\frac{c}{a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{3}a}\right| = \left|\frac{3c}{3a : \frac{3}{4}a : a}\right| = \left|\frac{12c}{12a : 3a : 4a}\right|$, der für die Trapezfläche *x* beim Quarz, d. i. der mit dem 11fachen Cosinus in der Kantenzone wäre $\left|\frac{c}{a : \frac{1}{6}a : \frac{1}{5}a}\right| = \left|\frac{5c}{5a : \frac{5}{6}a : a}\right| = \left|\frac{30c}{30a : 5a : 6a}\right|$ *). Die Formel ist sehr einfach, welche die Vervielfachung des Cosinus für die Neigung der bezeichneten Fläche gegen den Aufriſs der Kantenzone, bei gleichem

*) Im Allgemeinen wird es, wie sich bald näher ergeben wird, seine Bequemlichkeit haben, unter den mehreren gleichbedeutenden Zeichen, wie die obigen sind, jederzeit entweder denen den Vorzug zu geben, welche die Längendimension *c*, oder denen, welche die erste Queerdimension *a* in der Einheit nehmen. In den obigen Fällen führen beide Regeln auf dasselbe Resultat.

gleichem Sinus mit der Fläche des Dihexaëders ausdrückt. Es sey y der Coëfficient, welchen c und eine der Dimensionen a im Zeichen gemein haben, dividirt durch den Coëfficienten, nicht des nächsten, sondern des folgenden dritten a, so ist die Zahl der Vervielfachung des Cosinus für die bezeichnete Fläche in der Kantenzone, $= 2y + 1$.

Es ist aber ferner dienlich, in der Ebne des regulären Sechsecks, dessen Diagonalen die drei Queerdimensionen a sind, auch die drei der bezeichneten Fläche angehörigen Punkte zu kennen, welche in den drei kleinsten Durchmessern des Sechsecks liegen. Während also die gröſseren Halbmesser des Sechsecks a heiſsen, so nennen wir die kleineren, d. i. die aus dem Mittelpunkt nach den Mitten der Seiten gezogenen, s. Folgendes Schema wird dann die in den sämmtlichen Queerrichtungen a und s einerzu bezeichnenden Fläche zugehörigen Werthe (d. i. Abstände vom Mittelpunkt) allgemein darstellen, wobei wir unter den drei Dimensionen a die, in welcher der Fläche das gröſseste Stück correspondirt, in der Einheit nehmen, die, in welcher ihr das kleinste Stück zukommt, mit $\frac{1}{n}a$ bezeichnen, oder den Coëfficienten in der zweiten dieser Dimensionen $\frac{1}{n}$, den zu c gehörigen Coëfficienten aber γ nennen. Es läſst sich aus der Natur des regulären Sechsecks leicht deduciren *), daſs das Schema demnach dieses wird:



*) Es sey in Fig. 12. der zu der vorhergehenden Abhandlung gehörigen Kupfertafel $ABDA$ u. s. f. der Umkreis des regulären Sechsecks, in dessen Mittelpunkt C die Langenaxe des Systemes, d. i. c senkrecht auf der Ebne des Sechsecks steht. Die Halbmesser der Queer dimensionen sind CA, CB, CD u. s. f., jede dieser Linien $= a$

Es sey $Ci = \frac{1}{n} CB = \frac{1}{n} a$, so findet sich

1) für Ce, welches gesetzt ist $\angle CD$, der Werth aus der Proportion

$Ce : Ci = AB : Bi$, d. i.

$Ce : \frac{1}{n} a = a : \frac{n-1}{n} a$, also

$Ce = \frac{1}{n-1} a$, wie im obigen Schema;

Hier ist das erste der in der unteren Reihe des Zeichens geschriebene s dasjenige, welches zwischen dem ersten und dem zweiten a inne liegt, oder auf dem dritten, d. i. dem $\frac{1}{n-1}a$ senkrecht steht; das zweite s ist das zwischen dem zweiten und dritten a liegende, oder auf dem ersten a senkrecht stehende, und eben so das dritte s das jenseit des dritten a folgende, oder auf dem zweiten a senkrecht stehende *).

Für den gewöhnlichen Gebrauch, wo es bloſs um ein kurzes und präcises Zeichen der Fläche zu thun ist, wird dieses weitläuftige Zeichen nicht dienen, sondern das früher erörterte kürzere. Dagegen hat für das gesammte Studium der geometrischen Eigenschaften einer bezeichneten Fläche und ihres Werthes im Systeme ein solches ausführlicheres Zeichen sehr vielfachen Werth, und ist in dieser Beziehung gar sehr zu empfehlen.

2) für Co in der Richtung des kleineren Halbmessers des Sechsecks $= Cg = Ch = Ck = s$;

$$Co : og = 2Ci : iB = \frac{2}{n}a : \frac{n-1}{n}a = 2 : n-1$$

$$Co : Cg = 2Ci : 2Ci + iB = 2 : n+1, \text{ also}$$

$$Co = \frac{2}{n+1}Cg = \frac{2}{n+1}s, \text{ wie im Schema;}$$

3) für Cu in der zweiten Dimension s, welche bis G verlängert wird, wo das verlängerte AB sie schneidet, so daſs $CG = 2Ch = 2s$, so wie $AG = 2AB = 2a$;

$$Cu : uG = Co : AG = \frac{1}{n-1}a : 2a = 1 : 2n-2$$

$$Cu : CG = 1 : 2n-2+1 = 1 : 2n-1, \text{ also}$$

$$Cu = \frac{1}{2n-1}CG = \frac{1}{2n-1}2s = \frac{2}{2n-1}s, \text{ wie im Schema;}$$

4) für CF in der dritten Dimension s, welche so weit verlängert ist, bis sie von der verlängerten Linie $Aoiue$ geschnitten wird;

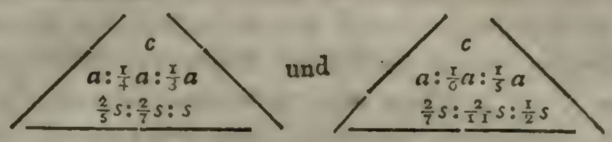
$$CF : Ce = AD : De, \text{ d. i.}$$

$$CF : \frac{1}{n-1}a = 2s : \left(1-\frac{1}{n-1}\right)a = 2s : \frac{n-2}{n-1}a, \text{ also}$$

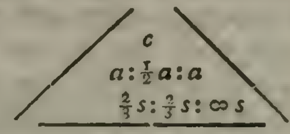
$$CF = \frac{2}{n-2}s, \text{ wie im oben gegebnen Schema.}$$

*) Die drei Gröſsen a, $\frac{1}{n}a$, $\frac{1}{n-1}a$ entsprechen in unsrer Figur 12. den Linien CA, Ci und Ce; so wie die drei Gröſsen $\frac{2}{n+1}s$, $\frac{2}{2n-1}s$, $\frac{2}{n-2}s$ den Linien Co, Cu und CF—

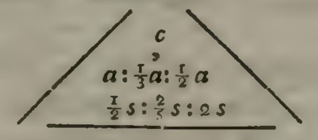
Die ausführlicheren Ausdrücke der beiden Trapezflächen des Quarzes *u* und *x* werden alsdann



Der der Rhombenfläche *s* beim Quarz wird



Aus diesen ausführlicheren Zeichen entwickelt sich weiter für den besonderen Gebrauch bei den rhomboëdrischen Systemen das bequemste und ausdruckvollste Zeichen für diejenigen Flächen, welche einen Drei-und-Drei-Kantner *) geben, wie z. B. beim Kalkspath diejenige, welche den Körper giebt, dem Haüy den Namen *métastatique* gegeben hat (vgl. Haüy's Lehrbuch d. Min. Taf. XXIII. Fig. 4.). Auf das sechsgliedrige System zurückgeführt, dessen Längendimension der Axe des Kalkspath-Rhomboëders, und dessen drei gleiche Queerdimensionen den Linien am Kalkspath-Rhomboëder aus den Mitten der Lateralkanten in die gegenüberliegenden gezogen, correspondirt, wird der ausführlichere Ausdruck der ebengenannten Fläche dieser:



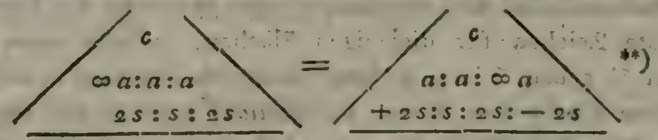
und man wird an ihm eine nahe Verwandtschaft mit den eben gegebenen für die Flächen *u* und *x* beim Quarz nicht verkennen.

In der That gehört diese unsre Fläche, im 6gliedrigen System genommen, ebenfalls, wie die ebengenannten des Quarzes, in eine Kantenzone des Dihexaëders; das liest man im Zeichen schon aus dem Verhältniſs *c*, *a*; welche zwei Gröſsen anzeigen, daſs die bezeichnete Fläche parallel ist einer Linie, die aus 1 *c* nach 1 *a* gezogen wird, d. i. einer Endkante des Dihexaë-

*) Vgl. meine Abh. in dem vorigen Bande der Abh. d. physik. Klasse, S. 331.

ders; und dies ist die Axe unsrer Kantenzone. Jede Fläche aber, die der Axe einer gegebnen Zone parallel ist, gehört in diese Zone.

Unsre Kalkspathfläche wäre also im 6gliedrigen Systeme ebenfalls eine Trapezfläche, wie u und x beim Quarz, und würde da zwischen die Rhombenfläche (s) und u fallen; sie würde nämlich in der Kantenzone des Dihexaëders die Fläche mit 5fachem Cosinus seyn, während die Rhombenfläche die mit dreifachem, u die mit 7fachem, und x die mit 11fachem ist. Auch dies läſst sich in unserm Zeichen, und zwar in dem Werthe des zweiten s leicht lesen, dessen Coëfficient $\frac{2}{5}$, mit dem analogen $\frac{2}{3}$ im Zeichen der Rhombenfläche, dem $\frac{2}{7}$ im Zeichen von u, und $\frac{2}{11}$ im Zeichen von x im Nenner der Brüche die Zahl der Vervielfachung des Cosinus angiebt, während der Zähler in allen gleich ist *). Ja vergleicht man das ausführliche Zeichen der Fläche des Dihexaëders selbst, welches dieses ist:



mit den übrigen, so findet sich eben dieser Zähler 2 als der Coëfficient eben desjenigen s, welches auf der in der Einheit genommenen Dimension a senkrecht steht.

Die Haupteigenschaften eines Drei-und-Drei-Kantners als solchen aber beruhen auf den zweierlei Neigungen seiner Endkanten gegen die Axe, so wie auf der Natur desjenigen Rhomboëders, dessen Lateralkanten mit den seinigen coïncidiren.

In unserm ausführlicheren Zeichen der Fläche sind nun die Gesetze für die Neigungen der zweierlei Endkanten gegen die Axe unmittelbar zu lesen. Denn während $\gamma.c$ den gemeinschaftlichen Cosinus für beide diese

*) Jenes zweite s liegt nämlich in der Richtung des Sinus der Neigung der bezeichneten Fläche in der Kantenzone, während der Cosinus dieser Neigung das Perpendikel aus dem Mittelpunkt auf die Endkante ist, die vom Endpunkt von c nach der des ersten a gezogen wird. Bei gleichem Cosinus = diesem Perpendikel nun hat die Dihexaëderfläche selbst zum Sinus $2s$, die Rhombenfläche $\frac{2}{3}s$, die übrigen genannten $\frac{2}{5}s$, $\frac{2}{7}s$, $\frac{2}{11}s$; es sind also, verglichen mit der Neigung der Dihexaëderfläche gegen den Aufriſs der Zone, die eben genannten Flächen die mit $\frac{1}{3}$-, $\frac{1}{5}$-, $\frac{1}{7}$-, $\frac{1}{11}$-fachem Sinus, d. i. bei gleichem Sinus die mit 3-, 5-, 7-, 11-fachem Cosinus.

**) In dem letzteren Zeichen wird das letzte s eine negative Gröſse, darum tritt das ihr entgegengesetzte s mit dem positiven Werthe in dem Zeichen auf.

Neigungen ausdrückt, so drückt jederzeit unser **erstes** s, d. i. $\frac{2}{n+1}s$ den Sinus der **schärferen**, unser **zweites** s aber, d. i. $\frac{2}{2n-1}s$ den Sinus der **stumpferen** Endkante aus. In dem obigen Beispiele der bekannten Kalkspathfläche ist für die Neigung der schärferen Endkante gegen die Axe $sin : cos = \frac{1}{2}s : c = s : 2c$, für die Neigung der stumpferen, $sin : cos = \frac{2}{5}s : c = 2s : 5c$ u. s. f. Oder man denke sich an einem solchen Drei-und-Drei-Kantner (wie Taf. XXIII. Fig. 4. des Haüy'schen Werkes) einen Queerschnitt, durch die drei oberen oder die drei unteren Lateralecken gelegt, so wird dies ein Sechseck mit abwechselnd stumpferen und schärferen Winkeln (oder ein **drei-und-drei-winkliches** Sechseck) seyn; und die Linie aus dem Mittelpunkt desselben in den schärferen Winkel gezogen wird unserm ersten s, die in den stumpferen unserm zweiten s entsprechen *). Für die Bestimmung der Natur eines Drei-und-Drei-Kantners

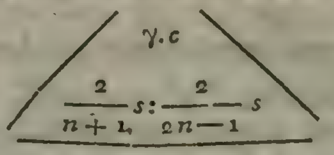
*) Unsre Queerdimensionen a fallen am Drei-und-Drei-Kantner in die Linien aus dem Mittelpunkt des Körpers nach den Mitten der Lateralkanten in u. s. f. (Fig. 4. Taf. XXIII. bei Haüy), folglich unsre Linien s in die Richtungen der Sinusse der Neigungen der Endkanten gegen die Axe.

Aber von den dreierlei Werthen einer und derselben Fläche eines solchen Körpers in den dreierlei Dimensionen s können es nur die **beiden kleinsten** seyn, welche in unserm drei-und-drei-winklichen Queerschnitt des Körpers einem gröfseren und einem benachbarten kleineren der zweierlei Halbmesser dieses Sechsecks entsprechen; denn die Seite des Sechsecks über die eine oder die andre Ecke hinaus verlängert, bis sie die Verlängerung der dritten Dimension s trifft, bestimmt offenbar in dieser dritten Dimension s einen gröfseren Werth für die Fläche, welcher eben diese Seite des Sechsecks angehört, als jeder einzelne Halbmesser des Sechsecks ist.

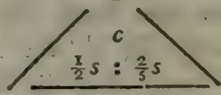
In unserm Zeichen selbst aber ist offenbar, dafs unser drittes s das gröfseste unter den dreien ist, da nothwendig $n-2 < 2n-1 < n+1$, so lange n positiv genommen wird. Also ist unser drittes s, welches, bei gleichem Zähler des Coëfficienten mit den beiden andern, $n-2$ zum Divisor hat, von den zweien ausgeschlossen, welche den zweierlei Halbmessern unsers drei-und-drei-winklichen Queerschnitts entsprechen können.

Aber auch dafs unser erstes s jederzeit dem Sinus der schärferen Endkante, das zweite aber dem Sinus der stumpferen entspricht, oder dafs unser erstes s jederzeit gröfser ist, als das zweite, geht aus der Annahme hervor, dafs unser erstes a im Zeichen das gröfseste der drei a, also $1 > \frac{1}{n-1}$, d. i. $n-1 > 1$, folglich $n > 2$. Denn nun wird $2n-1 > n+1$ (oder $2n > n+2$), folglich unser zweites s, welches (bei gleichem Dividendus) $2n-1$ zum Divisor hat, kleiner als das erste mit dem Divisor $n+1$.

könnte man daher im Zeichen sich begnügen, aus dem ausführlicheren die angegebenen Theile allein herauszunehmen und es in dieses abzukürzen:



welches im obigen concreten Fall der genannten Kalkspathfläche geben würde



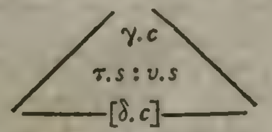
Allein wenn gleich dieses Zeichen genügt, so wird es doch sehr vortheilhaft und im Gebrauch bei der Berechnung und weiteren Charakterisirung des Drei-und-Drei-Kantners sehr vortheilhaft seyn, wenn man noch eine Gröſse beifügt, nämlich die des dritten Theils der Axe des eingeschlossenen Rhomboëders (d. i. desjenigen, dessen Lateralkanten mit denen des Drei-und-Drei-Kantners coïncidiren, wie es z. B. in der angeführten Fig. 4. in den letzteren eingezeichnet ist). Dieser dritte Theil der Axe des eingeschlossenen Rhomboëders ist bekanntlich gleich dem Stück derselben, welches zwischen den beiden parallelen Queerschnitten des Rhomboëders, den einen durch die drei oberen, den andern durch die drei unteren Lateralecken gelegt, enthalten ist, so wie demjenigen, welches jeder dieser beiden Schnitte nach oben oder nach unten von der Axe des Rhomboëders abschneidet.

Man denke sich also nochmals, wie oben, einen Queerschnitt des Drei-und-Drei-Kantners (a. a. O. Fig. 4.) durch die drei oberen Lateralecken gelegt, und den durch denselben abgeschnittnen Theil der Axe des Drei-und-Drei-Kantners $\gamma.c$ genannt, so wird im Verhältniſs gegen dieses $\gamma.c$ noch der Werth des dritten Theils der Axe des eingeschloſsnen Rhomboëders in unserm Zeichen mit Vortheil angegeben werden *). Es heiſse dieser dritte Theil $\delta.c$; es heiſse ferner unser obiges $\frac{2}{n+1}s$, $\tau.s$, und das obige $\frac{2}{2n-1}s$

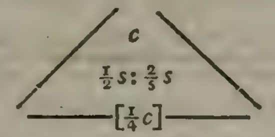
*) Das in den Drei-und-Drei-Kantner eingeschlossene Rhomboëder ist alsdann vollständig construirt; denn jener dritte Theil seiner Axe ist der Cosinus der Neigung seiner Endkante gegen dieselbe, wenn der Sinus jenes im Zeichen befindliche $\frac{2}{n+1}s$ ist.

jetzt $v.s$ *); so ist, wie sich durch eine leichte Construction ergiebt **), $\gamma : \delta = v : \tau - v$, also $\delta = \frac{\gamma(\tau - v)}{v}$

Man kann dieses $\delta.c$ am schicklichsten so in das Zeichen setzen:



so wird es durch die analoge Stellung, wie in dem bezeichneten Drei-und-Drei-Kantner selbst, die Anschauung aller Hauptverhältnisse desselben sehr zu vergegenwärtigen dienen; und wir schreiben demnach unsre obige Kalkspathfläche, oder die Haüy'sche $\overset{2}{D}$, so:



und lesen daraus aufser den Neigungen der zweierlei Endkanten des bezeichneten Körpers gegen die Axe auch noch: dafs das eingezeichnete Rhomboëder für die Neigung seiner Endkante gegen die Axe hat, *sin* : *cos* = $\frac{1}{2}s : \frac{1}{4}c = 2s : c$, wie das Hauptrhomboëder des Systemes selbst.

Es entwickeln sich aus den schon angeführten im Zeichen sichtbaren Eigenschaften des bezeichneten Körpers noch manche andre als gleich leicht in demselben lesbar, so z. B., dafs die gerade Abstumpfungsfläche der schärferen Endkante des bezeichneten Drei-und-Drei-Kantners die Fläche eines Rhomboëders ist, dessen Neigung der Fläche gegen die Axe hat, *sin* : *cos* = $\frac{1}{2}s : c = s : 2c$; die gerade Abstumpfungsfläche der stumpferen Endkante

*) Diese neue Benennung könnte unnöthig scheinen; allein man erinnere sich, dafs in dem abgekürzten concreten Zeichen der Werth von n gar nicht direct genannt wird.

**) Man darf nämlich nur beide Queerschnitte des Drei-und-Drei-Kantners, sowohl den durch die oberen, als den durch die unteren Lateralecken gehenden, legen, und in einem durch zwei entgegengesetzte Endkanten gelegten Längenschnitt die ähnlichen Dreiecke vergleichen, deren Seiten sich verhalten wie $v.s$ und $\tau.s$, welches die einen Seiten derselben sind, während die andern in der Richtung der stumpfen Endkante des Drei-und-Drei-Kantners liegen (und beim gröfseren Dreieck diese Kante ganz, beim kleineren ein proportionales Stück derselben ist), die dritten aber in der Richtung der Axe, so dafs sie für das kleinere $\gamma.c$ ist, und für das gröfsere $(\gamma + \delta)c$; so ergiebt sich das obige.

dagegen die eines Rhomboëders, dessen Fläche gegen die Axe geneigt ist mit $sin : cos = \frac{2}{5}s : c = 2s : 5c$; u. s. w. Alle Vortheile aber zu entwikkeln, welche aus dieser Bezeichnungsweise geschöpft werden können, gehört nicht hieher; bei der specielleren Bearbeitung der Gegenstände ergeben sie sich um so reichlicher.

Um nun eine jede solche Fläche auf einen einzigmöglichen Ausdruck dieser Art zurückzuführen, verfahren wir am kürzesten, wenn wir uns zum Gesetz machen, jedesmal $\gamma = 1$ zu setzen, wie im obigen geschehen ist.

So viel über die vortheilhafteste Bezeichnung der Drei-und-Drei-Kantner insbesondre.

Auch daſs die unter demselben Zeichen begriffenen Flächen nicht vollzählich, sondern zur Hälfte vorkommen, und zur Hälfte wegfallen, läſst sich im Zeichen selbst ohne Schwierigkeit ausdrücken. Wir haben bei unserm zweiten Hauptfall zweierlei Gesetze für ein solches Wegfallen der Hälfte von Flächen. Das eine ist das oben erwähnte und in meiner Abhandlung „über den eigenthümlichen Gang des Krystallisationssystemes beim Quarz u. s. f." im Magazin der hiesigen Gesellschaft naturforschender Freunde, VII. Jahrgang, 3s Heft, ausführlicher erörterte beim Quarz, wo nämlich an einem Individuum entweder bloſs die rechts herabgehenden oder bloſs die links herabgehenden Trapezflächen vorkommen. Das Zeichen wird dies leicht ausdrücken können, z. B. wenn von der obigen Trapezfläche u die Rede ist, so: $\left|\frac{c}{a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{3}a}\right|$; o. $\left|\frac{c}{\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a : a}\right|$. Wäre von der andern oben genannten Trapezfläche x des Quarzes die Rede, so: $\left|\frac{c}{a : \frac{1}{6}a : \frac{1}{5}a}\right|$; o. $\left|\frac{c}{\frac{1}{5}a : \frac{1}{6}a : a}\right|$.

Aber was wäre das Physikalische der Sache? Ohnläugbar folgendes: Die Längendimension c ist differenzirt oder polarisirt in Beziehung auf jede einzelne Queerdimension a, und auf eine auf dieser senkrechte s, so wie diese gegenseitig gegen jene. Wenn die dem bestimmten s zugekehrten

kehrten Seiten der Dimensionshälften *c* und *a* im positiven Zustand sind, so sind die von diesem *s* abgekehrten, oder dem entgegengesetzten *s'* zugekehrten Seiten derselben Dimensionshälften *c* und *a* im negativen Zustand *). Je zwei benachbarte *a* (oder *s*) kehren ihre in Gemeinschaft mit demselben *c* ungleichnamig polarisirten Seiten einander zu; die gleichnamig polarisirten von einander ab. Daraus ergiebt sich abermals jenes Phänomen von Drehung. Auf derselben, z. B. nach oben gekehrten, Seite des Sechsecks, welches den Queerschnitt des Dihexaëders darstellt, oder dessen Diagonalen die gleichen Queerdimensionen *a* sind, ist an diesen Queerdimensionen *a* eine sich in einen Kreis schliefsende Folge der entgegengesetzten Zustände, so dafs + gegen — gekehrt ist u. s. f. Aber auch wieder die zwei entgegengesetzten Seiten des Sechsecks **) sind in umgekehrtem Zustand; und die untere hat die umgekehrte Folge der nämlichen Zustände, oder die umgekehrte Drehung. Ein und dasselbe *s* hat vier differenzirte Seiten, gegen diejenigen Endkanten des Dihexaëders gekehrt, welche in der auf seiner Richtung senkrechten Ebne liegen. Diese seine vier Seiten sind nicht rechtwinklich auf einander (wie die des polarisirten Lichtes), sondern sie schneiden sich unter dem Winkel, welchen die jenseit der Axe sich gegenüberliegenden Endkanten unter sich bilden. Sie sind gemeinschaftlich dem *a* und *c*, *a'* und *c*, *a* und *c'*, *a'* und *c'* zugekehrt, so wie die entsprechende Seite des *a* gemeinschaftlich dem *c* und *s*, und die des *c* gemeinschaftlich dem *a* und *s* u. s. f. zugekehrt ist. Daher der nach dem Verhältnifs von *a* zu *c* sich richtende Winkel, welchen die 4 Seiten eines *s* unter sich bilden. Zwei gegenüberliegende, eine nach unten, eine nach oben gekehrte sind in gleichnamigem, je zwei benachbarte in verschiedenem, oder umgekehrtem Zustand.

An *a* erscheinen abermals 4 Seiten mit ähnlicher Lage ihrer zweierlei Zustände gegen einander; die gegenüberliegenden gleichnamig, die benachbarten entgegengesetzt. Sie sind abermals nicht rechtwinklich unter sich, sondern bilden einen variabeln Winkel, nach Verschiedenheit des Verhältnisses von *a* und *c* gegen *s* oder nach Verschiedenheit der Trapezfläche.

*) Positiv heifse hier derjenige Zustand, welcher die Bildung einer Fläche begünstiget, negativ derjenige, welcher der Bildung derselben entgegen ist.

**) Es ist hier nicht von Seiten einer Figur im gewöhnlichen Sinne des Wortes die Rede, sondern von dem Gegensatz, wie der unteren und oberen Seite, welchen eine jede Ebne in sich hat.

Und wie verhält sich die Längendimension c? Sie ist nach sechs Seiten hin differenzirt, mit 12 abwechselnd sich folgenden Polen. Die Folge der Pole gleichsam in der Peripherie der Längendimension auf einander ist gerade dieselbe, wie die vorhin erwähnte in der Ebne des Queerschnittes, einer eben solchen Drehung entsprechend. So wie die abwechselnden Pole gleichnamig sind, so sind es eben deshalb auch die gegenüberliegenden; und wenn man die gegenüberliegenden gleichnamigen sämmtlich durch Linien verbindet, welche den einzelnen differenten Seiten oder Queerrichtungen der Dimension c entsprechen, so schneiden sich je drei solche Linien immer unter 60°. Aber diese Seiten selbst sind zwischen jedes a und sein s schräg gerichtet, und die Stellung verändert sich vom ersten gegen das zweite hinwärts nach der Verschiedenheit der Trapezflächen, welche in jenem Gegensatz ihres Vorkommens gefunden werden. So erfährt die Lage dieser 12 Seiten, immer 6 positiver mit 6 negativen wechselnd, selbst eine Drehung in der Ebne des Queerschnitts, indem sie von Glied gegen Glied fortrückt; oder wenn wir sie für jedes Glied beharrlich denken, so wiederholt sich die Differenzirung nach 12 Seiten in Beziehung auf die Längendimension so viele Male, als Glieder mit dem genannten Gegensatze ihrer Lage vorhanden sind.

Die entgegengesetzten Dimensionshälften c und c' sind in umgekehrten Zuständen, d. i. eine Seite des c, entsprechend einer Fläche $\boxed{a : \frac{2}{2n-1} s : c}$ *), zwar gleichnamig mit einer Seite des c', entsprechend einer Fläche $\boxed{a' : \frac{2}{2n-1} s : c'}$, aber ungleichnamig derjenigen Seite des c', welche einer Fläche $\boxed{a' : \frac{2}{2n-1} s' : c'}$ entsprechen würde. Diese letztere Fläche wäre die parallele der ersten; und diese ist nicht vorhanden, wenn jene vorhanden ist, oder wird durch die Structurgesetze negirt, wenn jene affirmirt oder gesetzt wird **).

*) Wie zu dem gegenwärtigen Behuf das ausführliche allgemeine Zeichen der Fläche, vergl. S. 321., in das obige abgekürzt werden kann, wird sich, wie ich hoffe, von selbst verständlich machen, da letztres die drei Glieder aus dem ausführlichen Zeichen entlehnt, welche hier in Betracht kommen, nämlich das erste a, das darauf senkrechte s, und c.

**) Vgl. meine oben angeführte Abh. im Mag. d. Ges. nat. Fr. zu Berlin, VII. Jahrg. 3. Hft. S. 168.

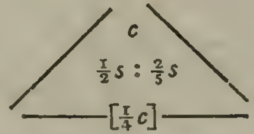
Das sind, wie mir scheint, die Folgerungen, zu welchen das beobachtete Gesetz für das alternative Vorkommen der Trapezflächen am Quarz unausbleiblich führt, und durch welche diese constante Erscheinung ihre physikalische Bedeutsamkeit erhält. Aber es bleibt uns noch der weit häufigere, eine weit gröſsere Reihe gesetzlicher Erscheinungen regelnde Fall zu entwickeln übrig, der, durch welchen das 6gliedrige System, indem es auch die Hälfte seiner Flächen verschwinden läſst, in das 3-und-3-gliedrige übergeht und rhomboëdrisch wird. Der Uebergang aus dem Dihexaëder in sein Rhomboëder, dessen Flächen gleiche Lage behalten, wie am Dihexaëder selbst *), lieſse sich nach der obigen Zeichensprache am kürzesten ausdrücken durch $\left|\frac{c}{a:a:\infty a}\right|$; o. $\left|\frac{c}{a':a':\infty a}\right|$; allenfalls möchte man, um das Bleiben und Wegfallen paralleler Flächen auszudrücken, noch hinzusetzen: $\left|\frac{c'}{a':a':\infty a}\right|$; o. $\left|\frac{c'_{,}}{a:a:\infty a}\right|$. So würde ein Rhomboëder mit denselben Winkeln, je nachdem es erster oder zweiter Ordnung wäre **) (ein bestimmtes oder dessen Gegenrhomboëder ***)), zu bezeichnen seyn mit $\left|\frac{c}{2a:2a:\infty a}\right|$; o.... oder $\left|\frac{\bar{c}}{2a':2a':\infty a}\right|$; o.... Letzteres, und nicht ersteres, wäre z. B. das Zeichen für die gewöhnliche Fläche *g* (nach den Haüyschen Figuren) am Kalkspath, d. i. die Fläche, welche ich die des ersten stumpferen Rhomboëders nenne, und welche allerdings zweiter, nicht erster Ordnung ist. Der Einsichtige sieht schon, wie eine solche Regel für die Bezeichnung der Flächen beim rhomboëdrischen System sich weiter benutzen läſst, und wie damit die gröſseste Kürze zu verbinden ist. Sie findet auch sehr leichte Anwendung auf die Bezeichnung der Flächen der Drei-und-

*) Vgl. meine Abh. im vorigen Bande d. Abh. d. physik. Kl. S. 327.

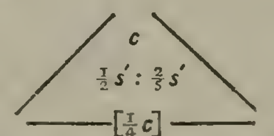
**) Erster Ordnung nenne ich diejenigen, deren Flächen an einer und derselben Seite der Axe nach dem nämlichen Ende derselben geneigt sind, wie das Hauptrhomboëder des Systemes; zweiter Ordnung diejenigen, deren Flächen nach dem entgegengesetzten Ende sich neigen.

***) So nenne ich das Haüy'sche Rhomboëder $\overset{\frac{1}{2}}{e}$ das Gegenrhomboëder des primitiven *P*, u. s. f.

Drei-Kantner. Ein jedes solches Dodekaëder muſs unterschieden werden von seinem Gegen-Dodekaëder, so wie das Rhomboëder seiner Lateralkanten von dem Gegen-Rhomboëder desselben, dessen Lateralkanten mit den Lateralkanten jenes Gegen-Dodekaëders coïncidiren. Ein jeder Drei-und-Drei-Kantner, dessen eingeschlossenes, oder durch die Lateralkanten bestimmtes Rhomboëder erster Ordnung ist, wird die Buchstaben *s* in seinem Zeichen ohne Accent, ein jeder, dessen eingeschloſsnes Rhomboëder zweiter Ordnung ist, wird dieselben mit dem Accent, als *s'*, erhalten. Und während also das Zeichen der bekannten Haüy'schen Kalkspathfläche $\overset{2}{D}$ das oben angegebene bleibt =



so wird die Fläche seines Gegendodekaëders, d. i. des $\overset{\text{I}}{D}$, bezogen auf das Rhomboëder $\overset{\frac{1}{2}}{e}$, dieses seyn:



Noch bleibt uns die Art und Weise, wie bei Bildung des Rhomboëders die Polarisirung der Seiten der Dimensionslinien sich verhält, zu beleuchten. Hier findet sich die Längendimension *c* polarisirt in Bezug auf zwei gleiche Queerdimensionen *a*, oder, wenn man will, statt dessen in Bezug auf die zwischen ihnen liegende *s* direct. Sie ist nach drei Richtungen hin differenzirt, in 6 Seiten, von denen je zwei gegenüberliegende, so wie je zwei benachbarte im ungleichnamigen Zustande sind, die abwechselnden im gleichnamigen. Diese Seiten sind den Linien *s* zugekehrt, d. i. der Mitte zwischen je zweien *a*. Die entgegengesetzte Dimensionshälfte *c'* kehrt ihre ungleichnamigen Seiten gegen die der ersteren; und es ist also wieder in einer jeden Seite der ganzen Dimension der polarische Gegensatz der Enden, wie in der magnetischen Linie, und sechs solche polarische Gegensätze mit Umkehrungen der Pole wechselnd neben einander, in einer und derselben Längendimension, entsprechend ihren 6 Seiten, oder welches dasselbe ist, den 3 Queerdimensionen *s*; diese

um

aber bilden um den Mittelpunkt einen sechsstrahligen Stern, oder schneiden sich einander alle unter 60 Grad, und von ihnen befindet sich jede wiederum im Gegensatz ihrer ungleichnamigen Enden oder Pole. Ein solches harmonisch verschlungenes System von Polarisirungen, eine jede der magnetischen vergleichbar, bietet im Rhomboëder die Eine Linie, die Axe des Rhomboëders, dar.

Ziehen wir den polarischen Zustand der Seiten einer jeden der zwei Queerdimensionen *a* in Betracht, gegen welche die Polarisirung der Längendimension *c* gemeinschaftlich sich richtet, so ist dieser Züstand ähnlich dem der *a* und *s* im vorhin erwogenen Falle des Quarzes. Jede ist polarisirt in 4 Seiten; diese sind zugekehrt, die eine dem zweiten *a* und *c* gemeinschaftlich, die andere dem dritten *a* und demselben *c* auch gemeinschaftlich, die dritte dem nämlichen dritten *a* und dem c', d. i. dem entgegengesetzten Ende von *c* in der Längendimension wiederum gemeinschaftlich, und die vierte diesem c' und dem zweiten *a* zusammen; wenn die erste und dritte im positiven, so ist die zweite und vierte im negativen Zustand. Es sind also die gegenüberliegenden unter den 4 Seiten wiederum gleichnamig, die aneinanderliegenden ungleichnamig; sie schneiden sich einander unter einem schiefen Winkel, welcher demjenigen gleich ist, welchen der Queerschnitt der Lateralecke des Dihexaëders bekommt, wenn man die Lateralecke, in welche *a* sich endiget, als Endspitze einer vierseitigen (2-und-2-kantigen) Pyramide betrachtet, d. i. unter dem Winkel des Rhomben, dessen Diagonalen sich verhalten, wie $\sqrt{3}\,a : c$.

Die Art, wie die Linie *s* polarisirt ist, ist die einfachste; sie ist es blofs in Beziehung auf die Längendimension *c*, d. i. in ihren beiden entgegengesetzten Seiten, deren eine dem *c*, die andre dem c' zugekehrt ist. Kehrt sie die positive Seite nach oben, so kehrt sie die negative nach unten. Die ihr entgegengesetzte Hälfte der nämlichen Dimension, s', ist umgekehrt polarisirt, so dafs sie ihre negative Seite der positiven des *s*, und ihre positive der negativen von *s* zuwendet; dies folgt auch aus den entgegengesetzten Zuständen der Seiten von *c* und c', welche denen von *s*, oder denen von s' zugekehrt sind. Es bilden sich daher abermals von der Längendimension *c* aus über die Linien *s* hinweg drei in sich zurückkehrende Drehungskreise mit gleichsinnig liegenden Richtungen der wechselnden Pole, alle drei mit umgekehrten Richtungen zwischen einander greifend, wie es den umgekehrten Zuständen je zwei benachbarter von den 6 polarisirten Seiten

der Längendimension *c* entspricht, welche Seiten alle in diese Drehungskreise verflochten sind.

Verfolgt man, was aus den andern für ein rhomboëdrisches System charakteristischen Krystallisationsflächen für den polarischen Zustand, in welchem sich seine inneren Dimensionslinien befinden, abzuleiten ist, so bleibt die Hauptsache unverändert. Zwei benachbarte Dimensionshälften *a* verhalten sich mit ihren, dem zwischen ihnen liegenden *s* zugekehrten, Seiten gleichförmig, und mit den von ihm abgewendeten oder dem dritten *a* zugekehrten Seiten jenem entgegengesetzt; *c* sowohl als *s* treten mit jedem einzelnen der beiden erwähnten *a* in neuen Cohäsionsconflict zusammen, und drehen dem gemäſs ihre polarisirten Seiten aus den vorigen Richtungen schräg gegen die einzelnen beiden *a*, aber gegen jedes von beiden gleichförmig nach dem ausgesprochenen Gesetz. Insofern dieses Gesetz in Beziehung auf *a* ausgesprochen wird, so involvirt es das Verhalten der beiden andern mit im Conflict begriffenen Dimensionen zugleich mit. Denn überhaupt hat ein solches Gesetz, welches eine bestimmte Cohäsionsweise begründet, nur Sinn in Beziehung auf ein gemeinschaftliches Verhalten mehrerer Dimensionen unter sich, aber gar keinen, wenn an die Bestimmung bloſs einer einzelnen, ohne Rücksicht auf die übrigen, gedacht werden sollte.

Noch giebt ein eigenthümliches, in seiner Art wohl einziges Beispiel von Polarisationsweise seiner Dimensionen — der Turmalin, auch ein rhomboëdrisches System. Aber durch das Dreiseitigwerden seiner (ersten) sechsseitigen Säule, und durch die nicht parallelen Flächen beider Endigungen erscheint der Cyclus in den drei vorhin erwähnten, von *c* über *s* hinweg nach *c'* u. s. f. gehenden (bildlich von mir so genannten) Drehungskreisen in der Hälfte unterbrochen, und die Drehungsrichtung gleichsam in sich selbst zurückgeworfen und stockend. Dies ist ein Verhalten, wie es wohl sonst im Zwillingskrystall ein Individuum gegen das andre übt; allein in einem und demselben Individuum ist es eine sonst kaum vorkommende Erscheinung. Diese Erscheinungen aber, wie sie hier nur kürzlich erwähnt sind alle zu verfolgen, ist hier der Raum nicht; nur das Interesse der Sache kann den Grad von Ausführlichkeit rechtfertigen, mit welcher hier ihrer gedacht ist. Es mag die gegebene Darstellung von den inneren Polarisationsverhältnissen der verschiedenen Seiten sämmtlicher innerer Structurrichtungen viel gröſserer Ausführung, Bewährung, Berichtigung vielleicht, bedürfen; doch glaube ich, daſs sie den Weg bezeichnet, auf welchem die eigenthümlichen

Cohärenzverhältnisse der krystallinischen Structur zu einem physikalischen Verständnifs gebracht werden können.

Wenn aber, wie wir glauben, die im gegenwärtigen zweiten Abschnitt entwikkelte, rein auf die Verhaltnisse der inneren Structurlinien gegründete, und von der Annahme primitiver Formen unabhängige Bezeichnungsmethode für alle Flächen eines Krystallisationssystemes augenscheinlich den Vorzug vor der im ersten Abschnitt erläuterten, lediglich auf gegebne Primärformen sich beziehenden, verdient, wird nicht diese letztere ganz überflüssig erscheinen? und warum, wird man fragen, alsdann diese Methode noch bestehen lassen, und selbst, wie wir gethan haben, in sich auszubilden und zu verbessern suchen?

Allein es ist keineswegs meine Absicht, durch die neu angegebene Methode die frühere in verbesserter Gestalt angegebene durchweg zu verdrängen; wohl aber jene zur herrschenden und Hauptmethode, diese zur Hülfsmethode zu machen.

Denn fürs erste gewährt auch diese ihre Vortheile. Ich habe oben schon erinnert, dafs für das vollkommnere Studium des Zusammenhangs unter den Flächen eines Systemes die Erwägung mehrerer Zonen ein Bedürfnifs ist, als in unsern auf die Dimensionslinien gegründeten Zeichen unmittelbar sich an den Tag legen. Nun lassen sich zwar alle möglichen Zonen, und ob eine gegebene Fläche ihnen angehört oder nicht, aus unserm Zeichen der Fläche mit geringer Mühe entwickeln; aber diese Eigenschaften der Fläche liegen doch nicht unmittelbar in dem Zeichen am Tage.

Dagegen lassen sie sich durch die Bestimmung der Lage der Fläche an schicklich gewählten Primärformen und durch ein auf dieselben sich beziehendes Zeichen der Fläche weit fafslicher und anschaulicher machen. Und das wäre das erste Verdienst dieser Hülfsmethode. Dabei aber sieht man leicht, dafs wir bei der Wahl einer solchen Bezeichnung keineswegs auf eine einzige Primärform beschränkt sind, vielmehr jedesmal diejenige werden zu wählen haben, an welcher der beabsichtigte Ausdruck der Zonenverhältnisse der zu bezeichnenden Fläche am besten an den Tag kommt. Und wenn es auf eine vollständige Entwickelung aller Verhältnisse dieser Art in einem Systeme abgesehen ist, so wird die ganze Reihe von Primär- oder pseudoprimitiven Formen durchzugehen seyn, zu welchen die Anlage in dem allgemeinen Bau des Systemes gegründet ist.

Ferner setzt auch unsre nur auf die innern Structurlinien gegründete Bezeichnung der Flächen eine bis zur klaren Uebersicht gediehene, hinlängliche Erkenntniſs von dem Zusammenhange des ganzen Systemes voraus; nachdem man diese erworben hat, geht man wohl, rückwärts überschauend, den einfach synthetischen Gang der Theorie, aber man kann ihn nicht von Anfang an einschlagen, wenn der Zusammenhang des Systemes noch das Problem, und wohl ein Anfangspunkt der Betrachtung desselben, aber nicht ein Ausgangspunkt seines inneren Entwickelungsganges gegeben ist. Wo dieser, wo das Prinzip der Gestaltung noch gesucht wird, da muſs der Gang der Aufsuchung ein analytischer, und die gefundenen verschiedenen Glieder müssen, ehe sie zum Ganzen können zusammengestellt werden, es erst unter sich. Und von dieser Art ist alsdann die Zurückführung einer in den Zusammenhang zu bringenden Fläche auf eine früher gekannte Form, die jetzt, wenigstens relativ, als Primärform für jene gebraucht wird. Daher die wirkliche Unentbehrlichkeit auch einer solchen Bezeichnungsmethode, wenigstens auf den früheren Stufen — und diese begründen allerdings die späteren — beim Studium eines jeden Systemes. Wo, wie etwa beim Axinit, das ganze System wirklich noch so unzulänglich gekannt ist, da würde nur mit groſser Willkühr (— und doch, nachdem erst mit einer gewissen Kühnheit ein solcher Uebersichtspunkt gefaſst wäre —) eine Darstellung seiner verschiedenen Krystallisationsflächen nach der im zweiten Abschnitt befolgten Weise möglich seyn; und weit natürlicher, sichrer, anspruchsloser wird der verfahren, der, so lange die Sachen so liegen, die Abänderungsflächen auf die herrschenden zurückführt, und den von diesen gebildeten Körper, wenn gleich nur *ad tempus*, als Primärform behandelt.

Endlich wird die der gewöhnlicheren Ansicht von den primitiven Formen angepaſste Methode der Bezeichnung ihr Publikum behalten, auch da, wo für den, welcher sich die vollkommnere Uebersicht verschafft hat, es eine bündigere giebt. Was diesem als eine indirecte Behandlung der Sache erscheint, wird jenem Publikum die directe und faſslichere seyn. Vielleicht wird es sich die andre Behandlung auch gar nicht anmuthen lassen; und auch mit diesem Publikum wollen wir uns gern jederzeit wenigstens verständigen!

Allgemeine Uebersicht

der

Flora auf den Canarischen Inseln.

Von Herrn L. v. Buch *)

Wenn es erwiesen ist, wozu man so leicht geführt wird, seitdem die Aufmerksamkeit der Naturforscher sich mehr auf botanische Geographie gewandt hat, wenn es gezeigt werden kann, wie jede Pflanze, oder doch ihr Typus, den wir mit dem Namen eines Genus zu bezeichnen pflegen, aus einem Mittelpunkt hervorgegangen ist; strahlenförmig wenn das Clima sich der Ausbreitung nicht entgegensetzt, band- und zonenförmig wenn Temperatur die Verbreitung gegen Süden und Norden beschränkt, so bezeichnen Phänomene auf Inseln diese Strahlen, daher auch ihre Anfänge, bestimmter und genauer, als sie auf grofsen Ländern aufzufinden möglich sein würden. Denn je näher den Anfängen, um so mehr würden sich die verschiedenen Strahlen durchkreuzen und ihre Verfolgung erschweren. Aber die Flora der Inseln ist arm, und diese Armuth ist in ziemlich geradem Verhältnisse mit ihrer Entfernung vom nächsten Continent. Die Formen jedoch der Gewächse, welche auf ihnen vorkommen, sind gewöhnlich mit denen dieses Continents übereinstimmend. Was also auf entfernteren Inseln erscheint, wird daher leicht durch nähere Inseln sich nach Mittelpunkten auf dem festen Lande zurückführen lassen; und die Menge und die Ver-

*) Vorgelesen den 6. November 1817.

hältnisse der Pflanzenformen auf Inseln, die vom festen Lande mehr, dann immer weniger entfernt sind, werden uns daher gewissermaſsen erkennen lassen, welche Formen einer schnelleren und leichteren Ausbreitung fähig, welche hingegen enger ihre Anfänge zu umgeben genöthigt sind.

Es ist daher wohl einiger Aufmerksamkeit würdig, mit diesem Gesichtspunkt die Flora der Inseln zu untersuchen, und es scheint nützlich, in dieser Hinsicht genau aufzuzeichnen, welche Pflanzen die Natur diesen Inseln zugetheilt hat und welche Standörter sie einnehmen. Leider jedoch fehlt uns diese Aufzeichnung fast überall. Noch können wir nicht sagen, daſs wir mit der Flora einer einzigen Insel des Atlantischen Ozeans bekannt sind. Und doch können wir mit dieser Aufzeichnung nicht genug eilen, wenn wir noch die Natur in ihrer wahren Gestalt erkennen wollen. Denn überall wo sich der Mensch ansiedelt, folgen ihm Thiere und Pflanzen seiner Heimath in Menge. Sie breiten sich aus, und verdrängen und erstikken endlich die ursprünglichen Bewohner gänzlich. Dann frägt man vergebens, was denn hier wohl aus den Händen der Natur entsprungen, was durch die Cultur eingeführt worden. Man vermag es nicht mehr zu sondern und muſs sich mit Vermuthungen behelfen. Auf St. Helena übertrifft jetzt schon die Menge der eingeführten wildwachsenden Pflanzen die natürlichen weit. Auf der Azorischen Insel St. Miguel finden sich jetzt wenig Gewächse, welche der Insel eigenthümlich, und nicht von Portugal oder Brasilien dort hingebracht worden wären. Und von den so sonderbar isolirt liegenden Bermudas, von denen es so merkwürdig wäre zu wissen, ob auf ihrer Vegetation mehr der Ostpassat von Europa und Afrika her, oder der Golfstrom des Mexicanischen Busens gewirkt haben möge, weiſs man, ohnerachtet der angewandten Bemühung, kaum eine Pflanze zu nennen, welche nicht offenbar dem Anbau durch Engländer gefolgt wäre.

Gleiches Schicksal erwartet die Canarischen Inseln und Madera. Ganze Geschlechter werden völlig verschwinden, wie die Guanches, die einst diese Inseln bewohnten. Man wird dann nicht mehr wissen, auf welche Art, wo und in welcher Lage diese Pflanzen sich fanden; auf den Inseln selbst wird man so wenig Antwort darüber erhalten als jetzt, wenn man frägt, was ein tapferes Volk, das diese Inseln vor nur dreihundert Jahren volle Hundert Jahre lang gegen kriegserfahrne Spanier vertheidigte, wohl für eine Sprache geredet haben möge. Schon jetzt wächst die prachtvolle *statice*

arborea nur in einigen Gärten von Orotava, nirgends mehr wild. Doch hat man sie, aufser Teneriffa, noch niemals gesehn. *Solanum Vespertilio* findet sich nur auf einem Felsen, wo es nicht wild scheint. *Bosea Yervamora* steht jetzt nur in Hecken, die Weinberge und Felder umgeben. Der schöne *Arbutus Callicarpa*, dessen Früchte gegessen werden, und der einst eine vorzügliche Zierde der Wälder war, ist jetzt so sparsam zerstreut, dafs die Eigenthümer genau die Zahl ihrer Bäume kennen, und dafs man häufig weit reisen mufs, wenn man diesen Baum aufsuchen will. Einen hohen Baum, von trefflich wohlriechendem Holz, dem *Juniperus Oxycedrus* sehr ähnlich, dessen Wälder sonst die Höhen bedeckten, kennt man in Teneriffa nur noch aus einigen vergessenen Stämmen in 9000 Fufs Höhe in der Mitte der verbrannten Wüste am Fufse des letzten Kegels vom Pic. In Palma haben sich davon einige Bäume in der fast unzugänglichen Caldera erhalten. Den Spaniern, als sie Teneriffa eroberten, war es zu langweilig, die Menge der Fichtenbäume umzuhauen, welche bis an die See die Abhänge bedeckten. Sie brannten sie weg. Die meisten Botanisten, die nach Teneriffa gekommen sind, haben nun auch nicht einmal einen Baum dieser Art gesehn, und es war Christian Smith vorbehalten mit Bestimmtheit zu zeigen, dafs diese Wälder aus einer eignen und sehr merkwürdigen Species von *Pinus* beständen. — Mit unverantwortlichem Leichtsinn sieht man jetzt Bauern und Hirten die Ericawälder auf den Höhen von St. Cruz und St. Andrea zu Kohlen verbrennen, um dadurch einen nur für wenige Jahre einträglichen Acker zu gewinnen. Man zerstört unvorsichtig und auf ewig die Helme der grofsen Destillirgeräthschaft der Natur, durch die allein Fruchtbarkeit, Pracht und Wohlsein sich über die Insel verbreitet. Es ist der Texobaum, den man ausrottet, *Erica arborea*, der nur auf diesen Höhen vorkommt. Unter seinem Schutz und nur hier allein erhebt und verbreitet sich das goldgelbe *Exacum viscosum*. Des Schutzes beraubt, wird diese schöne Pflanze verschwinden, und nur noch in botanischen Gärten zu finden sein. Man wird dann vielleicht glauben, dafs sie mit Unrecht eine Canarische Pflanze genannt worden ist, und wird auf diese Art der Flora manches entziehen, das zur Auffindung der natürlichen Gesetze ihrer Verbreitung höchst nothwendig ist. — Wie würden aber dagegen diese Gesetze wieder verwirrt werden, wenn man, durch den Namen verführt, z. B. *Phalaris canariensis* für ein Canarisches Produkt halten wollte, das in einem grofsen Theile von Europa wild, aber in Teneriffa nur

allein Ackerpflanze eines einzigen Ortes ist, oder *Sida canariensis*, welche nie die Wohnungen verläſst, oder *Saccharum Teneriffae*, das wahrscheinlich von Sicilien eingeführt worden, oder *Laurus canariensis* W., *Quercus canariensis* W., *Hyoscyamus canariensis Carr*, die man auf diesen Inseln nie sah!

Ehe man es daher wagen darf, Betrachtungen über Verhältnisse der ursprünglichen Flora der Canarischen Inseln anzustellen, scheint es nothwendig die Geschichte der eingeführten Flora zu untersuchen, um beide so scharf, wie es jetzt noch thunlich ist, von einander zu trennen und die ursprüngliche rein und frei betrachten zu können.

Geschichte der eingeführten Flora.

Die älteste, etwas genaue Nachricht von den Canarischen Inseln, ist das Wenige was wir von ihnen im Plinius finden. Sie läſst zum Wenigsten durchaus keinen Zweifel, daſs man unter den Glückseligen Inseln keine anderen verstanden habe, als diejenigen, welche wir jetzt unter dem Namen der Canarischen begreifen.

Nur in Auffindung und in Wiedererkennung der einzelnen Inseln sind die Commentatoren nicht einig, ja es scheint fast, als habe darüber ein jeder seine eigene Meinung. Ich würde es nicht wagen diese Verschiedenheit in Meinungen zu berühren oder wohl gar eine eigene Meinung zu äuſsern, da mir zu solchen Untersuchungen völlig die Sprach- und Forschkenntnisse fehlen, wenn nicht die richtige Bestimmung dieser Inseln auf die Geschichte der Flora einigen Einfluſs hätte, und wenn es mir nicht schiene, daſs mit einiger Bekanntschaft ihrer Produkte die Nachricht im Plinius sich leicht und ungezwungen entwickelt.

Plinius hatte seine kurze Beschreibung aus dem geographischen Werke des Königs Juba genommen, der, in Rom unter Vorsorge des jüngeren Scipio erzogen, nach seiner Zurückkunft in Mauritanien die Kenntniſs von Africa und seiner Produkte zum besonderen Gegenstand seiner Nachforschungen gemacht hatte.

Zwei Menschen waren von ihm ganz besonders in der Hinsicht nach den glückseligen Inseln gesandt worden, ihre Lage und ihren Zustand zu erforschen. Es ist also hier von keinen Ueberlieferungen, von keinen Erzählungen verschlagener Seeleute oder zufällig in der Nähe gewesener Reisenden die Rede, sondern von unmittelbaren Berichten; und hätte es Plinius gefallen, aus des Königs Beschreibung noch etwas mehr auszuziehen, als er gethan hat, wir würden vielleicht eben so wenig Schwierigkeit wiederfinden, die einzelnen Inseln zu erkennen, als in einer Reise von Borda.

Plinius Auszug ist folgender: *Lib. VI. cap. 37. Juba de Fortunatis ita inquisivit: sub meridie quoque positas esse prope occasum a Purpurariis DCXXV mille passuum sic ut CCL supra occasum navigetur, deinde per LXXV mille passuum ortus petatur. Primam vocari Ombrion, nullis aedificiorum vestigiis; habere in montibus stagnum, arbores similes ferulae, ex quibus aqua exprimatur, ex nigris amara, ex candidioribus potui jucunda. alteram insulam Junoniam appellari, in ea aediculam esse, tantum lapide exstructam. Ab ea in vicino eodem nomine minorem. Deinde Caprariam lacertis grandibus refertam. In conspectu earum esse Nivariam, quae hoc nomen accepit a perpetua nive nebulosam. Proximam ei Canariam vocari a multitudine canum ingentis magnitudinis, ex quibus perducti sunt Jubae duo: apparentque ibi vestigia aedificiorum. Cum autem omnes copia pomorum et avium omnis generis abundent, hanc et palmetis caryotas ferentibus ac nuce pinea abundare. Esse copiam et mellis. Papyrum quoque et siluros in amnibus gigni.*

Der P. Hardouin sagt: *Junonia magna* sei die Insel Gomera, *Junonia minor* sei wahrscheinlich von den Wellen wieder verschlungen (*forte jam aquis obruta*), *Capraria* sei Palma, *Nivaria* Tenerif, *Canaria* was wir noch Canaria nennen, *Ombrios* endlich die Insel Ferro. Dagegen sagen die Schriftsteller des Landes, der P. Galindo und Nunez de la Penna, *Junonia magna* sei Palma, und *Junonia minor* Gomera, halten es aber ebenfalls für beinahe erwiesen, daſs *Ombrios* nur die Insel Ferro sein könne.

Denn es hat ehedem auf der Insel Ferro ein groſser Baum gestanden, es war ein Tilbaum, *Laurus foetens*, dessen breite fleischige Blätter weit umher einen dichten Schatten verbreiteten. Alle Tage zwei oder drei Stunden nach Sonnenaufgang fingen die Blätter dieses Baumes an zu träufeln; — wie ein Regen fielen die Tropfen von Blatt zu Blatt und sam-

melten sich unten zur laufenden Quelle. Die Einwohner der Insel, die nicht quellenreich ist, kamen im Laufe des Tages, dies reine Himmelswasser zu holen, und kehrten am Abend mit vollen Krügen zurück. Der Baum ward für heilig gehalten, ein Wunder der Welt. Ein eigner Aufseher, von den Einwohnern gesetzt, sorgte für die reinliche Aufsammlung des Wassers in grofsen Cisternen und ordnete die Austheilung an die wasserholenden Menschen. — Dieser wohlthätige Baum stand noch 1689, östlich etwas über dem Städtchen Valverde. Der P. Galindo hat ihn gesehn und beschrieben. Er stand noch lange nachher, aber durch Alter seiner Blätter Menge beraubt, verlor sich die Wirkung. Bedürfnifs nöthigte die Menschen neue Quellen zu suchen, und jetzt ist das Wunder vergessen. — Reisende aber, die vor den Canarischen Inseln vorüber dem neuentdeckten Amerika zueilten, vergafsen, auch ohnerachtet der Menge und Gröfse der Eindrücke, die dort ihre Einbildungskraft füllten, den Baum von Ferro nicht, und er ward überall in Europa berühmt.

Dieser Baum, meinte man, sei offenbar jene *Ferula*, aus welcher ein trinkbares Wasser geprefst werde, und somit sei die Insel Ombrios völlig bestimmt und gefunden.

Andere suchten diese Inseln näher gegen Africa hin; — Moreri und Eckardt sagen *Junonia magna* sei Lancerot, *Junonia minor* aber die kleine Insel Graciosa; d'Anville aber meint, die Inseln Lancerote und Fortaventura wären als *Purpurariae* bekannt gewesen, dagegen sei *Canaria* die noch jetzt so genannte Insel, *Nivaria* Tenerif, *Pluvialia* Ferro, *Junonia* Gomera, *Capraria* Palma; ja, Malte-Brun, der viele Meinungen gesammelt und beleuchtet hat, geht hierinnen noch weiter, und meint, unter den beiden Junonien müsse man die kleinen Felsen Clara und Lobos verstehen, *Ombrios* sei Lancerot, *Capraria* Fortaventura, *Canaria* Canaria, *Nivaria* Tenerif; und die westlicher liegenden Inseln wären den Alten nicht bekannt gewesen. — Von einer Insel scheint doch die gegenüberstehende niemals recht fern, vorzüglich Inseln, die durch ihre aufserordentliche Höhe und Steilheit sich so sehr auszeichnen. Clara, Alegranza und Lobos können in solcher Nachbarschaft auch dem ungeübtesten Seefahrer nie anders erschienen sein, als das was sie wirklich sind, als einzelne Felsen im Meer.

Wenn wir die Stelle im Plinius etwas genauer ansehen, so finden wir darin zwei Inseln durch Eigenthümlichkeiten bezeichnet, welche aus ihrer besonderen Natur entspringen und von ihnen nicht getrennt

werden können. Nivaria durch den immerwährenden Schnee und die daher entstehenden Nebel, Ombrios durch ihren Namen. Jene kann nur Teneriffa sein: der Schnee bleibt auf dem Pic häufig bis im Mai liegen; auf Gran Canaria niemals, oder nur in seltenen Jahren für wenige Tage, und auch auf Palma ist Schnee nur im Januar für wenig Wochen lang sichtbar. Die Nebel steigen den ganzen Sommer durch täglich vom Meer und umhüllen zwischen 8 und 9 Uhr den Gipfel des Pic; mit Nebel bedeckt sieht man die Insel Tenerif daher täglich von Canaria und selbst von Fortaventura, sie verdient also wohl den Namen der Schnee- und Nebelbedeckten, und gewifs darf in ihrer Nähe selbst Palma auf solchen Namen nicht Anspruch machen.

Auf Ferro, auf Lancerote oder Fortaventura ist der Schnee eben so unbekannt als in der Libyschen Wüste. — Dafs aber Ombrios dieselbe Insel sei, die Plinius aus einer anderen Nachricht Pluvialia genannt hatte, daran ist kaum zu zweifeln; der Name ward ihr gegeben, weil sie nur durch den Regen ihren Bedarf an Wasser erhielt, *in Pluvialia non esse aquam, nisi ex imbribus.* — So ist es noch auf Lancerot und Fortaventura. Auf der ersteren vorzüglich wird am Ende des Sommers das Wasser aus den Cisternen theuer verkauft, und nicht selten nöthigt blofs der Mangel an Wasser Tausende von Einwohnern, ja zuweilen fast alle Bewohner der Insel, zur schnellen Flucht nach Canaria oder Teneriffa, oder zum gänzlichen Auswandern nach Buenos Ayres, wo man sie als fleifsige und unverdrossene Arbeiter mit offenen Armen empfängt. Mehr als fünftausend Menschen, welche die Gegend der Hauptstadt Teguize und des Seehafens Porto di Naos bewohnen, haben wahrscheinlich noch nie Wasser aus einer Quelle oder aus einem Brunnen getrunken. Man erstaunt, was wohl die Menschen bewegen kann, ein so verbranntes und zurückstofsendes Land zu bewohnen, in welchem die Bäume gegen die tödtende Seeluft in weifsen Schilderhäusern versteckt stehen, und wie das Vieh getränkt werden müssen, und in dem auf der dürren Wüste umher die wenigen Kräuter statt der Blätter mit langen Stacheln besetzt sind. Doch nach neun Monat fortwährend wolkenlosem und ausdörrendem Himmel erscheint endlich am Ende des Octobers und im November von Süden her Regen. Sogleich sind die Hacken in Arbeit Steine zu lockern; den Hacken folgt unmittelbar und vielleicht am nämlichen Tage die Saat, und nur vier Tage darauf ist, wie durch Zauberei, der kahle Boden vom aufgegangenen Wei-

zen zu einer grünen Wiese geworden; und wo nicht Weizen, da bedecken die breiten, mit glanzenden Krystallen besetzten Blätter der Eispflanze, des *Mesembrianthemum crystallinum*, Thäler und Abhänge. Drei Monat später giebt der Boden den gesäeten Weizen dreifsig- ja auch wohl vierzigfach wieder, die zur Barilla eingeäscherte Eispflanze liefert Tausende von Centnern eines theuer verkäuflichen Produkts, und ein reicher Ueberschufs von Weizen wird nach Teneriffa, Palma und Ferro geführt. — So wird die wasserleere und wüste Insel durch wenige Regen zur reichen Kornkammer für Inseln, die das ganze Jahr durch mit dem Reichthum der Natur bedeckt zu sein scheinen. — Es hat etwas Gefälliges, dem Gefühl wohlthuendes, eine so dürre Insel nach dem Wohlthäter Pluvialia, Ombrios, die Regeninsel genannt zu sehen.

Auf dieser Insel Ombrios sollen sich nun die beiden Ferulae finden, von denen die dunklere einen bitteren, die hellere dagegen einen unschädlichen trinkbaren Saft liefert. Viera, der auf den Canarischen Inseln geboren, und mit ihnen sehr bekannt war, hat schon vor vierzig Jahren gefragt: Warum man nicht glauben solle, dafs diese Ferulae sind was wir jetzt Cardon und Tabayba nennen? Zwei Arten von Euphorbia, beide den Inseln eigenthümlich, und auch nach Viera's Versicherung nirgends gröfser und häufiger als in dem südwestlichen Theile von Lancerot: *Euphorbia canariensis* und *Euphorbia balsamifera!* Beide wachsen vereint in der warmen und brennenden Zone, welche ich mit dem Namen der Zone der Africanischen Formen bezeichne; bis gegen 15 Fufs oder wie Feigenbäume hoch, da wo ihnen das Clima zuträglich genug ist. In Teneriffa ist es nicht warm genug und die *Euphorbia balsamifera* ist dort nur klein, in Palma findet sie sich nur im westlichen Theile, in Ferro ist sie wahrscheinlich auch selten, und auf Canaria in der Gröfse von Lancerot nur im südlichen Theile in den Thälern von Arguaneguin und Mogan. Beide Euphorbien sind ausgezeichnet durch den Reichthum an Milch, den sie enthalten, welche bei nur schwacher Verwundung wie ein Strahl hervorbricht und lange fortläuft; vorzüglich in der Tabayba, deren Rinde, durch die Milch aufgeschwellt, ganz weifs und glänzend erscheint. Die Milch des Cardon, der *Euphorbia canariensis*, ist brennend, ätzend und scharf, so wie Plinius es will, und würde wohl von Niemanden ungestraft verschluckt werden. Die Milch der *Euphorbia balsamifera* dagegen ist, eine sonderbare Anomalie in dieser Familie, so unschädlich süfs, dafs man sie nicht fürchtet, und

dafs

dafs sie die Einwohner gewöhnlich zur Gallert verdicken, um sie dann gelegentlich als eine Paste zu geniefsen. Deswegen eben wird sie *Tabayba dulce* genannt. Das durch die Saftcanäle schwammige Holz wird in der Weingegend zu Pfropfen auf Bouteillen verbraucht, wozu man ohne Schaden zuverlässig ein Holz einer anderen Euphorbia nicht anwenden könnte. — Der ganze Baum ist sehr merkwürdig, von den Botanikern wenig gekannt und fast gar nicht beschrieben. Der Stamm erhebt sich zuerst, wenn auch sehr gekrümmt, ohne Aeste; dann aber vertheilen sich eine grofse Menge Zweige umher, die wieder sich in unzählbare kleinere Zweige zerspalten. Nirgends sind Blätter, als nur erst am äufsersten Ende der Zweige, wo sie umherstehen. Sie sind kurz, lanzetförmig und schmal, grau und an der Spitze mit einem kleinen Stachel besetzt. Die Blätter, welche unmittelbar die Blume tragen, sind etwas breiter, eiförmig, blasser, etwas fleischig, und fallen nach der Blüthe ab; drinnen sitzt nur eine einzige Blume, gelb mit runden Petalen, die eine grofse Frucht hervorbringt, wenn man sie mit anderen Euphorbienfrüchten dieser Insel vergleicht. Die Oberfläche der Frucht ist mit kurzen Haaren bedeckt.

Noch mehr gehört der Cardon zu den abentheuerlichsten Formen der Natur. Seine dunkelgrünen Zweige erheben sich, völlig blattlos, alle zugleich aus einer gemeinschaftlichen Wurzel, biegen sich im Halbcirkel über den Boden hin, und steigen dann, in verschiedener Entfernung vom Anfang, senkrecht herauf, so dafs sie, sagt Viera sehr richtig, dem Baume das Ansehn eines ungeheuren Kronleuchters geben, mit einer grofsen Menge aufgesteckter und angezündeter Aerme. Die einzelnen Aeste haben wohl einen halben Fufs im Umfang und sind Prismen von vier oder noch gewöhnlicher von fünf Seiten. Ihre Kanten sind die ganze Länge fort mit zwei kurzen Stacheln besetzt. Am Ende dieser dicken, eckigen, fleischigen Aeste brechen die scharlachrothen Blüthen hervor, die in der Ferne einer glühenden Kohle ähnlich sind. Höher herauf zertheilen sich ältere Aeste und bilden wieder abgesonderte kleine Kronleuchter auf dem gröfseren. Oder der Baum steht am Abhange eines Felsens, an welchem die Aeste in den wunderbarsten Curven herabfallen und sich senkrecht wieder erheben. Oder er wächst auf einer ebenen Fläche, und die Aeste, von Alter und Schwere ganz zu Boden gedrückt, heben sich erst in grofser Entfernung vom Mittelpunkt wieder, wodurch der sonderbare Anblick eines kleinen Waldes von lebendigen fünfseitigen Prismen entsteht. — Es ist hier nichts was uns eine sonst

gewöhnliche Form eines Busches oder eines Baumes zurückrufen könnte. Selbst auch die Blumen auf der Spitze nicht; denn auch noch in der Nähe möchte man sie für Knöpfe halten, mit welchen diese abentheuerlichen Aeste besetzt sind.

Dafs Juba's Abgeordnete diese Bäume und ihren in der Wirkung so sehr contrastirenden Saft als Eigenthümlichkeiten besonders auszeichneten, war eine fast unausbleiblich nothwendige Folge ihrer Anwesenheit auf der Insel. Im Mela sind diese Bäume zu Quellen geworden, von denen die eine durch ihr Wasser den Mund zusammenzieht und tödtet, die andere ins Leben wieder zurückruft.

Noch soll in Ombrios in den Bergen eine Lagune gewesen sein, und Viera meint das passe sich mehr auf den Sumpf, den man in Lancerot *la gran Mareta* nennt, als auf irgend einen anderen Ort dieser Inseln. Inzwischen müssen die Verwüstungen des Vulcans von 1730, der den dritten Theil der Insel bedeckte, in dieser Hinsicht sehr viel verändert haben.

Und wenn wir nun Ombrios und Nivaria als zwei bestimmte feste Punkte betrachten, so werden sich die übrigen Inseln von selbst ordnen und bestimmen; vorzüglich, wenn wir voraussetzen, was doch in solchen Fällen gewöhnlich zu sein pflegt, man habe sie in einer Reihenfolge genannt.

Junonia magna, die zweite Insel, wird daher Fortaventura sein müssen; und in der That ist sie die längste und nach Teneriffa die gröfste von allen Canarischen Inseln.

Junonia minor würde Canaria sein; sie ist der ersteren ganz nahe und kleiner. Und um vieles kleiner mufs in der That die runde Canaria jedem erscheinen, der sie von Fortaventura aus sieht.

Dann folgt Capraria: Teneriffa kann es nicht sein; wir haben sie als Nivaria bestimmt. Es kann also mit diesem Namen kaum eine andere als Ferro belegt werden. Sie wird von Canaria aus gesehen und liegt auch in der Richtung des Aufzählens. Grofse Eidechsen sollen sich dort finden (*lacertis grandibus referta*). Die kennt man nun freilich nicht mehr; — aber auffallend ist es doch, dafs Bontier, des ersten Eroberers Johann von Bethencourt Beichtvater, von dem keine Spur ist, dafs er die Beschreibung des Plinius gekannt, am wenigsten sie in seinen Berichten vor Augen gehabt habe, wenn er von Ferro redet, wo er selbst war, sagt, dafs man dort fände: *des lezards, gros comme des chats et bien hideux à regarder.* Von anderen Inseln erwähnt er sie nicht.

Im Angesicht von *Junonia minor* und Capraria liegt Nivaria, welches den Bestimmungen jener als Canaria und Hierro nicht entgegen ist.

Endlich folgt Canaria, welche ganz nahe bei Nivaria liegt, und ihren Namen von der Menge grofser Hunde erhalten hatte die sich dort fanden, nebst einigen Ruinen von Häusern. Beides charakterisirt die Insel nicht. Allein es kann nur Palma sein; denn diese Insel ist zu hoch und zu grofs, und der Insel Nivaria in ihrer ganzen Ausdehnung zu sehr im Gesicht, um vergessen werden zu können.

Eine Insel von den sieben gröfseren ist offenbar im Plinius übergangen, da er nur sechse nennt; ein Blick auf der Charte zeigt hinreichend, wie sehr möglich Gomera von Lancerot her übersehen werden konnte, vorzüglich wenn die Gesandten, wie es ganz wahrscheinlich ist, nicht selbst alle Inseln, sondern nur die vornehmsten besuchten. Gomera ist von drei Seiten durch das höhere Teneriffa verdeckt, und auch von Westen her fliefst sie in der Ansicht mit der gröfseren Insel zusammen. Sie scheint immer nur ein Theil und Anhang von Teneriffa zu sein.

Ich kann es mir nicht versagen, die Sonderbarkeit zu bemerken, dafs in diesem Bericht auch nicht eine Spur von Bewohnern der Inseln vorkommt; dagegen aber wohl von Ruinen und von einem Volke, das Hunde dort hingeführt hatte: denn Hunde erreichen ohne Hülfe so weit entlegene Inseln nicht. Guanches oder Berberen, die späteren Bewohner, waren dies nicht. Denn Guanches haben nur in Höhlen, nie in Häusern gewohnt. Was sind dies für Menschen gewesen? und was konnte sie bewegen ein so glückliches Clima wieder zu verlassen? Waren es vielleicht einzelne verschlagene, nach ihrer Heimath wieder zurückgekehrte Familien?

Aepfel, Datteln und Pinien wuchsen damals auf diesen Inseln in Menge. Die Pinienfrucht erkennen wir leicht in den Früchten des *Pinus canariensis*, dessen Bäume noch lange nachher selbst die Seeküsten der gröfseren Inseln bedeckten; eben so die Aepfel in der Frucht des *Arbutus callicarpa*, die äpfelgleich zu allen Zeiten ist gegessen worden. Wahre Aepfel, den nordischen gleich, gedeihen nicht wohl in dem Clima der Canarischen Inseln. Dafs aber Palmen auch damals schon, und sogar in Menge vorkamen, ist sehr bemerkenswerth, und macht es sehr wahrscheinlich, dafs diese Bäume, die Zierde der Wüsten, ihren Weg zu den Inseln von selbst fanden, und nicht eingeführt sind. Vielleicht trugen die Wellen die Früchte dorthin.

Wir erhalten daher durch die wenigen Worte im Plinius eine ziemlich deutliche Vorstellung von dem Zustande dieser Inseln zu den Zeiten des Königs Juba; eine Nachricht die um so schätzbarer ist, da wir nun in vollen 1400 Jahren auch nicht eine Nachricht mehr eines Augenzeugen erhalten. Indefs hatte sich hier ein armes Volk festgesetzt, wahrscheinlich aus der Wüste von der nächsten Küste von Afrika verschlagen; sie hatten sich Wohnungen in die Felsen gegraben und lebten von den Früchten der Insel, von der Milch der Ziegen, die sie wohl mitbrachten, und von wenigem Ackerbau. Man sagt, dafs sie Weizen *Yrichen* nannten, daher müssen sie wohl Weizen gebaut haben. Dagegen sagt aber Cadamosto ausdrücklich (*Ramusio* I. 98.), in allen Canarischen Inseln werde nur Gerste gegessen und kein Weizen, selbst in Lancerote nicht, und wiederholt bei Tenerife, das damals noch nicht erobert war, die Einwohner lebten von Gerste, vom Fleisch und von der Milch der Ziegen, und von einigen Früchten, vorzüglich von Feigen. Fast möchten wir glauben, der berühmte Reisende irre hierinnen. Denn Bontier nennt ausdrücklich *forment*, Weizen, unter den Kornarten der Bewohner von Gran Canaria (p. 127). Dagegen belehrt uns Viera, dafs schon Johann von Betancourt zwei Schiffe nach dem festen Lande von Africa, wahrscheinlich nach Mogador schickte, um von dort Weizen für Lancerot zu holen. Und auch der P. Espinoza, der nur wenig später schrieb, leugnet die Cultur des Weizens, oder diese Kornart müsse sich in späteren Zeiten wieder verloren haben, welches doch nicht wahrscheinlich sei (Viera I. 154). Immer kann die Cultur nur sehr unbedeutend gewesen sein, und dann wohl nur allein auf Canaria. Denn Bethencourt's Sendung beweist hinreichend, dafs in dem Weizenland Lancerot diese Kornart nicht im Ueberflufs war. — Gewisser, sagt Viera, ist es, dafs die Guanches Wicken (*arvejas*) und Bohnen kannten; und dann auch nichts weiter. Daher haben sie in den 1400 Jahren ihres Besitzes nur gar wenig Einflufs auf die Flora der Inseln gehabt, vielleicht nur einige Ackerpflanzen der Gerste eingeführt, vielleicht *Heliotropium plebejum*, *Buphthalmum aquaticum* oder *Teucrium Iva*, vielleicht auch *Chenopodium ambrosioides*, womit die Mumien ausgefüllt wurden, und das nur im nächsten Africa wächst und auf den Inseln nur in der Nähe cultivirter Orte; und durchaus keine Bäume. — Es ist eine merkwürdige Erscheinung in der Geschichte der Menschheit, dafs ein Volk, das nicht nomadisch, sondern an einem Ort festgebannt ist, sich so viele Jahrhunderte erhalten kann, ohne auch

nur den niedrigsten Grad der Cultur zu überschreiten. Ist es nicht wunderbar, daſs diese Menschen Inseln um sich her sehen konnten, ohne je auf den Gedanken zu fallen, die Bäume ihrer Walder zu höhlen, und in einem fast ruhigen Meere von Insel zu Insel zu fahren? — Der verschiedene Zustand, der ganz verschiedene Dialekt jeder Insel, der wenige Antheil der einen an dem Schicksal der anderen beweist hinreichend, daſs keine Gemeinschaft unter ihnen war, und nie finden wir in der Geschichte von Bethencourt's oder Peter de Veras Feldzügen eines einzigen Canots erwähnt. — Das was die Industrie dieser Menschen hervorgebracht hat, ist von der gröbsten und einfachsten Art. Fast unbereitete Pflanzenfasern sind zum lokkeren Gewebe vereinigt. Kein Werkzeug ist uns geblieben, welches auf den geringsten Grad von Erſindungsgeist deutete. Und doch fehlte es ihnen an Geist nicht, wie die tapfere Vertheidigung gegen die Spanier in Canaria, in Teneriffa und Palma hinreichend beweist.

Eine Tradition erzählt, daſs in der Mitte des 14ten Jahrhunderts Mallorkesen nach Gran Canaria kamen, aber dort zurückgehalten, endlich von den Einwohnern getödtet wurden. Sie hatten Feigen auf ihrem Schiff, und durch sie verbreiteten sich diese Bäume auf der Insel. Das ist nicht unwahrscheinlich. Denn nicht mehr als sechszig Jahre nachher erschienen die Franzosen zuerst an der Küste von Canaria, und die Begebenheit der Mallorkesen konnte ihnen daher sogar noch von Augenzeugen selbst erzählt werden. Die Eingebornen, welche an die Küste herabkamen sie zu empfangen, brachten ihnen Feigen. — Doch, wie kamen sie nach Teneriffa herüber? Cadamosto sagt bestimmt, Feigen sei eine Hauptnahrung der Einwohner von Tenerif.

Bontier's Berichte vom Jahre 1403 liefern uns, seit Plinius, wieder das erste etwas zuverlässige Bild dieser Inseln, und aus ihm lernen wir einige höchst wichtige Thatsachen für die Geschichte der Flora.

Nach der fast friedlichen Unterwerfung von Lancerot wagten die Französischen Abentheurer noch nicht die gröſseren Inseln anzugreifen; aber Gadifer de la Salle ging nach der Insel Ferro, die, zu klein, nicht leicht Widerstand zu leisten vermochte. Da fand er an der Küste ein dürres, aber im Innern ein hohes, doch schönes Land (*et bien délectable*), mit immergrünen Wäldern (gröſstentheils vom Tilbaum, *Laurus foetens*), und mit einer so groſsen Menge Fichten besetzt, daſs er ihre Zahl wohl auf Hunderttausend schätzt, und die meisten so dick, daſs Menschen sie nicht um-

klaftern konnten. Jetzt sind nur noch wenig Fichten auf Ferro, und es könnte wohl bald eine Zeit kommen, in welcher man es in Frage stellt, ob wohl diese Bäume so weit westlich und nach einer so kleinen Insel sich mögen ausgebreitet haben. — Unter den Hausthieren der wenigen Einwohner werden aufser den Ziegen auch Schweine genannt und Schaafe, und als Gadifer de la Salle im Juli 1404 bei Arguaneguin auf Gran Canaria landete, versprachen die Einwohner ihm Schweine zu bringen. Diese Thiere werden gewöhnlich nicht unter denen genannt, welche die Guanches besaſsen. Schaafe sind auch noch jetzt selten auf den Inseln, denn man bedarf ihrer nicht.

Johann von Bethencourt landete nur für kurze Zeit auf der Westküste von Palma. Da sahe Bontier Drachenbäume und andere, *portant lait de medecine.* Die letztere war die *Tabayba dulce*, *Euphorbia balsamifera*, die er schon von Lancerot und Fortaventura her kannte. Denn, wie Juba's Gesandten, so waren auch ihm diese Ferulae merkwürdig; *le pays est moult garni de bois, qui porte lait de grande medecine en maniere de baume*, wozu es auch noch jetzt die Apotheken verbrauchen, *et autres arbres de merveilleuse beauté, qui portent beaucoup de lait et sont carrés de plusieurs carres*, welches der Cardon, *Euphorbia canariensis*, ist (p. 129). — Die Drachenbäume werden unter den Bäumen von Canaria ebenfalls aufgeführt, und in der That brachten die Bewohner der Insel bei ihrer ersten Zusammenkunft mit den Neuankommenden für 200 Golddoublonen Werth an Drachenblut mit herunter, welches sie für wenige Fischhaken und altes Eisenwerk hingaben. — So waren also diese merkwürdigen Bäume wahrscheinlich schon ursprünglich wild, oder doch gewifs schon von diesem Volke aus dem festen Lande herübergebracht, und auf keinen Fall durch Portugiesen und Spanier von Ostindien her, wo erst ähnliche Formen wieder vorkommen, und wo man sogar geglaubt hat, denselben Baum wiederzufinden.

Auch Oelbäume sahe Bontier in Canaria, selbst in Fortaventura. Jetzt sind sie überall selten, und in besonderer Schönheit nur noch bei dem Dorfe Tamiso in der Mitte von Gran Canaria. Aber hier sind sie auch grofs und hoch wie Stralauer Weiden, und in hinreichender Menge, um wohl zu glauben, dafs sie dem Lande eigenthümlich gehören.

In Fortaventura waren ihm vorzüglich Bäume auffallend, die an den Bächen und an den Küsten in dichten Büschen vorkamen. Sie schwitzten

ein Gummi aus, lieferten nur ein schlechtes Holz, waren durch die Blätter dem Haydekraut ähnlich und wurden Tarhais genannt. Und noch jetzt sind diese Bäume auf Fortaventura besonders häufig. Es ist eine Art Tamarix, die Decandolle von *Tamarix gallica* nicht verschieden glaubt, die aber Willdenow, und wohl wahrscheinlich mit mehrerem Recht, als eigene Art unter dem Namen *Tamarix canariensis* beschrieben hat.

Teneriffa blieb den Franzosen eine unerreichbare, verschlossene Insel. Sie haben sie umfahren, aber immer nur von Ferne gesehn. Bontier nennt sie ein Land, das überall bis zum Ufer des Meers mit dichter Waldung bedeckt ist. So würde man sie jetzt nicht beschreiben.

Am 29sten April 1483, volle achtzig Jahre nach dem ersten Angriff, vollendete Pedro de Vera die Eroberung von Canaria. — Gleich darauf wurden die Guanches aus ihren Besitzungen vertrieben und das Land an Soldaten und Spanier vertheilt, und mit der bewunderungswürdigen Thätigkeit und Industrie, welche damals die Spanier vor allen andern Nationen erhob, versetzte der General nun hieher von Spanien und von der Insel Madera alle Arten von Fruchtbäumen, von Garten- und Feldfrüchten, und vorzüglich Zuckerrohr. Prinz Heinrich der Seefahrer hatte es aus Sicilien nach Madera verpflanzt; Siciliens Clima war ihm nicht besonders günstig, in Madera trieb es viel besser; noch besser in Canaria. In wenig Jahren sahe man Zuckerplantagen überall wo ein Bach auf das Land geführt werden konnte, und eilf Zuckermühlen waren unaufhörlich in Arbeit. Die Fichten-, Lorbeer-, Terebinthen- und Lentiscuswälder wichen der Cultur, und die Thäler füllten sich mit Ceratonien, Pfirschen, Granaten, Orangen. — Mit dem Spanischen Korn erschienen Spanische Pflanzen, und die Europäische Flora ward hier zum erstenmal mit der Africanischen vermengt.

Durch die Schlacht von Vittoria unterwarf sich Alonzo de Lugo die Insel Teneriffa; und gleich darauf, am 25. Juli 1495, legte er den Grund der neuen Stadt St. Cristoval de la Laguna. Wie in Canaria, so vertheilte er auch hier das Eigenthum der Guanches unter seine Soldaten, und nöthigte die vorigen Besitzer, die Knechte der neuen Eigenthümer zu werden. Allein weise sind seine Verordnungen für den Anbau des Landes. Nichts was einer guten Cultur fähig zu sein schien blieb unversucht; selbst Castanien wurden eingeführt und über der jetzigen Stadt Orotava gepflanzt. Die Fichten- und Ericawälder wurden zerstört, und die Castanien bilden dort jetzt einen Wald, der fast nur durch Europäische Blumen, die

er beschützt, seinen Europäischen Ursprung verräth. Nur unter den Castanien findet man die Erdbeere, *fragaria vesca*, die noch hier reife und nutzbare Früchte trägt, in St. Helena nicht mehr; nur hier ist *Fedia olitoria*, *Myosotis scorpioides*, *Satyrium dyphillum*, und in vorzüglicher Menge *Helianthemum guttatum*. — Auf den Aeckern der Höhe erschienen nun *Sherardia arvensis*, *silene maritima*, *Papaver somnifera*, *Myagrum hispanicum*, *Raphanus sativus*; Pflanzen, welche der Natur dieser Inseln so fremd sind.

Im Jahr 1503 zertheilte Alonzo de Lugo das ganze Val Taoro, das Thal von Orotava, in kleine Portionen, und gab es seinen Officieren mit der ausdrücklichen Bedingung Zuckerrohr darauf zu bauen. Das wollte jedoch nicht gelingen wie in dem wärmern Canaria. Schon 1507 überzeugte sich der Gouverneur selbst, dafs der Weinbau viel einträglicher wäre, und das ganze Thal ward mit Weinreben besetzt. Man holte sie von Madera, wohin sie Prinz Heinrich von Candia und aus dem Pelopones hatte versetzen lassen; und auf diese Verpflanzung deutet noch jetzt der Name des Malvoisiers von Icod, Reben von Malvasia. Mit ihnen fanden griechische Pflanzen den Weg zu den Inseln; *Anethum foeniculum*, *Coyx lachryma*, *Rumex bucephalophorus*, *Rumex pulcher*, *Panicum crus galli*, und wahrscheinlich auch *Delphinium staphysagrea*.

Alonzo de Lugo hatte das Verdienst, den Weinstock den Tropenclimaten am meisten genähert zu haben. Immer noch bleiben die einträglichen Weinberge von Golfo auf der Insel Ferro in 27° 48′ die südlichsten der nordlichen Halbkugel und das Extrem der Weincultur gegen die Linie; denn die Weinstöcke von Abuschähr stehen schon in 29° 2′, und werden in Brunnen versteckt, um sie gegen die Sonne zu schützen (Niebuhr Reise II. 99.); Shiraz liegt in 29° 56′ und am Vorgebirge der guten Hoffnung geht schwerlich der Weinbau über 32° hinaus.

Auch Produkte südlicherer Länder wurden frühe nach den Inseln verpflanzt. Die vielen Zuckerplantagen und Mühlen in Canaria erforderten zu ihrer Bearbeitung mehr Hände als man aufbringen konnte. Da holte man Sklaven von der Küste Guinea, und mit ihnen kam von dort die unschätzbare *Musa*, der Bananenbaum. Gonzalo Fernando de Oviedo erzählt in seiner Geschichte von Indien, dafs schon 1516, nur 23 Jahre nach der Eroberung der Insel, der P. Tomaso de Barlanga, Bischof von Castillo del Oro, auf seiner Reise nach S. Domingo, diesen Baum mit sich über

das

das Meer führte, zum unbeschreiblichen Nutzen für America, wo er nun über das ganze feste Land verbreitet sei. — Wie gern würde man sich dem Vergnügen über diese Nachricht hingeben, bei dem Gedanken, wie diese Musa ein reiches Aequivalent für das treffliche Geschenk der Ertoffel ist, wenn nicht Humboldt erwiesen hätte, dafs mehrere Arten der Musa, und besonders ziemlich gewifs die vorzüglichste von allen, der Arton, schon vor der Entdeckung in America einheimisch und benutzt waren (*Nouveau Mexique* III. 24). Oviedo sagt, er habe die Musa im Convent der Franciscaner in las Palmas in Canaria selbst gesehn. Es mochte daher wohl schon lange sein, dafs man sie eingeführt hatte. Wo jetzt Bäche die wärmere Region der Inseln erreichen können, oder dort Quellen entspringen, sind sie gewifs von Bananenbäumen bedeckt, ja in einigen Thälern scheinen sie nicht mehr gepflanzt. So ist es am quellenreichen Ufer von la Rambla bei Orotava auf Tenerif, so im reizenden Thale von Ygueste. Die Sklaverei, mit welcher zugleich man den schönen Baum auf den Inseln einführte, ward glücklicherweise von America her wieder vertrieben. Der Zuckerbau ward sehr schnell nach St. Domingo übergeführt, und mit so viel Glück und Ertrag, dafs Canaria's Zuckerernten nicht mehr mit den Americanischen zu concurriren vermochten. Nach hundert Jahren schon waren fast alle Pflanzungen zu Mais und Weizenfeldern verändert. Die Neger verloren sich; es blieb von ihnen nur eine kleine Colonie, die ganz abgesondert in Felsenhöhlen über Tiraxana in Gran Canaria sich anbauten. Dort wohnen sie noch; selten und vielleicht in einer Reihe von Jahren nicht, kommt einer von ihnen nach der Stadt las Palmas herunter, und erweckt dann ein immer wieder erneuertes Erstaunen über die schwarzen Canarier. Denn mit der Erinnerung an die Zuckercultur hat man auch den ihres Ursprungs gänzlich verloren. Zuckerrohr wird jetzt nur noch allein auf der Insel Palma gebaut, um den Nonnenklöstern der Stadt das nöthige Material zu ihren Confituren zu liefern.

Americanische rückkehrende Schiffe verbreiteten sehr bald zwei Gewächse, welche jetzt über den ganzen Süden von Europa einheimisch geworden sind, und die nun wesentlich zur Flora der Canarischen Inseln gehören. *Cactus Opuntia* und *Agave americana*. Jene, die einen trocknen und dürren Boden vorzüglich zu lieben scheint, wird in den heifsen Monaten am Ende des Sommers durch ihre saftige Frucht den Bewohnern der Gegenden eine grofse Erquickung, die genöthigt sind, von Meilenweit ihr Trinkwasser

zu holen; daher sind bewohnte Orte jederzeit mit einer grofsen Menge Cactusstauden umgeben. Auch die Agave wird nicht ungern gesehn. Ihre Blätter dienen häufig das Dach kleiner Hütten zu bilden, ihre Blüthen werden begierig von Kindern gegessen und die Fasern der Blätter werden zu mannigfaltigen Geweben verarbeitet. In Gran Canaria, gegen das Innere, sind die Wege zu beiden Seiten dicht mit solchen Pflanzen besetzt, aus deren weitverbreiteten Blätterrosen die Blumenstiele in langer Reihe hervorsteigen wie Candelabern. Viele Bewohner der Höhlenstadt Atalaya, wo zweitausend Menschen in dem Innern der Erde ohne Spur von Haus wohnen, holen die Blätter und verarbeiten sie zu Matten, zu Gurten und Strikken, welche dann überall über die Inseln verführt werden.

Den Bau der Bataten (*Convolvulus Batatas*) verdanken die Inseln ebenfalls der Verbindung mit America; doch hat er nie sehr weit sich ausbreiten können; denn Bataten erfordern zu ihrem Gedeihen einen häufig gewässerten Boden und eine Mitteltemperatur, welche nie unter 15 Grad R. herabsinkt; zwei Bedingungen, welche vereint nicht häufig gefunden werden können. Nur in St. Andrea auf Teneriffa, in Tazacorte auf Palma und in wenig Gegenden von Canaria werden diese Früchte gebaut. Ich habe indefs nicht bemerkt, dafs durch sie andere Pflanzen von America wären eingeführt worden, welches bei der vielen Bearbeitung der Bataten auch nicht leicht möglich ist. Oder sollte vielleicht mit Bataten jene wunderbare *Bowlesia* (*Drusa*) *oppositifolia* eingeführt worden sein, deren wenige ähnliche Arten nur in Peru vorkommen, und die in Teneriff nicht mit wilden, sondern nur mit Ruderatpflanzen vereinigt gefunden wird. Ein Geschlecht, so sonderbar in seiner Form, dafs man schwer sich entschliefst, die verschiedenen Arten desselben durch die Natur selbst an so entlegnen Punkten der Welt hingeworfen zu glauben.

Endlich, und vielleicht von allen am spätesten, ward auch die Ertoffel angebaut. Es ist in der Erinnerung geblieben, dafs sie Don Juan Baptist de Castro im Jahr 1622 aus Peru mitbrachte und auf seine Besitzungen in Icod el alto versetzte. Dort wird sie noch jetzt in ansehnlicher Menge und mit viel Vorsorge gepflanzt, und von dort ward sie nach Canaria, Palma und Ferro verbreitet. Indefs gedeiht sie nicht wohl.

Welches Hesperidenland würde nicht Teneriffa immer geblieben, immer noch mehr geworden sein, hätte Alonzo de Lugo's Eifer im Anbau der Insel etwas mehr die Oeconomie der Natur auf Inseln bedacht! Er selbst

war genöthigt einige Verordnungen zu machen, um die wilde Wuth zu steuern, mit welcher die Wälder vernichtet wurden; allein er konnte es noch erleben, dafs seine neue Stadt Laguna, die sonst die Wälder berührte, sie nur noch von fern sahe. Der Ritter Scory (*Purchas Pilgrimages V.* 7. B. 12. Cap.), der 1582 sich in Teneriffa aufhielt, beschreibt immer noch die Lagune, von welcher die Stadt ihren Namen hat, als einen grofsen reizenden See, der mit einer grofsen Menge Wasservögel bedeckt war, und über welchem sich alle Abend wilde Falken versammelten und den Negern zu belustigenden Jagden Veranlassung gaben. Jetzt ist es ein kleiner Sumpf, den wenige Reisende sehen, und in dem nur im Winter etwas Wasser sich sammelt. Es kommen keine Quellen mehr, keine Bäche aus Wäldern der Höhe, dieses Becken zu füllen. Als Edens im Jahr 1713 den Gipfel des Pico bestieg, fand er noch in 5 und 6000 Fufs Höhe einen Fichtenwald, von denen ein Baum durch die Ausbreitung seiner Zweige einem kleinen Schiff ähnlich sahe und daher *la Caravela* genannt ward. Jetzt ist die ganze Höhe baumlos und trocken. — Sonst, wenn die warme Luft und der Dampf aus der unteren Zone am Meer sich erhoben und die Region über den Wäldern erreichten, fanden sie hier keinen Boden den die Sonne erwärmen oder von dem die Wärme wieder zurückstrahlen konnte. Der Dampf mufste in der kälteren Temperatur über den Bäumen hervortreten, die Tropfen sammelten sich an den noch kälteren Blättern und fielen auf den Boden zu Quellen zusammen. Jetzt ist die Strahlung vom kahlen Boden so stark, dafs die Wolken in einem grofsen Theile der Insel nicht mehr hervortreten, und was die Erniedrigung der Temperatur an Dampf hervortreiben könnte, wird durch die grofse Trockenheit der Höhe reichlich aufgewogen und ersetzt. Dieser Dampf, welcher, auf der Insel erzeugt, auch wieder zu neuer Fruchtbarkeit auf die Insel herabfallen sollte, wird jetzt über die Höhen weg, vielleicht in weit entlegene Zonen geführt, vielleicht nutzlos in das grofse Weltmeer wieder geworfen. So wird denn Teneriffa, über der sich einst der ganze Zauber der Natur ergossen hatte, zu dem werden, was durch gleiche Schonungslosigkeit St. Jago der Cap Verdischen Inseln ist, ein dürrer Felsen im Meer. Unsere Floren werden erzählen, welche Bäume und Pflanzen einst Teneriffa bedeckten, und die Nachwelt wird es kaum glauben.

Von der ursprünglichen Flora.

Fünfe von den Canarischen Inseln erheben sich zu so bedeutenden Höhen, dafs man an den Abhängen der Berge das Clima sehr verschiedener Zonen wieder auffinden kann. Es sind Teneriffa, Canaria, Palma, Gomera und Ferro. In ihnen reifen an den Ufern des Meeres die Früchte der Palmen, wozu doch selbst der nordliche Theil von Marocco noch nicht warm genug ist, und auf den Höhen der Berge erinnert *Arabis alpina* an sehr gemäfsigte nordische Climate. — Die Produkte des Bodens sind diesen verschiedenen Climaten gemäfs, und daher ist die Flora dieser Insel weit reicher, als sie es sein würde, wenn sie nur, wie Lancerote und Fortaventura, wegen ihrer geringer Erhebung, die Temperatur einer einzigen Zone, wenn auch der wärmsten, geniefsen könnte.

Ich habe geglaubt, dafs man die Vegetation dieser Inseln bequem in fünf Abtheilungen eintheilen könnte, die sich hinreichend und auch wohl auffallend durch die Natur und den Anblick der Pflanzen auszeichnen, welche in ihnen vorzüglich häufig sind.

I. Die Africanische Zone bis 1200 Fufs Höhe. Die Zone der Bananen und Palmen.

II. Die Zone der Europäischen Cultur bis 2600 Fufs. Sie umfafst die einträglichsten Weinberge; die Kornfelder; begreift daher die meisten von Europa her eingeführten Gewächse, und ruft deshalb leichter Europäische Natur ins Gedächtnifs.

III. Die Zone der Wälder, der dichtbelaubten; der Lorbeeren, Ardisien, Mocanera, *Ilex Perado* und *Olea arborea.* Die Wolken liegen am Tage darüber, und in ihrem Schatten wachsen die den Inseln eigenthümlichen Waldpflanzen *Digitalis*, *Dracocephalum*, *Sideritis*, *Ranunculus Teneriffae.*

IV. Die Zone der Fichten, des *Pinus canariensis*, bis 5900 Fufs. Fast alle grofsblättrigen Bäume bleiben weit unter dieser Zone zurück, nur der Brezo, *Erica Scoparia*, geht nahe bis zur gröfsten Höhe hinauf.

V. Die Zone des *Spartium nubigenum*, der *Retama blanca*, bis 10380 Fufs. Sie erscheint kaum eher, als wo der Pinus verschwin-

det, und bedeckt mit ihren wohlriechenden Blumen die Bimsteinfelder und Laven.

Tausend Fuſs bis zum höchsten Gipfel des Pic sind völlig von aller Vegetationsspur entblöſst.

Die Summe aller phänerogamen Pflanzen, welche wir in diesen fünf Zonen gesehn haben, nämlich aller derjenigen, welche ohne Zuthun der Menschen wachsen, beläuft sich auf 472 verschiedene Arten. Von diesen sind wahrscheinlich 101 Arten eingeführt, so daſs die eigenthümliche und ursprüngliche Canarische Flor bis jetzt aus 371 Arten besteht. Spätere Entdeckungen werden diese Summe schwerlich bedeutend vermehren.

Eine so geringe Zahl in einem so vortheilhaften und so verschiedenartigen Clima könnte wohl Manchen verwundern, um so mehr, wenn man bedenkt, daſs schon der undankbare und einförmige Boden in der Gegend von Berlin 874 phänerogame Pflanzen ernährt. — Allein in diesem Phänomen erscheint die Natur der Inseln ausgedrückt. Hätten wir ein Verzeichniſs der auf den Azoren ursprünglich einheimischen Pflanzen, gewiſs würde es nicht das Viertel dieser Menge erreichen. — Der bekannte Französische Naturforscher Du Petit Thouars fand auf der Insel Tristan d'Acunha in 37° 12′ südlicher Breite, und deren Spitzen sich in den Wolken verlieren, von phänerogamen Pflanzen nicht mehr als 25 verschiedene Arten; und in St. Helena steigt die ursprüngliche Flora, nach Roxburgh's Catalog, ebenfalls auf nicht mehr als 34 Arten *). — So ist doch schon in der Menge auf den Canarischen Inseln die Nachbarschaft des groſsen Continents sichtbar; und sie würde nur wunderbar sein, wenn entlegenere Inseln wie die Azoren eine noch gröſsere, ja auch nur eine gleiche Menge aufweisen könnten.

Wenn man diese Flora mit der nächsten etwas bekannten Flora vergleicht, von denen die sich im ziemlich gleichen Clima verbreiten, mit derjenigen der Gegend von Algier, welche Desfontaines so fleiſsig untersucht und *Flora Atlantica* genannt hat, so werden wir auch durch sie auf einige sehr auffallende Eigenthümlichkeiten der Inseln geleitet. — Desfontaines zählt 1416 Arten auf in 536 Geschlechtern. Die Canarische Flor enthält 375 Arten in 212 Geschlechtern, die Flor von St. Helena 34

*) *Beatson Tracts on St. Helena p. 295 sq.*

Arten in 25 Geschlechtern. Es ist also das Verhältniſs der Geschlechter zu den Arten in Norden von Afrika = 1 : 4,2
in den Canarischen Inseln = 1 : 1,77
auf St. Helena - - - = 1 : 1,48 *)

Das ist eine erstaunliche Verschiedenheit in Formen auf den Inseln! In der That ist sie auch bei dem ersten Anblick auffallend. Von vielen Geschlechtern erscheint nur eine einzige Art. — Die Individuen der Geschlechter auf Continenten breiten sich aus, entfernen sich weit, bilden durch Verschiedenheit der Standörter, Nahrung und Boden Varietäten, welche, in ihrer Entfernung nie von andern Varietäten gekreuzt und dadurch zum Haupttypus zurückgebracht, endlich constant und zur eigenen Art werden. Nicht so auf Inseln. Gewöhnlich in engen Thälern oder im Bezirk schmaler Zonen gebannt können sich die Individuen erreichen und jede versuchte Fixirung einer Varietät wieder zerstören. Es ist dies so ungefähr, als Sonderbarkeiten oder Fehler der Sprache durch das Haupt in einer Familie einheimisch werden, dann durch Verbreitung der Familie über einen ganzen Distrikt. Ist dieser abgesondert und isolirt, und bringt nicht die stete Verbindung mit andern die Sprache auf ihre vorige Reinheit zurück, so wird aus dieser Abweichung ein Dialekt. Binden natürliche Hindernisse, Wälder, Verfassung, Regierung die Menschen des abweichenden Distrikts noch näher zusammen, und trennen sie ihn noch schärfer von den Nachbarn, so fixirt sich der Dialekt und es wird eine völlig verschiedene Sprache.

Auf den Inseln ist die ganze Menge getheilt in
63 Mono- und 308 Dycotyledonenpflanzen.

In der Atlantischen Flor hingegen in 279 — und 1137 — — —

Das Verhältniſs beider auf den Inseln = 1 : 4,9 ist also dem, wie es Robert Brown für Tropenclimate bestimmt hat, 1 : 5, weit näher, als das Verhältniſs wie 1 : 4, so wie es in Africa erscheint. Indeſs ist dies weniger Folge der tropischen Lage, als der stets trockenen Atmosphäre in der Höhe des Pic, und des daher entstehenden Mangels an Gräsern.

Merkwürdiger ist das überwiegende Verhältniſs der Syngenisten auf den Inseln. Der 8,76 Theil der ganzen Menge, statt daſs er in Nordafrica

*) Nach Humboldt's berühmtem Werk *de distribut. Plantarum* ist in Frankreich das Verhältniſs der Geschlechter zu den Arten wie 1 : 5,7, in Lappland wie 1 : 2,3.

nur den 29sten Theil ausmacht. Auch in St. Helena bilden sie den 3,4 Theil der Masse. Es sind die ersten Anfänge der Floren dieser Climate.

In Desfontaines Catalog ist keine Familie reicher an Arten als die Leguminösen. Sie bilden den 9ten Theil. In der Canarischen Flor nur den 26sten Theil.

Nur den Semperviven scheint auf diesen Inseln ein besonders günstiges Vaterland gegeben zu sein. Fast jedes Thal kann von ihnen eine neue Art aufweisen, und wahrscheinlich hat man sie noch lange nicht alle entdeckt. Von allen bekannten Arten von Semperviven enthalten die Canarischen Inseln $\frac{4}{7}$, und denen dreizehn, die man vorher schon kannte, hat Christian Smith noch sieben ganz neue und unbeschriebene Arten zusetzen können.

Bei einem allgemeinen Blick über die Canarische Flor ergiebt sich sehr leicht, dafs sie zu einer Europäischen durchaus nicht mehr gehöre. Die Canarischen Inseln sind wesentlich Africa zugetheilt. Die wenigen Geschlechter, die sie mit Südeuropäischen in Gemeinschaft besitzen, haben doch ihre Mittelpunkte in Europa nicht, sondern in Syrien, Aegypten und der Barbarei. Daher ist auch hier Nichts mehr von dem, was in der Flor Europäischer Climate den Haupteindruck hervorbringt. Keine Wiesen bedekken den Boden. Denn von allen Canarischen sind nicht mehr als drei Arten jährige Pflanzen, alle andern sind Büsche. Keine Potentille findet sich, keine Ranunkeln der Wiesen, keine Rosen; nicht eine Art von Hieracium, selbst auch die Nelke nicht mehr. Im Ganzen aber sind unter den 371 ursprünglichen Arten nur 54 den Syrischen und Nordafricanischen gleich, und doch möchten von ihnen wohl noch gegen die Hälfte eingeführt sein. — 28 Arten sind den Inseln mit Madera gemein und 175 Arten sind jetzt noch der Canarischen Flor ausschliefslich eigenthümlich geblieben. Freilich mag auch wohl der gröfsere Theil von diesen im Atlas, vielleicht selbst noch in Aegypten und Syrien seinen Anfangspunkt finden; aber einige andere scheinen von ganz anderen Seiten bis hieher vorgerückt worden zu sein. Die Pittosporen strahlen von Neuholland aus über das Cap hin. Dracaena, Ceropegia erscheinen von Ostindien her, durch die Mitte des wärmeren Africa. Das der Rubiafamilie gehörende *Placoma pendula*, die baumartigen Euphorbien sind ein Produkt der warmen Libyschen Wüsten. — Einige kommen auch offenbar vom Norden herunter, und als wenn uns die Natur hierüber keinen Zweifel zulassen wollte, so stehen sie

noch jetzt den Orten gegenüber, in denen sie überall verbreitet und daher mehr einheimisch scheinen. *Lavendula pinnata*, offenbar eine Pflanze von Madera, steht häufig in den Thälern und auf den Bergen von Taganana, Madera genau gegenüber; auf der anderen Seite im Süden von Tenerif gegen St. Cruz findet sie sich nicht, noch weniger in irgend einem anderen Thale von Teneriffa. Nur in den Thälern von St. Andrea und Ygueste, wo die Berge etwas niedriger werden und das Höhenextrem der Lavendula nicht erreichen, geht diese auch südlich herüber, erreicht aber auch dort noch den Ausgang der Thäler nicht. *Erica arborea*, der Texobaum, so gemein auf Madera, und auch noch häufig in Portugal und Spanien, steht nur in den Bergen nordostlich von Laguna, und nie auf der Südseite der Insel. — *Aspidium aemulum*, ein Farnkraut von Madera, erscheint auf der Maderaseite von Palma, und nur dort.

Die Canarische Flor wird daher wichtig durch die Betrachtung dieses Zusammenkommens von Vegetationsstrahlen, von denen hier einige verlöschen, andere mit voller Kraft, und vielleicht noch weit in die See bis gegen die Azoren hin, wirken. Die grosse Trennung von Afrika durch die alles tödtende Wüste hat schon auf diese Flora den Einfluss verloren.

Verzeichniss der wildwachsenden Pflanzen, welche bis jetzt auf den Canarischen Inseln sind gefunden worden.

(Alle unterstrichene sind von Dr. Christian Smith neu entdeckt. Die mit einem * bemerkten sind wahrscheinlich eingeführt.)

Acrostichum lanuginosum.
- - - - canariense.
- - - - maranthus.
Asplenium adianthum nigrum.
- - - - palmatum.
Blechnum boreale.
Woodwardia radicans.
Pteris aquilina.
Pteris longifolia.
- - arguta s. incompleta.
- - caudata.
Cheilanthes microphylla.
Adianthum reniforme.
- - - - tenerum.
Trichomanes canariensis.
- - - - speciosa.

Aspi-

Aspidium aculeatum.
- - - umbrosum.
- - - molle.
- - - axillare.
- - - aemulum.
Cyathaea fragilis.
Ceterach aurea.
Grammitis leptophylla.
Ophioglossum lusitanicum.
Equisetum ramosissimum.
Lycopodium plumosum.
Myriophyllum spicatum.
Potamogeton natans.
- - - - pusillum.
Lemna gibba.
Typha angustifolia.
Arum arizarum.
- - Dracunculus.
* Carex vulpina.
* - - muricata.
Schoenus mucronatus.
Scirpus dichot. affin.
- - - maritim. affin.
- - - globiferus.
Cyperus longus.
- - - pygmaei affin.
- - - glomeratus Sm.
Aristida gigantea v. canariensis.
* Phalaris canariensis.
- - - tuberosa.
* Panicum glaucum.
* - - - crus galli.
* - - - repens.
* Paspalum membranac. v. stonolif.
* Milium Lendigerum.
* - - - coerulescens.

* Agrostis hirsuta
* - - - miliacea.
Stipa (tenacissima) tortilis.
Saccharum Teneriffae.
Cenchrus ciliatus.
Aegilops - -
Rottboellia palmensis affin. fascicul. Desf.
Aira cariophyllaea.
Dactilis fasciculata.
Cynosurus tenuis. Sm.
- - - - echinatus.
Chrysurus cynosuroides.
* Hordeum murinum.
* Triticum repens.
* Bromus madritense.
* - - - rubens.
- - - dystachios.
* - - - sylvaticus.
* - - - multiflorus.
Festuca filifolia Sm.
* - - - myurus.
- - - laxa Mas.
Poa filiformis Sm.
Briza maxima.
- - viridis.
* Poa eragrostis.
* Avena nodosa.
* - - elatior affin.
* - - loefflingiana.
* Coix Lachryma.
Digitaria filiformis.
* Eleusine Coracana.
Cynodon Dactylon.
* Sorghum halepense.
* Agrostis Spica Venti.

* Polypogon monspelienses.
Dracaena Draco.
Asparagus exaltatus Sm.
\- - - retrofractus.
\- - - aphyllus.
\- - - verticillatus.
\- - - acutifolius.
Ruscus androgynus.
Smilax latifolia.
\- - - mauritanica.
\- - - aspera.
Tamnus Europaeus.
Juncus acutus.
\- - - purpureus.
\- - - pilosus.
\- - - effusus.
Luzula canariensis Poir Enc.
Commelina canariensis Sm.
Pancratium canariense Carr Syd. Edw. XXVII. 174.
Asphodelus ramosus.
\- - - - canariensis.
Scylla hyacinthoides.
Allium graminifolium.
* Gladiolus communis.
* Iris foetida.
* Satyrium diphyllum.
* - - - maculatum.
Daphne Gnidium.
Laurus nobilis.
\- - - foetens (v. Til).
\- - - Indica.
\- - - Barbusano.
* Rumex pulcher.
* - - - bucephalophorus.
\- - - Lunaria.
Rumex tingitanus.
* - - - obtusifolius.
* Polygonum Persicaria.
* - - - - aviculare.
\- - - - maritimum.
* - - - - convolvulus.
\- - - - salicifolium.
* Phytolacca decandra.
Bosea Yervamora.
Salsola Kali.
\- - - fruticosa.
\- - - divaricata Mas.
\- - - lanata Mas.
\- - - ericifolia Mas.
Beta patula.
\- - pumila.
* Chenopodium viride.
\- - - - - urbicum.
\- - - - - ambrosioides.
Atriplex glauca.
Salicornia fruticosa.
Amaranthus viridis.
Achyranthes nivea.
\- - - - argentea.
Illecebrum canariense.
\- - - - aristatum.
Plantago coronopifolia.
\- - - Lagopus.
\- - - Cynops.
\- - - major.
Statice pectinata Mas. bellidifol. Cav.
Statice arborea.
Globularia longifolia.
Samolus Valerandi.
Veronica Becca Bunga.

Veronica agrestis.
- - - anagallis.
Euphrasia viscosa.
Orobanche.
Justicia hyssopifolia.
Jasminum odoratissimum.
- - - - pumilum.
Olea excelsa.
Eranthemum salsuloides.
Verbena officinalis.
- - - humifusa Sm.
Salvia canariensis.
- - aegyptiaca.
- - verbenaca.
Teucrium canariense.
- - - - spinosum.
- - - - Iva.
Satureja lanata.
Lavandula abrotanoides.
- - - - pinnata.
- - - - Stoechas.
Sideritis canariensis.
- - - candicans.
Mentha sylvestris.
- - - pulegium.
* - - - rotundifolia.
* Lamium purpureum.
* Stachys recta.
Marrubium vulgare
Origanum creticum.
Thymus myrthifolius.
- - - therebinthinaceus.
Thymbra.
Melissa Nepeta.
Dracocephalum canariense.
Bisteropogon canariense.
Bisteropogon plumosum.
- - - - - - punctatum.
Scrophularia betonicifolia.
- - - - fruticosa.
- - - - glabrata Mas.
Linaria spartioides Brouss.
Antirrhinum Orontium.
Digitalis canariensis.
Verbascum sinuatum affin.
* Hyoscyamus albus.
Datura Methel.
* - - - Stramonium.
Atropa racemosa.
Physalis aristata.
- - - Somnifera.
Solanum nigrum.
- - - Vespertilio.
- - - virgatum Lam.
Lycium afrum.
- - - europaeum.
Messerschmidia fruticosa.
Heliotropium plebejum Mas. Herb. Banks.
Heliotropium europaeum.
* Echium australe.
- - - candicans.
- - - giganteum.
- - - strigosum.
- - - thyrsiflorum.
Myosotis scorpioides affin.
* Anchusa italica.
* Cynoglossum pictum.
Convolvulus canariensis.
- - - - floridus.
- - - - scoparius. Lignum Rhodium.

* Convolvulus arvensis.
* - - - - Soldanella.
* - - - - althaeoides.
- - - - volubilis Brouss. (nov.)
Convulvulus Taganens. (nov.)
Cressa cretica.
Cuscuta canariensis.
Exacum viscosum.
Chironia Centaureum.
Ceropegia aphylla Haworth.
Periploca laevigata.
Erica arborea.
- - Scoparia.
Clethra arborea.
Arbutus callicarpa.
Canarina Campanula.
Campanula Erynus.
- - - - Lobelioides.
- - - - aurea. (teste-la Bill.)
Prehnanthes spinosa.
- - - - pinnata.
* Lapsana communis.
Sonchus radicatus.
- - - fruticosus.
- - - pumilus.
Crepis Lagopoda Sm.
- - foetens.
- - coronopifolia.
- - taraxifolia.
* Tolpis barbata.
* Picris echioides.
* - - hieracioides.
* Leontodon Taraxacum.
Scorzonera succulenta Mas. Picridium Succ.
* Tragopogon porrifolium.
Andryala pinnatifida.
- - - cheirantifolia.
* Cichorium divaricatum.
* Scolymus maculatus.
Carthamus salicifolius.
* Carduus marianus.
- - - parviflorus.
Carlina xeranthemoides Mas.
Cinara horrida.
Centaurea calcitrapa.
* - - - - Lippii.
* - - - - Apula.
- - - - Teydis.
- - - - cynaroides.
* - - - - galactites.
- - - - canariensis W,
Hyoseris Hedypnois.
Conyza sericea.
- - - canariensis.
- - - saxatilis.
- - - gouani affin.
Senecio palmensis Sm.
Tanacetum fruticosum.
Chrysanthemum pinnatifidum.
- - - - - - - anethifolium.
- - - - - - - crithmifolium.
- - - - - - - fruticosum.
* Inula Oculus Christi.
- - viscosa.
Tussilago rubra.
- - - - nutans.
Cacalia Kleinii.
Cineraria Tussilaginis.
- - - cruenta.
- - - populifolia.
- - - lanata.

* Calendula arvensis.
* Xanthium Strumarium.
* Matricaria Parthenium.
Gnaphalium luteo album.
Artemisia argentea.
* - - - ramosa Sm.
* - - - reptans Sm.
* Anthemis cotula.
- - - revoluta Sm.
Buphthalmum aquaticum.
- - - - - maritimum.
- - - - - spinosum.
- - - - - sericeum.
* Bidens pilosa.
* Achillaea nudicaulis.
Dipsacus sylvestris.
* Scabiosa grandiflora.
- - - fruticosa Sm.
Fedia calcitrapa.
* - - Olitoria.
Rubia fruticosa.
* - - lucida.
* - - angustifolia.
Valantia filiformis.
- - - spuria.
Galium aparine.
- - - parisiense.
* Sherardia arvensis.
Asperula.
Phyllis Nobla.
Placoma pendula.
Viburnum rugosum.
Sambucus palmensis.
Hedera canariensis.
Crithmum canariense.
- - - - latifolium.

Pimpinella cumbrae. (nov.)
Peucedanum aureum.
Sium repens.
- - nodiflorum.
* Ammi majus.
* Scandix Pecten.
Smyrnium Olusatrum.
* Athamantha Libanotis.
* Anethum graveolens.
Daucus tingitanus.
* Apium Petroselinum.
* Caucalis.
Hydrocotile.
Bowlesia oppositifolia.
Clypeola maritima.
* Adonis aestivalis.
* Ranunculus muricatus.
- - - - Teneriffae.
- - - - parviflorus.
Nigella Damascena?
* Aquilegia vulgaris.
* Delphinium staphysagrea.
* Papaver Somnifer.
Chelidonium glaucium.
Fumaria.
Sysimbrium millefolium.
* Raphanus sativus.
Crambe strigosa.
Arabis alpina.
Cheiranthus scoparius.
- - - - longifolius.
- - - - cumbrae. (nov.)
* Sysimbrium Irio.
Erysimum bicorne.
* Lepidium Iberis.
* Myagrum hispanicum.

* Sinapis hispida.
* Reseda luteola.
- - - scoparia.
Hypericum canariense.
- - - - floribundum.
- - - - glandulosum.
- - - - reflexum.
- - - - salicifolium.
- - - - coadunatum.
Geranium anemonifolium.
* - - - pusillum.
* - - - dissectum.
Pelargonium canariense W.
Oxalis corniculata.
* Erodium malacoides.
- - - moschatum.
* - - - Ciconia.
Malva alcaea.
* - - rotundifolia.
Sida acerifolia.
- - canariensis.
Cistus vaginatus.
- - monspeliensis.
- - ocreatus.
- - mollis v. canariensis Jacq.
Helianthemum guttatum,
Viola cheirantifolia.
- - canina affin.
- - odorata.
Zygophyllum album.
* Fagonia cretica.
Ruta pinnata.
Polycarpaea Teneriffae.
- - - - gnaphaloides.
- - - - carnosa Sm.
- - - - linearifolia.

* Minuartia dichotoma.
* Spergula arvensis.
Arenaria maritima.
Dianthus prolifer.
* Silene gallica.
- - Lagunensis. (nov.)
- - maritima.
- - nutans.
Frankenia laevis.
- - - ericifolia Sm.
Linum procumbens.
* Sagina procumbens.
* Alsine media.
Sempervivum barbatum Sm.
- - - - - caespitosum Sm.
- - - - - aureum Sm.
- - - - - foliosum Sm.
- - - - - urbicum Sm.
- - - - - annuum Sm.
- - - - - punctatum Sm.
- - - - - villosum.
- - - - - hirtum. villos. affin.
- - - - - canariense.
- - - - - ciliatum Brouss.
- - - - - dodrantale.
- - - - - monanthos.
- - - - - tortuosum.
Cotyledon umbilicus.
* Cactus Opuntia.
* - - - Tuna.
* Portulaca oleracea.
Tamarix canariensis W.
Aizoon canariensis.
Mesembrianthemum nodiflorum.
* - - - - - - - chrystallinum.
Visnea Mocanera.

Epilobium pubescens.
Lythrum hyssopifolium.
Poterium fruticosum.
- - - globosum.
* Fragaria vesca.
Prunus Hixo Cav.
Agrimonia Eupatoria.
* Ceratonia Siliqua.
Ulex Europaeus.
Spartium nubigenum.
- - - microphyllum Cav. (cytisus foliolosus l'Herit.)
Spartium monospermum.
- - - scoparium.
- - - congestum W.
Genista nitens W. linifoliae affin.
- - - canariensis L.
Cytisus prolifer.
Ononis longifolia W.
* Psoralea bituminosa.
Trifolium glomeratum.
* - - - - angustifolium.
* Melilotus parviflorus.
* Medicago turbinata.
* - - - - echinata.
Lotus glaucus.
- - ornithopoides.
* Astragalus hamatus.
* Biserrula Pelecinus.
* Lathyrus aphaca.
* Vicia sativa.
- - aphylla.
- - atropurpurea.
* Scorpiurus echinatus.
* - - - - sulcatus.
Rhus coriaria.

Cneorum pulverulentum.
Pistacia Lentiscus.
- - - Therebinthus.
Ilex Perado.
Rhamnus crenulatus.
- - - glandulosus.
- - - coriaceus (Teydis racemosus W.)
Celastrus cassinoides.
Pittosporum undulatum.
- - - - carnosum.
Ardisia excelsa.
Scleroxylon canariensis W. Berl. Mag.
Euphorbia canariensis.
- - - - balsamifera.
- - - - piscatoria.
- - - - dendroides.
- - - - Peplus.
- - - - Lathyris.
- - - - Paralias.
* - - - - Peplis.
- - - - aphylla Brouss.
- - - - platiphylla.
* - - - - Helioscopia.
* - - - - polygonifolia.
- - - - atropurpurea.
- - - - hyssopifolia.
Mercurialis annua.
- - - - ambigua.
Ricinus communis.
Bryonia verrucosa.
Cucumis Colocynthis.
Urtica baccifera.
- - grandifolia.
Parietaria officinalis.

Parietaria Judaica.
Boehmeria arborea.
Forskolea angustifolia.
* Ficus Carica.
Salix canariensis Sm.
- - amygdalina.
Salix glauca.
Myrica Faya.
* Castanea vesca.
Ephedra altissima.
Juniperus Oxycedrus affin.
Pinus canariensis.

Pflanzen, welche bis jetzt den Canarischen Inseln ausschliefslich eigen sind.

Potamogeton Pusillum.
Scirpus globiferus Mas.
Cyperus glomeratus Sm.
- - - pygmaei affin.
Aristida gigantea.
Stipa tortilis.
Rottboellia palmensis Sm.
Dactylis fasciculata Sm.
Poa Filiformis Sm.
Asparagus exaltatus Sm.
- - - - aphyllus.
- - - - verticillatus.
Ruscus androgynus. Gilbarbera.
Luzula canariensis.
Commelina canariensis Sm.
Asphodelus ramosus.
- - - - canariensis. Gamon.
Scylla hyacinthoides.
Allium graminifolium.
Pancratium canariense.
Bosea Yervamora. Hediondo *).
Salsola divaricata.
- - - lanata.
- - - ericifolia.
Atriplex glauca.
Polycarpaea Teneriffae.
- - - - gnaphaloides.
- - - - carnosa.
- - - - linearifolia.
Statice arborea.
Justicia hyssopifolia. Mataprieta.
Physalis aristata. Oroval.
Solanum Vespertilio.
Rumex Lunaria. Vinagrera.

Eran-

*) *Yervamora ist Solanum nigrum.*

Eranthemum salsuloides. **Romero marino.**

Verbena humifusa Sm.

Salvia canariensis.

Teucrium canariense.

Satureja lanata Sm.

Lavandula abrotanoides.

Sideritis canariensis.

- - - candicans.

Thymus myrthifolius.

- - - therebinthinaceus W.

Dracocephalum canariense. **Algaritopa.**

Bisteropogon canariense.

- - - - - plumosum.

- - - - - punctatum.

Scrophularia fruticosa.

Linaria spartioides.

Scrophularia glabrata.

Digitalis canariensis. **Dedalera.**

Messerschmidia fruticosa.

Heliotropium plebejum Mas.

Echium candicans.

- - - giganteum. **Taginaste.**

- - - strigosum.

- - - thyrsiflorum.

- - - armatum.

Convolvulus canariensis. **Correhuela de montana.**

Convolvulus floridus. **Guaybin.**

- - - - volubilis.

- - - - Taganensis.

- - - - Scoparius. (**Leña noel** ex corupt. **Legno aloës.**)

Cuscuta canariensis. **Tircuela.**

Exacum viscosum.

Ceropegia aphylla. **Mattaperro.** (**Canar.**)

Periploca laevigata. **Cornical.**

Arbutus Callicarpa. **Madroña.**

Canarina Campanula. **Bicararo.**

Prehnantes Spinosa. **Alhulaja.**

- - - - pinnata. **Alfife** (**Teneriffe.**)

Sonchus radicatus.

- - - fruticosus.

- - - pumilus.

Crepis coronopifolia.

Tolpis (Crepis) Lagopoda Sm.

Scorzonera succulenta Mas. (Picridium Succ.

Carthamus salicifolius.

Carlina xeranthemoides Mas.

Cinara horrida. **Alcauzil.**

Centaurea Teydis *).

- - - - cynaroides **).

*) In den am Fundort selbst gröfstentheils aufgeschriebenen Noten meines trefflichen Freundes finde ich folgendes: *contaurea Teydis suffruticosa ramis angulatis, pedunculis longis, subunifloris basi praesertim foliosis, foliis anguste lanceolatis, petiolatis, serratis, glabris, pedunculorum linearibus. Calycibus ovatis, ore angusto squamis ovatis, superne vers. scarios. dilatat. receptaculo pappoque piloso, corollis flavis. In rupibus praeruptis Angosturae Teydis occident. spectant. via ad Chasna. Tenerif.*

**) *Centaurea cynaroides. Foliis runcinatis longe petiolatis, lobis incisis, tomentosis; caulinis pinnatifidis, supremo integro. Caule simplici stricto striato, subtomentoso. Calyce globoso imbricato, squamis apendice dilatatis, scariosis, membrana terminat. interioribus linea-*

Centaurea canariensis W.
Conyza sericea.
- - - canariensis.
Senecio palmensis *). Turgayte.
Tanacetum fruticosum. Faro (palma).
Chrysanthemum anethifolium.
- - - - - - - crithmifolium.
- - - - - - - fruticosum. Magarsa.
Tussilago rubra.
- - - - nutans.
Cacalia Kleinii. Verode.
Cineraria cruenta.
- - - Tussilaginis.
- - - populifolia.
- - - lanata.
Artemisia argentea. Axeuxo.
- - - ramosa Sm. **).
- - - reptans Sm. ***).
Anthemis revoluta †).
Buphthalmum spinosum.
- - - - - - sericeum. Joriada.
Scabiosa fruticosa nov.
Placoma pendula. Balo.
Rubia fruticosa.
Valantia filiformis.
Viburnum rugosum. Fallado.
Hedera canariensis.
Crithmum canariense.
- - - - latifolium. Perexil de la mar.
Pimpinella cumbrae.
Peucedanum aureum.
Bowlesia (Drusa) oppositifolia.
Ranunculus Teneriffae. Morgallona.
Crambe strigosa.
Cheiranthus scoparius.
- - - - longifolius.

ribus longis. Receptaculo piloso, pappo piloso. Unicum exemplar inter fragm. pumic. declivi occident. mont. Chahorrae supra 8000 *ped.* Dr. Smith's Noten.

*) *Senecio palmensis, fruticosa. Ramis filiformibus pendentib. Fol. linearib. cuneat. profunde dentat. dentib. paucis longis linear. glabris subcarnos. infim. interdum. integerrim. Floribus cymosis pedicellis filiformib. Calyce tubulos. cylindric subcaliculat.* 5 *dentat. Coroll. rad.* 2—3 *linear. disco* 3—5. *pappo. simplici. Receptaculo nudo.* Dr. Smith's Noten.

**) *Artemisia ramosa. Caule tomentoso, sericeo. Foliis bipinnat. pinnis filiformib. Florib. paniculat. erectis. Calycib. suborbiculat. angulatis. Florib. ovatis conicis.* Dr. Smith's Noten.

***) *Artemisia reptans. Calyce haemisphaerico. Florib. racemosis, secundis, nutantib. Caule repente, radicante; foliis pinn. pinnul.* 3 *fidis, paucis, simplicib. Tota planta tomentoso-nivea. — Artemisiae semper modo unico crescunt; una alteras duas excludens.* Dr. Smith's Noten.

†) *Anthemis revoluta. Fol. petiolatis. pinnatif. pinnis oblongis, sinuato crenat. s. lobat. lobis dentat. margine revolutis. supra glaberrim. infra hirsuta. — Juniorib. cum toto petiolo villosis. Peduncul. foliosis. Cymis simplicib. parviflor. pedicellis clavatis. Flores magnae, albae. Frutex pedal. cespitos. ad Rupes part. inferior. convall. Tagananae Teneriff.* Dr. Smith's Noten.

Cheiranthus cumbrae.
Erysimum bicorne.
Reseda scoparia.
Hypericum canariense. Maljurada.
- - - - reflexum.
- - - - coadunatum.
Geranium anemonifolium.
Pelargonium canariense W.
Sida acerifolia. Alamedo.
Cistus vaginatus.
- - - ocreatus.
- - - mollis v. canariens. Jacq.
Ruta pinnata.
Silene Lagunensis.
Frankenia ericifolia Sm.
Sempervivum barbatum.
- - - - - caespitosum.
- - - - - aureum.
- - - - - foliosum.
- - - - - urbicum.
- - - - - annuum.
- - - - - punctatum.
- - - - - canariense. Oreja de abad.
Sempervivum villosum.
- - - - - ciliatum.
- - - - - dodrantale.
- - - - - monanthos.
- - - - - tortuosum.
Visnea Mocanera.
Poterium fruticosum.
- - - - globosum.
Prunus Hixo. (multiglandulosa Cav.)
Spartium supranubium. Retama blanca.
Spartium microphyllum Cav. Retama de cumbre. Codeso.
Spartium congestum affin. (Canaria.)
Cytisus prolifer. (Escobon.)
Lotus glaucus.
- - - ornithopoides.
Vicia aphylla.
Cneorum pulverulentum.
Ilex Perado. Acebiño.
Rhamnus crenulatus.
- - - - glandulosus.
- - - - cumbrae.
Celastrus cassinoides.
Pittosporum undulatum.
- - - - - carnosum.
Ardisia excelsa.
Scleroxylon canariense W.
Tamarix canariensis.
Euphorbia canariensis. Cardon.
- - - - - balsamifera. Tabayba dulce.
Euphorbia aphylla.
- - - - - atropurpurea.
Bryonia verrucosa.
Boehmeria arborea.
Forskolea angustifolia.
Salix canariensis Sm.
Ephedra altissima.
Pinus canariensis.

Von diesen hat jedooh später Dr. Smith auf seiner Fahrt nach Congo noch mehrere auf St. Jago der Cap-Verdischen Inseln entdeckt, allein in weit gröfseren Höhen. Es sind:

Heliotropium plebejum.
Physalis somnifera.
Saccharum Teneriffae.
Buphthalmum sericeum.
Thymus therebinthinaceus.
Tamarix canariensis.
Lotus glaucus.
Eranthemum salsuloides.

Pflanzen, welche die Canarischen Inseln allein mit Madera gemein haben.

Chrysurus cynosuroides.
Dracaena Draco.
Phyllis Nobla.
Sida canariensis.
Myrica Faya.
Clethra arborea.
Juniperus Oxycedrus.
Hypericum glandulosum.
- - - - floribundum.
Campanula aurea.
- - - - lobelioides.
Andryala pinnatifida.
- - - cheirantifolia.
Jasminum odoratissimum.
Globularia longifolia.
Olea arborea. Palo blanco Tenerif.
Scrophularia betonicifolia.
Laurus Indica. Viñatico.
- - - Burbusano.
- - - foetens. maderens. Lam. (Til.)
Chenopodium ambrosioides.
Achyranthes nivea.
Plantago Lagopus.
Lavandula pinnata.
Chrysanthemum pinnatifidum.

Pflanzen, welche den Canarischen Inseln mit Syrien, Aegypten, der Barbarei und den südlichen Küsten von Europa gemeinschaftlich sind.

Spartium monospermum.
Genista linifolia?
Ononis ramosissima.
- - - longifolia.
Heliotropum europaeum.
Rhus coriaria.
Pistacia Lentiscus.
- - - Therebinthus.
Daphne Gnidium.
Euphrasia viscosa,
Datura Methel.
Physalis somnifera.
Lycium afrum.
Laurus nobilis.
Achyranthes nivea.
Plantago Cynops.
Salvia aegyptiaca.
Lavandula Stoechas.
Origanum creticum.
Teucrium Iva. Yerba Clin. Lancerote.
Conyza saxatilis.
Inula viscosa. Altadaca Tenerif.
Viola cheirantifolia. in Pyrenaeis a Ant. de Jussieu lecta in Herb. Jussieu. vix a Vi. cenisia div.
Statice pectinata Mas. bellidifol. Cav. in Algarbia D. Link.
Sysimbrium millefolium. Portug. D. Link.
Euphorbia dendroides.
- - - - platiphylla.
- - - - Paralias.
- - - - Peplis.
- - - - hyssopifolia.
Ricinus communis.
Rumex pulcher.
- - - tingitanus.
Smyrnium Olusatrum.
Daucus tingitanus.
Zygophyllum album.
Fagonia cretica.
Cucumis Colocynthis.
Portulaca oleracea.
Aizoon canariense.
Mesembrianthemum nodiflorum.
- - - - - - - crystallinum.
Arum Arizarum.
- - - Dracunculus.
Smylax latifolia.
- - - mauritanica.
Asparagus retrofractus.
Rubia lucida.
- - - angustifolia.
Forskolea angustifolia.
Cistus monspeliensis.

Erica scoparia. Brezo.
- - - arborea. Texo.
Gnaphalium luteo-album.
Buphthalmum maritimum.
- - - - - aquaticum.
Arabis alpina.
Clypeola naritima.
Sium modiflorum.
- - - repens.

Verzeichniſs der auf den Canarischen Inseln wachsenden Pflanzen, nach der verschiedenen Höhe, in welcher sie vorkommen.

I.

Zone der Africanischen Formen.

Vom Meeresufer bis 1200 Par. Fuſs Höhe.

Mittlere Temperatur 17 bis 18 Gr. R. ($21\frac{1}{4}$—$22\frac{1}{2}$ C.)
Wärmster Monat August von 21° R. (26,2 C.)
Kältester Monat Januar von 14° R. (17,5 C.)
Thermometer kaum je unter 10° R.
(Aegypten. Südliche Barbarei.)

Meerpflanzen.
Salicornia fruticosa.
Salsola fruticosa.
- - - divaricata.
- - - lanata.
- - - ericifolia.
- - - Kali.
Eranthemum salsuloides.
Zygophyllum album.
Statice bellidifolia.
Mesembrianthemum crystallinum.
- - - - - - - - nodiflorum.
Crithmum canariense.
- - - - latifolium.
Atriplex glauca.
Clypeola maritima.

Frankenia ericifolia.
- - - - pulverulenta.
Scorzonera succulenta. (Picridium succ.)
Polygonum maritimum.
Euphorbia Paralias.
Aizoon canariense.
Pancratium canariense.
Buphthalmum maritimum.

Euphorbia balsamifera (Tabayba dulce) bis 360 Fuſs in Tenerif; etwas über 500 Fuſs in Canaria.
Placoma pendula bis 6 — 700 Fuſs.
Ceropegia aphylla 500 Fuſs. (Cardoncillo matta perro.)
Cneorum pulverulentum.
Linaria spartioides.
Euphorbia canariensis (Cardon) bis 1800 Fuſs.
Euphorbia aphylla (Canaria) 400 Fuſs
Conyza canariensis.
- - - sericea 960 Fuſs.
Periploca laevigata.
Justicia hyssopifolia.
Lavandula abrotanoides.
Conyza gouani affin. (frutic. in Palma.)
Asparagus exaltatus.
- - - - retrofractus.
- - - - verticillatus.
(Cactus Tuna bis 600 Fuſs.
- - - Opuntia bis 2500 Fuſs.)
(Phoenix dactylifera 900 F.)
Sysimbrium millefolium.
Plantago Cynops.

Prehnantes spinosa. (Albulaja.)
- - - - pinnata. (Alfife.)
Chrysanthemum (Pyrethrum) anetifol.
- - - - - - - - - - fruticosum.
- - - - - - - - - - crithmifolium.
Bryonia verrucosa.
Physalis aristata.
- - - somnifera.
Tamarix canariensis W.
Artemisia argentea bis 2200′.
- - - - reptans Sm.
- - - - ramosa Sm.
Inula viscosa bis über 3500′.
Cacalia Kleinii bis über 2000′.
Cuscuta canariensis Sm.
Euphorbia dendroides.
Sonchus fruticosus,
- - - radicatus:
entfernen sich nicht gern vom Meer.
Salvia canariensis.
Rumex lunaria bis 2000′.
Reseda scoparia.
Convolvulus scoparius.
- - - - floridus.
- - - - volubilis Brouss.
Rubia fruticosa.
Forskolea angustifolia 1500′.
(Ricinus communis.)
Tanacetum fruticosum.
Parietaria Judaïca.
Cynosurus aureus.
Achyranthes radicans s. nivea.
- - - - argentea.

Sempervivum dodrantale.
- - - - - monanthos.
- - - - - tortuosum etwa 500′.
- - - - - ciliatum.
Dracaena Draco bis über 2000′.
Solanum Vespertilio.
Statice arborea.
Rhamnus crenulatus.
Lycium afrum.
Cineraria Tussilaginis.
- - - lanata.
Spartium monogynum 2800′.
Euphorbia atropurpurea 2800′.
Lotus glauca.
Illecebrum canariense.
Sida acerifolia.
Ephedra altissima.
Asphodelus canariensis.
Genista nitens W. *).
Anthemis revoluta.
Stipa tortilis (tenacissima).
Dactylis fasciculata Sm.
Avena Loefflingiana.
Aristida canariensis.
Bromus maximus.
- - - dystachios.
Cyperus tuberosus.
Scirpus globiferus Mas.
Rumex pulcher.
Thymus myrthifolius.
Teucrium canariense.
Jasminum odoratissimum.
Saccharum Teneriffae.
Buphthalmum spinosum. (Brotonero.)
- - - - - sericeum.
Lavandula pinnata, wohl bis 2600′.
Celastrus Cassine.
Rhus coriaria.
Cistus canariensis Jacq. (mollis.)
Ononis longifolia W. (Meloja.)
Scylla hyacinthoides.
Senecio palmensis. (Turgayte.)
Pteris longifolia W.
- - - caudata.
Ceterach aurea.
Conyza saxatilis.
Scleroxylon canariense W.
Echium armatum Mas.
- - - thyrsiflorum Mas.
Vicia aphylla nov. Adexe.
Polycarpaea carnosa.
Juncus acutus.
Ceratonia siliqua. (Algarrobo.)

*) *Genista nitens. Foliis ternatis, ellipticis, sublus sericeis. Florib. terminalib. subsessil. W. Herbar. linifoliae affin.*

II. Re-

II.

Region der Europäischen Cultur.

Von 1200—2500 Fuſs.

Mittlere Temperatur etwa 14 Gr. R. (17,5 C.)
Schnee kann die oberen Grenzen wohl zuweilen erreichen. Frost für wenige Stunden bis 2000 Fuſs auf ebenen Flächen.
(Südl. Frankreich. Mittl. Italien.)

Ackerpflanzen.

a) untere, welche zum Theil auch der wärmeren Region zukommen.

Buphthalmum aquaticum.
Cichorium divaricatum.
Heliotropium plebejum.
Centaurea Calcitrapa.
Scorpiurus sulcata.
Calendula arvensis.
Echium australe.
Sysimbrium Irio.
Silene gallica.
Stachys recta.
Dianthus prolifer.
Sonchus pusillus Cav.
Erodium malacoides.
Carduus marianus.
Heliotropium europaeum.
Centaurea galactites.
Psoralea bituminosa.
Linaria Elatine.
Scolymus maculatus.
Oxalys corniculata.
Geranium pusillum.
Erysimum bicorne.
Teucrium Iva.
Picris echioides.
Arum Dracunculus.
Asphodelus ramosus.
Daucus mauritanicus.
Scabiosa grandiflora.
Tolpis barbata.
Centaurea Lippii (an Broussonetii W.?)
Centaurea Apula.
Trifolium angustifolium.
Scandix Pecten.
Portulaca oleracea.
Phalaris canariensis. (Alpiste.)
Milium caerulescens Desf.
Sorghum halepense.
Polypogon monspeliense.
Cynosurus echinatus.
Anethum Foeniculum.
Ammi majus.
Euphorbia platyphylla.
\- - - - polygonifolia.
\- - - - Peplis.

Euphorbia Peplus.
Cenchrus ciliatus.
Briza viridis.
Poa Eragrostis.
Minuartia dichotoma.
Fagonia cretica.
Teucrium (Scordium) spinosum.
Astragagus hamatus.
Plantago Lagopus.
Biserrula Pelecinus.
Amaranthus viridis.
Convolvulus althaeoides.
Verbascum sinuatum.
Adonis asetivalis.
Gladiolus communis.
Bromus madritense.
Coix Lachryma.
Andropogon hirtum.
Arenaria maritima.
Cynoglossum pictum.
Myagrum hispanicum.
Panicum Dactylon.
- - - repens. (Canar.)
- - - crus galli.
- - - viride.
Sinapis hispida.
Medicago turbinata.
- - - - echinata.

b) obere.

Silene maritima.
Anagallis arvensis (coerulea).
Viola tricolor.
Veronica agrestis.
- - - anagallis.
Ranunculus parviflorus.
- - - - muricatus.
Tragopogon porrifolium.
Raphanus sativus.
Papaver somnifer.
Epilobium pubescens.
Marrubium vulgare.
Mentha sylvestris.
Milium lendigerum.
Agrostis Spica Venti.
Hordeum murinum.
Mentha rotundifolia.
Lathyrus aphaca.
Vicia atropurpurea.
Sium nodiflorum.
Rumex bucephalophorus.
- - - obtusifolius.
Cochlearia coronopifolia.
Daucus tingitanus.
Antirrhinum Orontium.
Vicia sativa.
Sherardia arvensis.
Euphorbia Lathyrus.
Malva Alcaea.
Agrimonium Eupatoria.
Polygonum Convolvulus.
Geranium dissectum.
Aquilegia vulgaris.
Hyoseris monspeliensis.
Salvia verbenacea.
Erodium Ciconia.
Spergula arvensis.
Carex muricata.
Poa pratensis.

Dumetorum.

Delphinium Staphysagrea.
Sida canariensis. (Te.)
Rubus fruticosus.
Bosea Yervamora.
Messerschmidia fruticosa.
Lepidium Iberis.
Anchusa italica.
Hyosciamus albus.
Dipsacus sylvestris.
Genista canariensis L. *).
Canarina campanula.
Chenopodium ambrosioides.
Solanum nigrum.

Euphorbia piscatoria.
Daphne Gnidium.
Globularia longifolia.
Hypericum reflexum.
Echium striatum. (Taginaste.)
Crambe strigosa.
Cheiranthus scoparius.
Clethra arborea.
Pittosporum undulatum.
- - - - carnosum.
Pistacia Therebinthus.
- - - Lentiscus.
Spartium congestum. (affin. sed divers.) Brouss. (canar.)
Erodium moschatum.
Andryala cheirantifolia.
Euphrasia viscosa.
Smyrnium olusatrum.
Sempervivum urbicum Sm.
Thymus therebinthinaceus.
Lavandula stoechas.
Ulex europaea.
Spartium Scoparium.
Cynara horrida.
Salix canariensis.
Bowlesia oppositifolia.
Verbena nodiflora.
- - - humifusa Sm.
Campanula lobelioides.
Acrostichum Maranthus.
Aspidium aculeatum.
- - - - Aemulum.
Adianthum tenerum.
Trichomanes canariensis.
- - - - speciosa (breviseta H. K.)
Grammitis leptophylla.
Cyathaea fragilis.
Ophioglossum lusitanicum.
Crepis coronopifolia.
Beta patula.
Tussilago rubra.
- - - nutans.
Cucumis Colocynthis.
Lythrum hyssopifolium.
Samolus Valerandi.
Valantia filiformis.
Ranunculus fluviatilis.
Carlina xeranthemoides Mas.
Centaurea canariensis W.
Ruta pinnata.
Equisetum ramosissimum.

*) Nach Broussonet. Wir haben sie auf den Inseln nie gesehn.

III.

Region der Wälder.

Von 2500—4080 Fuſs.

Mittlere Temperatur vielleicht wenig über 11° R. (13,7 C.)
Schnee für mehrere Wochen im Winter. Thermometer wohl zuweilen einige Grad unter dem Gefrierpunkt.
Quellenwärme gröſstentheils $10\frac{1}{2}$° R.
(Lombardei. Lyon.)

Laurus Indica. (Vinatico.)
- - - nobilis.
- - - Barbusano.
- - - foetens. (Til.)
Prunus multiglandulosa Cav. (Hixo.)
Olea arborea. (Palo blanco.)
Ilex Perado. (Acebiño.)
Arbutus Callicarpa.
Rhamnus glandulosus. (Sanguina.)
Myrica Faya.
Ardisia excelsa.
Visnea Mocanera.
Erica scoparia. (Brezo.)
Viburnum rugosum.
Phyllis Nobla.
Ruscus androgynus.
Poterium fruticosum.
Parietaria (Boehmeria) arborea.
Polycarpaea Teneriffae.
Convolvulus canariensis.
Bisteropogon canariense.
- - - - - plumosum.
Hedera canariensis.
Cistus vaginatus.
- - - monspeliensis.
- - - ocreatus *).
Smylax latifolia.
- - - mauritanica.
Echium giganteum. (Taginaste.)
Carthamus salicifolius.
Ranunculus Teneriffae.
Digitalis canariensis.
Dracocephalum canariense.
Hypericum canariense.
- - - - floribundum.
- - - - glandulosum.
- - - - coadunatum Sm.
Sideritis canariensis.

*) *Cistus ocreatus. Tomentos. incan. subpulverul. Foliis ovatis, subcord. petiolat. rugosis, 3 nerviis. Petiolis connato vaginant. margine ciliatis, sulcatis. Foliolis calycin. exterior. minutis. saepius deciduis in fructu. Capsulis hirtis. Petalis crenatis, roseis, minor. quam in C. vagin.* Dr. Smith's Noten.

Sideritis candicans.
Geranium anemonifolinm.
Origanum creticum.
Chrysanthemum pinnatifidum.
Erica arborea (Texo) bis 4140 Fuſs.
Campanula aurea.
Cineraria cruenta.
- - - populifolia.
Pteris incompleta.
Woodwardia radicans.
Luzula canariensis. Poir. Encyc. Supl.
Scrophularia fruticosa.
- - - - - betonicifolia.
Silene nutans var.
- - Lagunens. nov.
Exacum viscosum.
Cotyledon umbilicus.
Sempervivum canariense.
- - - - - villosum affin. *).
- - - - - foliosum Sm.
- - - - - aureum Sm.
- - - - - villosum.
- - - - - barbatum Sm.
- - - - - annuum Sm.
- - - - - punctatum Sm.
Castanea vesca.
Fragaria vesca.
Fedia olitoria.
- - calcitrapa.

Helianthemum guttatum.
Prehnantes chondrilloides.
Myosotis sylvestris affin.
Viola odorata.
- - canina affin.
Satyrium maculatum.
- - - diphyllum.
Anthemis Cotula.
Matricaria Parthenium.
Lapsana communis.
Mercurialis annua.
- - - - - ambigua.
Iris foetida.
Poa filiformis Sm.
Aira caryophyllaea.
Juncus Forsteri?
Asplenium adianthum nigrum.
- - - - palmatum.
Acrostichum lanuginosum.
- - - - Maranthus.
- - - - canariense.
Grammitis graminoides.
Polypodium axillare.
Aspidium umbrosum.
- - - - molle.
- - - - axillare.
Lycopodium plumosum.
Cheilanthes microphylla. (Pteris fragrans.)

*) *Fol. Spathulato rhombeis. peduncul. hirsutis mollibus. Subtus macul. lineat. caule ramoso Florib. paniculatis calyc. sub 8 phyllo. Pistill. inter 6 et 10 vacill. Stamina numero duplici, Tota planta hirsuta. Nectar furcat.* Sie ist haufig, aber namenlos in den botanischen Gärten.

IV.

Region der Canarischen Fichten.

Von 4080—5900 Fuſs.

Mittlere Temperatur etwa 8 Gr. R. (10 C.)
Im Winter vielleicht einen Monat lang mit Schnee bedeckt.
Quellen-Temperatur 7,3 R.
(Nordl. Frankreich. Schottland. Nordl. Deutschland.)

Pinus canariensis bis 6700 Fuſs, aber auch bis zum Meeresufer heruuter.
Cytisus prolifer (Escobon) bis 6200 Fuſs.
Spartium microphyllum Cav. Genista viscosa? W. Cytisus foliolosus L'Her. (Codeso) bis 7500 Fuſs.
Crepis Lagopoda Sm. (Tolpis L.)
Peucedanum aureum. (Canar.)
Polycarpaea cumbrae.
Centaurea cynaroides Sm.
Satureja lanata.
Festuca Myurus.
Pteris aquilina.
Sempervivum caespitosum Sm. *). (Canaria.)

V.

Region der Retama Blanca.

Von 5900—10400 Fuſs.

Mittlere Temperatur (bei 7—8000 Fuſs) kaum 4 Gr. R. (5 C.)
Gegen 3 Monat im Schnee. Thermometer wohl oft bis — 8 Gr. R.
Quellen-Temperatur 4,3 R.
(Hochlande von Schottland. Drontheim.)

Spartium nubigenum Mas. Retama Blanca.
Nie unter 5900 Fuſs Höhe.
Nicht über 9630 Fuſs.
Hypericum canariense var. montana bis 7100 Fuſs.
Centaurea Teydis.
Rhamnus coriaceus (racemosus) **).
Scabiosa fruticosa.
Scrophularia glabrata. (Yerba de cumbre.)
Festuca laxa Mas.
Juniperus Oxycedrus.
Viola cheirantifolia bis 10400 Fuſs.
Pimpinella cumbrae.
Cheiranthus - - -
Arabis alpina.

Eine leichte Uebersicht dieser climatischen Pflanzenvertheilung gewährt das groſse Blatt, den Durchschnitt des Pics von Tenerif vorstellend, welches Hr. v. Humboldt dem zweiten Theil seiner Reise beigefügt hat.

*) Unrichtig ist es in Curtis Bot. Mag. *Semp. ciliatum* genannt. *Willd. Enum. p.* 508.

**) *Rhamnus coriaceus (racemosus W.); Teydis. inermis. Foliis oblongis integerrimis. Floribus racemosis. Willd. Herbar. Mspt.* nicht *Rh. racem. Pers.* 239.

Nachtrag

zur

Abhandlung über die Flora auf den Canarischen Inseln.

(Zu S. 372.)

Nach einer, von Herrn Robert Brown aus Masons Journal, den Londner Herbarien und eigener Ansicht zusammengetragener und gütigst mitgetheilter Liste der Flora von Madera, gehören zu denen phaenerogamen Pflanzen, welche diese Insel nur allein mit den Canarischen gemein hat, aufser den angeführten noch folgende:

Aristida gigantea.
Aira caryophyllaea.
Echium candicans.
- - - thyrsiflorum.
Sempervivum canariense.
- - - - - villosum.
Cinara horrida.
Cineraria populifolia.
Scylla hyacinthoides.
Sideritis candicans.
Bisteropogon (Mentha) canariense.
Dracocephalum canariense.
Crithmum latifolium.
Lotus glaucus.
Genista canariensis.
Rhamnus glandulosus.
Ilex Perado.
Ruscus androgynus.

Es sind daher beiden Inselgruppen 45 Arten gemeinschaftlich. Was man aufser diesen, von denen, als den Canarischen Inseln ausschliefslich eigenthümlich aufgeführten Pflanzen, auch noch der Insel Madera zuschreibt, beruht auf Mifsverständnissen oder Verwechslungen.

S. 356. Z. 24. *Olea arborea* lies *excelsa.*

S. 361. 2te Spalte. Z. 21. ist Festuca filifolia wegzustreichen.

S. 367. 2te Spalte. Z. 15. Seleroxylon canariensis lies canariense.

S. 372. 2te Spalte. Z. 8. Olea arborea lies excelsa.

S. 380. 1te Spalte. Z. 13. Olea arborea lies excelsa.

Abhandlungen

der

mathematischen Klasse

der

Königlich-Preussischen

Akademie der Wissenschaften

aus

den Jahren 1816—1817.

Berlin 1819.

Gedruckt und verlegt

bei Georg Reimer.

Inhalt.

Neue Eliminirungsmethode vermittelst eines eigenen Algorithmen.

Von Herrn GRUSON *).

Man hat mehrere Gleichungen zwischen einer gewissen Anzahl unbekannter Gröſsen, die sich in jeder Gleichung auf eine gewisse Art vertheilt und gemischt finden; vermittelst dieser Gleichungen verlangt man statt ihrer nur eine einzige oder mehrere zu haben, die aber nur die kleinst mögliche Anzahl unbekannter Gröſsen enthalten, und die Einen vorzugsweise aus den Andern. Dieses kann nur dadurch erreicht werden, daſs man aus den Gleichungen diejenigen unbekannten, die in der gesuchten Gleichung nicht enthalten seyn sollen, eliminirt. Es ist aber nicht hinreichend, zu einer Gleichung von der verlangten Eigenschaft zu gelangen, sie muſs überdies noch unter allen, welche dieselbe Eigenschaft haben, die aller einfachste seyn; d. h. sie muſs von allen unnützen Factoren befreit seyn, wodurch sie zusammengesetzter und um mehrere Grade höher erscheint, als sie seyn sollte. Alle bisherigen Methoden leisten dieses nicht, und die Analysten fühlen die Nothwendigkeit, eine Methode zu haben, die mit Sicherheit diese Operation ausführen lehrt.

Ueberdies sind fast alle bisher bekannte Methoden auf zwei Gleichungen eingeschränkt, und dieser erste Schritt reicht allein nicht hin, auf mehrere Gleichungen überzugehen. Denn, wenn man m Gleichungen hat,

*) Vorgelesen den 8. Januar 1816.

so kann man diese zu zwei und zwei auf $\frac{m(m-1)}{2}$ verschiedene Arten nehmen; da nun kein Grund da ist, eine Verbindung der andern vorzuziehen, so hängt die Wahl nur von gewissen zwischen ihnen bestehenden Relationen ab, und dieser Relation gemäſs muſs die Endgleichung sich nothwendig vereinfachen.

Bezout hat sich mit der Aufsuchung einer Methode für mehr als zwei Gleichungen beschäftigt; allein, ob er gleich sagt, daſs man nach seiner Methode eher zu Gleichungen vom niedern Grade, als durch andere vor ihm bekannte Methoden gelangt, welches schon viel ist, so wagt er doch noch nicht, zu versichern, daſs man durch seine Methode zu der Gleichung von dem möglich niedrigsten Grade gelangt; er scheint sogar selbst zu vermuthen, daſs man sie noch erniedrigen kann.

Eine ganz vollkommene Eliminationsmethode müſste nicht allein die Gleichung von dem möglich niedrigsten Grade geben, wenn die ersten Gleichungen so allgemein und unbestimmt, als sie nur immer seyn können, sind; sondern auch noch im Falle, wo diese Gleichungen weniger unbestimmt wären, welches immer durch eine oder mehrere Gleichungen, die zwischen ihren Coefficienten statt finden, ausgedrückt seyn wird, müſste die im Fall der gröſsten Unbestimmtheit hervorgehende Gleichung sich wegen dieser besondern Relationen erniedrigen lassen.

Meine Methode habe ich nicht über zwei Gleichungen hinaus ausgeführt: sie unterscheidet sich von allen andern durch den Algorithmen, vermittelst dessen ich die sonst nach allen bekannten Methoden (die combinatorische etwa ausgenommen) fast unausführbaren Rechnungen, die selbst der eisernsten Geduld spotten, ausführe. Es ist immer ein Gewinn für die Wissenschaft, wenn man die Methoden vervielfältiget, selbst wenn man auch durch sie nur schon bekannte Resultate findet.

Die Gleichungen, aus welchen man x eliminiren soll, nehme ich von gleichem Grade und nach x von der höchsten Potenz geordnet an, und bezeichne die Coefficienten des 1sten, 2ten, 3ten . . . n^{ten} Gliedes in der ersten gegebenen Gleichung mit A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_n, und in der zweiten gegebenen Gleichung mit B_1, B_2, B_3, B_4, ... B_n.

Man setze nun

$$B_1 . A_2 - A_1 . B_2 = \overset{1}{C}_1$$
$$B_1 . A_3 - A_1 . B_3 = \overset{2}{C}_1$$
$$B_1 . A_4 - A_1 . B_4 = \overset{3}{C}_1$$
$$B_1 . A_5 - A_1 . B_5 = \overset{4}{C}_1$$

. . .

etc. etc. etc.

$$B_2 . A_3 - A_2 . B_3 = \overset{1}{C}_2$$
$$B_2 . A_4 - A_2 . B_4 = \overset{2}{C}_2$$
$$B_2 . A_5 - A_2 . B_5 = \overset{3}{C}_2$$
$$B_2 . A_6 - A_2 . B_6 = \overset{4}{C}_2$$

. . .

etc. etc. etc.

$$B_3 . A_4 - A_3 . B_4 = \overset{1}{C}_3$$
$$B_3 . A_5 - A_3 . B_5 = \overset{2}{C}_3$$
$$B_3 . A_6 - A_3 . B_6 = \overset{3}{C}_3$$
$$B_3 . A_7 - A_3 . B_7 = \overset{4}{C}_3$$

. . .

etc. etc. etc.

allgemein

$$B_r . A_{r+1} - A_r . B_{r+1} = \overset{1}{C}_r$$
$$B_r . A_{r+2} - A_r . B_{r+2} = \overset{2}{C}_r$$
$$B_r . A_{r+3} - A_r . B_{r+3} = \overset{3}{C}_r$$
$$B_r . A_{r+4} - A_r . B_{r+4} = \overset{4}{C}_r$$

. . .

$$B_r . A_{r+n} - A_r . B_{r+n} = \overset{n}{C}_r$$

Dieses vorausgesetzt:

I. Seyen

$$A_1 . x + A_2 = 0$$
$$B_1 . x + B_2 = 0$$

die zwei Gleichungen vom ersten Grade, aus welchen x eliminirt werden soll. — Sucht man daher aus jeder Gleichung den Werth von x, und setzt diese Werthe einander gleich, so ergiebt sich

$$B_1 . A_2 - A_1 . B_2 = 0, \text{ oder } \overset{1}{C}_1 = 0.$$

II. Es seyen

$$A_1 . x^2 + A_2 . x + A_3 = 0$$
$$B_1 . x^2 + B_2 . x + B_3 = 0$$

die zwei Gleichungen vom zweiten Grade, aus welchen man x eliminiren

soll, — bestimmt man aus jeder den Werth x^2, so ergiebt sich aus der Gleichheit dieser Ausdrücke

$$(B_1 . A_2 - A_1 . B_2) . x + B_1 . A_3 - A_1 . B_3 = 0,$$

oder

$$\overset{1}{C}_1 . x + \overset{2}{C}_1 = 0.$$

Sucht man nun den Werth von x und setzt sie gleich, so folgt

$$(B_1 . A_3 - A_1 . B_3) . x + B_2 . A_3 - A_2 . B_3 = 0,$$

oder

$$\overset{2}{C}_1 . x + \overset{1}{C}_2 = 0.$$

III. Es seyen

$$A_1 . x^3 + A_2 . x^2 + A_3 . x + A_4 = 0$$
$$B_1 . x^3 + B_2 . x^2 + B_3 . x + B_4 = 0$$

die zwei Gleichungen vom dritten Grade, aus welchen man x eliminiren soll. — Zuerst sucht man aus jeder den Werth von x^3, und setzt diese gleich, so ergiebt sich

$$\overset{1}{C}_1 . x^2 + \overset{2}{C}_1 . x + \overset{3}{C}_1 = 0.$$

Nun sucht man aus jeder den Werth von x^2, und setzt sie gleich, so folgt

$$\overset{2}{C}_1 . x + (\overset{3}{C}_1 + \overset{1}{C}_2) . x + \overset{2}{C}_2 = 0.$$

IV. Es seyen

$$A_1 . x^4 + A_2 . x^3 + A_3 . x^2 + A_4 . x + A_5 = 0$$
$$B_1 . x^4 + B_2 . x^3 + B_3 . x^2 + B_4 . x + B_5 = 0$$

die zwei Gleichungen vom vierten Grade, aus welchen man x eliminiren soll. — Zuerst suche ich aus jeder den Werth von x^4, deren Gleichheit uns giebt

$$\overset{1}{C}_1 . x^3 + \overset{2}{C}_1 . x^2 + \overset{3}{C}_1 . x + \overset{4}{C}_1 = 0.$$

Ferner findet sich aus der Gleichheit der Werthe von x^3 die Gleichung

$$\overset{2}{C}_1 . x^3 + (\overset{3}{C}_1 + \overset{1}{C}_2) . x^2 + (\overset{4}{C}_1 + \overset{2}{C}_2) . x + \overset{3}{C}_2 = 0.$$

V. Es seyen

$$A_1 . x^5 + A_2 . x^4 + A_3 . x^3 + A_4 . x^2 + A_5 . x + A_6 = 0$$
$$B_1 . x^5 + B_2 . x^4 + B_3 . x^3 + B_4 . x^2 + B_5 . x + B_5 = 0$$

die zwei Gleichungen vom fünften Grade, aus welchen x eliminirt wer-

den soll. — Zuerst finde ich aus den gleichgesetzten Werthen von x^5 die Gleichung

$$\overset{1}{C}_1 . x^4 + \overset{2}{C}_1 . x^3 + \overset{3}{C}_1 . x^2 + \overset{4}{C}_1 . x + \overset{5}{C}_1 = 0.$$

Nachgehends geben die gleichgesetzten Werthe von x^4 die Gleichung

$$\overset{2}{C}_1 . x^4 (\overset{3}{C}_1 + \overset{1}{C}_1) . x^3 + (\overset{4}{C}_1 + \overset{2}{C}_2) . x^2 + (\overset{4}{C}_1 + \overset{3}{C}_2) . x + \overset{4}{C}_2 = 0.$$

VI. Allgemein, wenn

$$A_1 . x^n + A_2 . x^{n-1} + A_3 . x^{n-2} + \ldots + A_{r+1} . x^{n-r} + \ldots + A_{n+1} = 0$$
$$B_1 . x^n + B_2 . x^{n-1} + B_3 . x^{n-2} + \ldots + B_{r+1} . x^{n-r} + \ldots + B_{n+1} = 0$$

die zwei gegebenen Gleichungen vom n^{ten} Grade sind, so werden die sich hieraus ergebenden Gleichungen vom $(n-1)^{ten}$ Grade seyn:

$$\overset{1}{C}_1 . x^{n-1} + \overset{2}{C}_1 . x^{n-2} + \overset{3}{C}_1 . x^{n-3} + \ldots + \overset{n}{C}_1 = 0$$

$$\overset{2}{C}_1 . x^{n-1} + (\overset{3}{C}_1 + \overset{1}{C}_2) . x^{n-2} + (\overset{4}{C}_1 + \overset{2}{C}_2) . x^{n-3} + (\overset{5}{C}_1 + \overset{3}{C}_2) . x^{n-4} + \ldots$$
$$+ (\overset{r+1}{C}_1 + \overset{r-1}{C}_2) . x^{n-r} + \ldots + \overset{n-1}{C}_2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen bilden sich nun eben so, wie oben, folgende Gleichungen, die man sogleich niederschreibt

I.

$$\overset{2}{C}_1 . \overset{2}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 . [\overset{3}{C}_1 + \overset{1}{C}_2] = \overset{1}{D}_1$$
$$\overset{2}{C}_1 . \overset{3}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 . [\overset{4}{C}_1 + \overset{2}{C}_2] = \overset{2}{D}_1$$
$$\overset{2}{C}_1 . \overset{4}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 . [\overset{5}{C}_1 + \overset{3}{C}_2] = \overset{3}{D}_1$$
$$\overset{2}{C}_1 . \overset{5}{C}_1 - \overset{2}{C}_1 . [\overset{6}{C}_1 + \overset{4}{C}_2] = \overset{4}{D}_1$$

⋮ ⋮ ⋮

etc. etc. etc.

II.

$$[\overset{3}{C}_1 + \overset{1}{C}_2]\ \overset{3}{C}_1 - \overset{2}{C}_1\ [\overset{4}{C}_1 + \overset{2}{C}_2] = \overset{1}{D}_2$$
$$[\overset{3}{C}_1 + \overset{1}{C}_2]\ \overset{4}{C}_1 - \overset{2}{C}_1\ [\overset{5}{C}_1 + \overset{3}{C}_2] = \overset{2}{D}_2$$
$$[\overset{3}{C}_1 + \overset{1}{C}_2]\ \overset{5}{C}_1 - \overset{2}{C}_1\ [\overset{6}{C}_1 + \overset{4}{C}_2] = \overset{3}{D}_2$$
$$[\overset{3}{C}_1 + \overset{1}{C}_2]\ \overset{6}{C}_1 - \overset{2}{C}_1\ [\overset{7}{C}_1 + \overset{5}{C}_2] = \overset{4}{D}_2$$

⋮ ⋮ ⋮

etc. etc. etc.

III.

$$[\overset{4}{C}_1 + C_2]\ \overset{4}{C}_1 - \overset{3}{C}_1\ [\overset{5}{C}_1 + \overset{3}{C}_2] = \overset{1}{D}_3$$
$$[\overset{4}{C}_1 + C_2]\ \overset{5}{C}_1 - \overset{3}{C}_1\ [\overset{6}{C}_1 + \overset{4}{C}_2] = \overset{2}{D}_3$$
$$[\overset{4}{C}_1 + C_2]\ \overset{6}{C}_1 - \overset{3}{C}_1\ [\overset{7}{C}_1 + \overset{5}{C}_2] = \overset{3}{D}_3$$
$$[\overset{4}{C}_1 + C_2]\ \overset{7}{C}_1 - \overset{3}{C}_1\ [\overset{8}{C}_1 + \overset{6}{C}_2] = \overset{4}{D}_3$$

⋮ ⋮ ⋮

etc. etc. etc.

IV.

$$[\overset{5}{C}_1 + \overset{3}{C}_2]\ \overset{5}{C}_1 - \overset{4}{C}_1\ [\overset{6}{C}_1 + \overset{4}{C}_2] = \overset{1}{D}_4$$
$$[\overset{5}{C}_1 + \overset{3}{C}_2]\ \overset{6}{C}_1 - \overset{4}{C}_1\ [\overset{7}{C}_1 + \overset{5}{C}_2] = \overset{2}{D}_4$$
$$[\overset{5}{C}_1 + \overset{3}{C}_2]\ \overset{7}{C}_1 - \overset{4}{C}_1\ [\overset{8}{C}_1 + \overset{6}{C}_2] = \overset{3}{D}_4$$
$$[\overset{5}{C}_1 + \overset{3}{C}_2]\ \overset{8}{C}_1 - \overset{4}{C}_1\ [\overset{9}{C}_1 + \overset{7}{C}_2] = \overset{4}{D}_4$$

⋮ ⋮ ⋮

etc. etc. etc.

$$r^{te}$$

$$\left[\overset{r+1}{C}_1 + \overset{r-1}{C}_2\right]\overset{r+1}{C}_1 - \overset{r}{C}_1\left[\overset{r+1}{C}_1 + \overset{r}{C}_2\right] = \overset{1}{D}_r$$

$$\left[\overset{r+1}{C}_1 + \overset{r-1}{C}_2\right]\overset{r+2}{C}_1 - \overset{r}{C}_1\left[\overset{r+2}{C}_1 + \overset{r+1}{C}_2\right] = \overset{2}{D}_r$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

etc. etc. etc.

Da nun

$$\overset{3}{C}_1 \cdot \overset{1}{C}_2 - \overset{2}{C}_1 \cdot \overset{2}{C}_2 + \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{1}{C}_3 = 0$$
$$\overset{4}{C}_1 \cdot \overset{1}{C}_2 - \overset{2}{C}_1 \cdot \overset{3}{C}_2 + \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{2}{C}_3 = 0$$
$$\vdots$$

etc.

$$\overset{4}{C}_1 \cdot \overset{2}{C}_2 - \overset{3}{C}_1 \cdot \overset{3}{C}_2 + \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{1}{C}_4 = 0$$
$$\overset{5}{C}_1 \cdot \overset{2}{C}_2 - \overset{3}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_2 + \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{2}{C}_4 = 0$$
$$\vdots$$

etc.

$$\overset{5}{C}_1 \cdot \overset{3}{C}_2 - \overset{4}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_2 + \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{1}{C}_5 = 0$$
$$\overset{6}{C}_1 \cdot \overset{3}{C}_2 - \overset{4}{C}_1 \cdot \overset{5}{C}_2 + \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{2}{C}_5 = 0$$
$$\vdots$$

etc.

$$\overset{7}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_2 - \overset{5}{C}_1 \cdot \overset{5}{C}_2 + \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{1}{C}_5 = 0$$
$$\overset{8}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_2 - \overset{5}{C}_1 \cdot \overset{6}{C}_2 + \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{2}{C}_5 = 0.$$
$$\vdots$$

etc.

Aus diesen Gleichungen mache man die II., III., IV., Vte etc. Tafel der ersten ähnlich, so ergiebt sich

I.

$$\overset{2}{C}{}_1^2 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{1}{C}_2 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{3}{C}_1 = \overset{1}{D}_1$$
$$\overset{2}{C}_1 \cdot \overset{3}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{2}{C}_2 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_1 = \overset{2}{D}_1$$
$$\overset{3}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{3}{C}_2 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{5}{C}_1 = \overset{3}{D}_1$$
$$\overset{4}{C}_1 \cdot \overset{5}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_2 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{6}{C}_1 = \overset{4}{D}_1$$
$$\vdots$$

etc.

II.

$$\overset{3}{C}{}_1^2 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{1}{C}_3 - \overset{2}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_1 = \overset{1}{D}_2$$
$$\overset{3}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{2}{C}_3 - \overset{2}{C}_1 \cdot \overset{5}{C}_1 = \overset{2}{D}_2$$
$$\overset{3}{C}_1 \cdot \overset{5}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{3}{C}_3 - \overset{2}{C}_1 \cdot \overset{6}{C}_1 = \overset{3}{D}_2$$
$$\overset{3}{C}_1 \cdot \overset{6}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_3 - \overset{2}{C}_1 \cdot \overset{7}{C}_1 = \overset{4}{D}_2$$
$$\vdots$$

etc.

III.

$$\overset{4}{C}{}_1^2 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{1}{C}_4 - \overset{3}{C}_1 \cdot \overset{5}{C}_1 = \overset{1}{D}_3$$
$$\overset{4}{C}_1 \cdot \overset{5}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{2}{C}_4 - \overset{3}{C}_1 \cdot \overset{6}{C}_1 = \overset{2}{D}_3$$
$$\overset{4}{C}_1 \cdot \overset{6}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{3}{C}_4 - \overset{3}{C}_1 \cdot \overset{7}{C}_1 = \overset{3}{D}_3$$
$$\overset{4}{C}_1 \cdot \overset{7}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_4 - \overset{3}{C}_1 \cdot \overset{8}{C}_1 = \overset{4}{D}_3$$
$$\vdots$$

etc.

IV.

$$\overset{5}{C}{}_1^2 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{1}{C}_5 - \overset{4}{C}_1 \cdot \overset{6}{C}_1 = \overset{1}{D}_4$$
$$\overset{5}{C}_1 \cdot \overset{6}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{2}{C}_5 - \overset{4}{C}_1 \cdot \overset{7}{C}_1 = \overset{2}{D}_4$$
$$\overset{5}{C}_1 \cdot \overset{7}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{3}{C}_5 - \overset{4}{C}_1 \cdot \overset{8}{C}_1 = \overset{3}{D}_4$$
$$\overset{5}{C}_1 \cdot \overset{8}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 \cdot \overset{4}{C}_5 - \overset{4}{C}_1 \cdot \overset{9}{C}_1 = \overset{4}{D}_4$$
$$\vdots$$

etc.

VII. Aus den zwei Gleichungen vom $(n-1)^{ten}$ Grade in §. VI. ergeben sich auf ähnliche Art die zwei Gleichungen vom $(n-2)^{ten}$ Grade

$$\overset{1}{D}_1 . x^{n-2} + \overset{2}{D}_1 . x^{n-3} + \overset{3}{D}_1 . x^{n-4} + \overset{4}{D}_1 . x^{n-5} + \ldots = 0,$$

u. $$\overset{2}{D}_1 . x^{n-2} + (\overset{3}{D}_1 + \overset{1}{D}_2) x^{n-3} + (\overset{4}{D}_1 + \overset{2}{D}_2) x^{n-4} + (\overset{5}{D}_1 + \overset{3}{D}_2) x^{n-5} + (\overset{6}{D}_1 + \overset{4}{D}_2) x^{n-6} + \ldots = 0$$

wo die $\overset{1}{D}_1$, $\overset{2}{D}_1$ etc. und $\overset{1}{D}_2$, $\overset{2}{D}_2$ etc. durch die vorhergehenden Tafeln gegeben sind.

Schreibt man nun in diesen Tafeln den nächstfolgenden Buchstaben des Alphabets mit denselben Abzeichen wie vorher, so ergiebt sich:

I.

$$\overset{2}{D}{}_1^2 - \overset{1}{D}_1 . \overset{1}{D}_2 - \overset{2}{D}_1 . \overset{3}{D}_1 = \overset{1}{E}_1$$

⋮

etc.

II.

$$\overset{3}{D}{}_1^2 - \overset{1}{D}_1 . \overset{1}{D}_3 - \overset{2}{D}_1 . \overset{4}{D}_1 = \overset{1}{E}_2$$

⋮

etc.

III.

$$\overset{4}{D}{}_1^2 - \overset{1}{D}_1 . \overset{1}{D}_4 - \overset{3}{D}_1 . \overset{5}{D}_1 = \overset{1}{E}_3$$

⋮

etc.

IV.

$$\overset{5}{D}{}_1^2 - \overset{1}{D}_1 . \overset{1}{D}_5 - \overset{4}{D}_1 . \overset{6}{D}_1 = \overset{1}{E}_4$$

⋮

etc.

Hiernach werden die Gleichungen vom $(n-3)^{ten}$ Grade seyn

$$\overset{1}{E}_1 . x^{n-3} + \overset{2}{E}_1 . x^{n-4} + \overset{3}{E}_1 . x^{n-5} + \ldots = 0,$$

$$\overset{2}{E}_1 . x^{n-3} + (\overset{3}{E}_1 + \overset{1}{E}_2) x^{n-4} + (\overset{4}{E}_1 + \overset{2}{E}_2) x^{n-5} + \ldots = 0.$$

Eben so werden die Gleichungen vom $(n-4)^{ten}$ Grade seyn

$$\overset{1}{F}_1 . x^{n-4} + \overset{2}{F}_1 . x^{n-5} + \ldots = 0$$

$$\overset{2}{F}_1 . x^{n-4} + (\overset{3}{F}_1 + \overset{1}{F}_2) x^{n-5} + \ldots = 0.$$

Die vom $(n-5)^{ten}$ Grade werden seyn

$$\overset{1}{G}_1 . x^{n-5} + \ldots = 0,$$

$$\overset{2}{G}_1 . x^{n-5} + \ldots = 0,$$

und so immer fort; und indem man neue Tafeln bildet, so gelangt man immer mit einer ausserordentlichen Leichtigkeit dahin, nur noch

$$\overset{1}{C}_1,\ \overset{2}{C}_1,\ \overset{3}{C}_1,\ \text{etc.}$$
$$\overset{1}{C}_2,\ \overset{2}{C}_2,\ \overset{3}{C}_2,\ \text{etc.}$$
$$\overset{1}{C}_3,\ \overset{2}{C}_3,\ \overset{3}{C}_3$$
$$\text{etc.}$$

zu haben, und dieses ist es, was man erreichen wollte.

VIII. Von dem Vorgetragenen soll nun der Gebrauch gezeigt werden, um die eigentlich aufgegebene Aufgabe aufzulösen; nämlich:

Die Gleichung von dem möglich niedrigsten Grade zu finden, die das Resultat von zwei andern seyn soll, aus welchen man das x fortschaffen will.

Indem man immer Gleichungen von niederm Grade nimmt, gelangt man endlich zu den zwei folgenden, in welchen M den zu x^{n-m} gehörigen Coefficienten vorstellt.

$$\overset{1}{M}_1 x^{n-m} + \overset{2}{M}_1 x^{n-m-1} + \overset{3}{M}_1 x^{n-m-2} + \overset{4}{M}_1 x^{n-m-3} + \ldots = 0,$$
$$\overset{2}{M}_1 x^{n-m} + (\overset{3}{M}_1 + \overset{1}{M}_2) x^{n-m-1} + (\overset{4}{M}_1 + \overset{2}{M}_2) x^{n-m-2} + (\overset{5}{M}_1 + \overset{3}{M}_2) x^{n-m-3} + \ldots = 0.$$

Es sey $n = m$; so ist $\overset{2}{M}_1 = 0$; $\overset{3}{M}_1 = 0$; $\overset{4}{M}_1 = 0$; etc.

$$\overset{1}{M}_2 = 0;\ \overset{2}{M}_2 = 0;\ \overset{3}{M}_2 = 0;\ \text{etc.}$$

und unsere zwei Gleichungen reduciren sich auf $\overset{1}{M}_1 = 0$,
und diese ist die von x befreite Gleichung, die aus den beiden andern hervorgehet.

$$A_1 x^n + A_2 x^{n-1} + A_3 x^{n-3} + \ldots = 0$$
$$B_1 x^n + B_2 x^{n-1} + B_3 x^{n-3} + \ldots = 0$$

IX. Es sey $n = 2$, so hat man $\overset{1}{D}_1 = 0$,
für die Gleichung, die aus den beiden Gleichungen vom 2ten Grade, aus welchen man x fortgeschaft hat, hervorgeht; setzt man für $\overset{1}{D}_1$ den Werth, so ist

$$\overset{2}{C}{}_1^2 - \overset{1}{C}_1 \left[\overset{3}{C}_2 + \overset{1}{C}_1\right] = 0,$$

oder, weil, wenn nur vom 2ten Grade die Rede ist, $\overset{3}{C}_1 = 0$ ist, so hat man

$$\overset{2}{C}{}_1^2 - \overset{1}{C}_1 . \overset{1}{C}_2 = 0,$$

eine

eine Gleichung von 4 Dimensionen, und gewiſs von der möglichst niedrigen Ordnung, weil, nachdem man $\overset{1}{C}_1 = 0$ gehabt hat, als doch nur von zwei Gleichungen vom ersten Grade die Rede war, das, was man haben muſs, wenn von Gleichungen des zweiten Grades die Rede ist, wenigstens $\overset{1}{C}{}_1^2$ seyn muſs.

X. Es sey $n = 3$, so wird zur Gleichung, die aus den beiden Gleichungen vom dritten Grade, aus welchen man x fortgeschaft hat, hervorgehet, erhalten $\overset{1}{E}_1 = 0$; substituirt man, so ist

$$\overset{2}{D}{}_1^2 - \overset{1}{D}_1 . (\overset{1}{D}_2 + \overset{3}{D}_1) = 0;$$

oder, da $\overset{3}{D}_1 = 0$ (im Fall des dritten Grades), so hat man

$$\overset{2}{D}{}_1^2 - \overset{1}{D}_1 . \overset{1}{D}_2 = 0;$$

Substituirt man und beobachtet, daſs in dem gegenwärtigen Falle $\overset{4}{C}_1 = 0$, so hat man

$$\left[\overset{2}{C}_1 . \overset{3}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 . \overset{2}{C}_2\right]^2 - \left[\overset{2}{C}{}_1^2 - \overset{1}{C}_1 \left(\overset{1}{C}_2 + \overset{3}{C}_1\right)\right]\left[\overset{3}{C}{}_1^2 - \overset{1}{C}_1 . \overset{1}{C}_3\right] = 0;$$

Läſst man die Glieder weg, die sich aufheben, und dividirt das Ganze mit $\overset{1}{C}_1$, so hat man

$$- \overset{2}{C}_1 . \overset{3}{C} . \overset{2}{C}_2 - \overset{2}{C}_2 . \left[\overset{2}{C}_1 . \overset{3}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 . \overset{2}{C}_2\right] + \overset{2}{C}{}_1^2 . \overset{1}{C}_3 + \left(\overset{1}{C}_2 + \overset{3}{C}_1\right) . \left(\overset{3}{C}{}_1^2 - \overset{1}{C}_1 . \overset{1}{C}_3\right) = 0,$$

eine Gleichung von der 9ten Dimension, und sicherlich vom möglichst niedrigen Grade.

XI. Die resultirende Gleichung aus zwei Gleichungen vom dritten Grade war in X. gefunden, also wird die aus zwei Gleichungen vom vierten Grade seyn:

$$- \overset{2}{D}_2 . \overset{2}{D}_1 . \overset{3}{D}_1 - (\overset{2}{D}_1 . \overset{5}{D}_1 - \overset{1}{D}_1 . \overset{2}{D}_2)\, \overset{2}{D}_2 + (\overset{1}{D}_2 + \overset{3}{D}_1)\, \overset{6}{D}{}_1^2 + [\overset{2}{D}{}_1^2 - \overset{1}{D}_1 . (\overset{1}{D}_2 + \overset{3}{D}_1)]\, \overset{1}{D}_3 = 0.$$

Substituirt man und beobachtet, daſs im Fall des vierten Grades $\overset{5}{C}_1 = 0$; $\overset{4}{C}_2 = 0$; $\overset{3}{C}_3 = 0$; $\overset{2}{C}_4 = 0$; $\overset{1}{C}_5 = 0$, so ist

$$- [\overset{3}{C}_1 . \overset{4}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 . \overset{2}{C}_3] . [\overset{2}{C}_1 . \overset{3}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 . (\overset{2}{C}_2 + \overset{4}{C}_1)] . [\overset{2}{C}_1 . \overset{4}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 . \overset{3}{C}_2]$$

$$- [[\overset{2}{C}_1 . \overset{3}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 (\overset{2}{C}_2 + \overset{4}{C}_1)] . (\overset{2}{C}_1 . \overset{4}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 . \overset{3}{C}_2) - [\overset{2}{C}{}_1^2 - \overset{1}{C}_1 (\overset{1}{C}_2 + \overset{3}{C}_1)] . (\overset{3}{C}_1 . \overset{4}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 . \overset{2}{C}_3)]$$

$$\times (\overset{2}{C}_1 . \overset{4}{C}_1 - \overset{1}{C}_1 . \overset{2}{C}_3)$$

$$+[\overset{3}{C}_1^2-\overset{1}{C}_1(\overset{1}{C}_3+\overset{3}{C}_2)](\overset{2}{C}_1\cdot\overset{4}{C}_1-\overset{1}{C}_1\cdot\overset{3}{C}_2)^2+$$

$$[\overset{2}{C}_1\cdot\overset{3}{C}_1-\overset{1}{C}_1\cdot(\overset{2}{C}_2+\overset{4}{C}_1)]^2-[\overset{2}{C}_1^2-\overset{1}{C}_1\cdot(\overset{1}{C}_2+\overset{3}{C}_1)]\cdot[\overset{3}{C}_1^2-\overset{1}{C}_1(\overset{1}{C}_3+\overset{1}{C}_2)]\,(\overset{4}{C}_1^2-\overset{1}{C}_1\cdot\overset{1}{C}_4)=0.$$

Läſst man alle Glieder weg, die sich aufheben, und dividirt das Ganze mit $\overset{1}{C}_1^2$, so hat man

$$-\overset{2}{C}_3\cdot(\overset{2}{C}_2+\overset{4}{C}_1)\cdot\overset{2}{C}_1\cdot\overset{4}{C}_1-\overset{2}{C}_3\cdot\overset{2}{C}_1\cdot\overset{3}{C}_1\cdot\overset{3}{C}_2-\overset{3}{C}_1\cdot\overset{4}{C}_1(\overset{2}{C}_2+\overset{4}{C}_1)\cdot\overset{3}{C}_2+\overset{1}{C}_1\cdot\overset{2}{C}_3\cdot(\overset{2}{C}_2+\overset{4}{C}_1)\cdot\overset{3}{C}_2$$
$$-(\overset{2}{C}_2+\overset{4}{C}_1)\cdot\overset{3}{C}_2\cdot\overset{3}{C}_1\cdot\overset{4}{C}_1$$
$$-(\overset{2}{C}_2+\overset{4}{C}_1)\cdot\overset{2}{C}_1\cdot\overset{4}{C}_1\cdot\overset{2}{C}_3-\overset{2}{C}_1\cdot\overset{3}{C}_1\cdot\overset{3}{C}_2\cdot\overset{2}{C}_3+\overset{1}{C}_1\cdot(\overset{2}{C}_2+\overset{4}{C}_1)\overset{3}{C}_2\cdot\overset{2}{C}_3+(\overset{1}{C}_2+\overset{5}{C}_1)\overset{2}{C}_3\cdot\overset{3}{C}_1\cdot\overset{4}{C}_1$$
$$+(\overset{1}{C}_2+\overset{3}{C}_1)\overset{3}{C}_1\cdot\overset{4}{C}_1\cdot\overset{2}{C}_3$$
$$+\overset{2}{C}_1^2\cdot\overset{2}{C}_3^2-\overset{1}{C}_1\cdot(\overset{1}{C}_2+\overset{3}{C}_1)\cdot\overset{2}{C}_3^2+(\overset{1}{C}_3+\overset{3}{C}_2)\cdot\overset{3}{C}_2\cdot\overset{2}{C}_1\cdot\overset{4}{C}_1+(\overset{1}{C}_3+\overset{3}{C}_2)\overset{2}{C}_1\cdot\overset{4}{C}_1\cdot\overset{3}{C}_2^2+\overset{3}{C}_1^2\cdot\overset{3}{C}_2^2$$
$$-\overset{1}{C}_1\cdot(\overset{1}{C}_3+\overset{3}{C}_2)\cdot\overset{3}{C}_2^2+(\overset{3}{C}_2+\overset{4}{C}_1)\overset{4}{C}_1^2+(\overset{2}{C}_2+\overset{4}{C}_1)\overset{4}{C}_1\cdot\overset{3}{C}_1\cdot\overset{1}{C}_4+\overset{2}{C}_1\cdot\overset{3}{C}_1(\overset{2}{C}_2+\overset{4}{C}_1)^2$$
$$-\overset{1}{C}_1\cdot(\overset{2}{C}_2+\overset{4}{C}_1)^2\cdot\overset{1}{C}_4$$
$$-(\overset{1}{C}_2+\overset{3}{C}_1)^2\cdot\overset{4}{C}_1^2-(\overset{1}{C}_2+\overset{3}{C}_1)\cdot\overset{3}{C}_1^2\cdot\overset{1}{C}_4-\overset{2}{C}_1^2\cdot(\overset{1}{C}_3+\overset{3}{C}_2)\cdot\overset{1}{C}_4+\overset{1}{C}_1\cdot(\overset{1}{C}_2+\overset{3}{C}_1)(\overset{1}{C}_3+\overset{3}{C}_2)\cdot\overset{1}{C}_4=0.$$

Eine Gleichung von der 16ten Dimension und gewiſs vom möglich niedrigsten Grade.

Mittelst dieser Methode wird man immer die Gleichung von dem möglich niedrigsten Grade ſinden, welche das Resultat der zwei andern von demselben Grade seyn wird, deren Coefficienten so unbestimmt sind, daſs man durchaus keine andern besondern Gleichungen zwischen ihnen annehmen kann, als die man sucht, und die deshalb nur statt ſindet, weil, da die nämliche unbekannte Gröſse beiden Gleichungen gemein ist, sie nothwendig wenigstens eine von ihren gemeinsamen Wurzeln haben.

Anders verhält es sich, wenn beide Gleichungen nicht von demselben Grade sind, ihnen ein oder mehrere Glieder fehlen, und ihre Coefficienten nicht so unbestimmt genommen werden, daſs man nicht wenigstens eine Gleichung, die zwischen ihnen statt ſindet, annehmen könnte; alsdann reicht einer von diesen Umständen zu, die aus beiden Gleichungen allgemein als Resultat gefundene Gleichung zu erniedrigen. Ich behalte mir vor, diesen Gegenstand zu einer andern Zeit wieder vorzunehmen.

Eine geometrische Aufgabe über Minima.

Von Herrn Gruson*).

I. Aufgabe. Drei Puncte A, B, C sind der Lage nach gegeben. Man soll in ihrer Ebene einen Punct D so bestimmen, dafs die Summe seiner Entfernungen von den drei gegebenen Puncten ein Minimum werde.

Aufl. Man ziehe in der Ebene der drei Puncte eine grade Linie IG, so dafs die drei gegebenen Puncte auf einerlei Seite dieser geraden Linie liegen, und fälle auf sie aus den drei Puncten die Perpendikel $AE = A$; $BF = B$; $CG = C$.

Auf der geraden Linie IG wähle man einen Punct I als Anfangspunct der Abscissen, so dafs alle Ordinaten auf einerlei Seite des Anfangspuncts I fallen, und setze die Segmente $IE = a$; $IF = b$; $IG = c$.

Endlich sey aus dem gesuchten Punct D ebenfalls ein Perpendikel $DH = y$ und die dazu gehörige Abscisse $IH = x$. Setzt man die Entfernungen des gesuchten Puncts D von den drei gegebenen A, B, C $= \alpha, \beta, \gamma$, so wird α die Hypotenuse eines rechtwinkligen Triangels seyn, dessen Catheten $x - a$, $y - A$, ($x > a$ und $y > A$ angenommen); so ergeben sich folgende Gleichungen

$$1) \quad (x-a)^2 + (y-A)^2 = \alpha^2$$
$$2) \quad (x-b)^2 + (y-B)^2 = \beta^2$$
$$3) \quad (x-c)^2 + (y-C)^2 = \gamma^2.$$

*) Vorgelesen den 21. November 1816.

Die Summe der Entfernungen, welche ein Minimum werden soll, heiſse u, so hat man

$$4)\ u = \alpha + \beta + \gamma.$$

Zwischen den sechs unbekannten oder veränderlichen Gröſsen $x, y, u, \alpha, \beta, \gamma$ hat man also vier Gleichungen, und man könnte vier dieser Gröſsen eliminiren, so daſs u eine Function zweier derselben, z. B. der Coordinaten x und y würde. Aber man kann, ohne diese Elimination wirklich zu machen, welche ohnehin in manchen Fällen, so wie auch im gegenwärtigen, Schwierigkeiten haben würde, so verfahren:

Die Gleichung Nr. 4. differentiirt, giebt

$$\left.\begin{array}{l} 5)\ \frac{du}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dx} = o \\ 6)\ \frac{du}{dy} = \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dy} = o \end{array}\right\}\ \text{für das Minimum.}$$

Aus Nr. 1. in Beziehung auf x differentiirt, erhält man

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{x - a}{\alpha}$$

Eben so aus Nr. 2.

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{x - b}{\beta}$$

und aus Nr. 3.

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{x - c}{\gamma}$$

Eben diese Gleichungen in Beziehung auf y differentiirt, geben

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{y - A}{\alpha}$$

$$\frac{d\beta}{dy} = \frac{y - B}{\beta}$$

$$\frac{d\gamma}{dy} = \frac{y - C}{\gamma}$$

Wenn man diese Ausdrücke in den Gleichungen Nr. 5. und 6. substituirt, so muſs seyn,

$$\frac{x - a}{\alpha} + \frac{x - b}{\beta} + \frac{x - c}{\gamma} = o,$$

$$\text{und } \frac{y - A}{\alpha} + \frac{y - B}{\beta} + \frac{y - C}{\gamma} = o.$$

Nun sind aber die drei Glieder der ersten dieser Gleichungen die Sinus der Winkel, welche die von dem gesuchten Punct D an die drei gegebenen Puncte gezogenen geraden Linien mit der Ordinate y machen, und die drei

Glieder der zweiten Gleichung sind die Cosinus eben dieser Winkel; bezeichnet man daher diese Winkel mit α', β', γ', so ist

$$7)\ \text{Sin}\,\alpha' + \sin\beta' + \sin\gamma' = 0,$$

$$8)\ \text{Cos}\,\alpha' + \cos\beta' + \cos\gamma' = 0.$$

Aus Nr. 7. folgt $\sin\alpha' + \sin\beta' = -\sin\gamma'$,

$$\sin^2\alpha' + 2.\sin\alpha'.\sin\beta' + \sin^2\beta' = \sin^2\gamma',$$

und aus Nr. 8. $\text{Cos}^2\alpha' + 2\cos\alpha'.\cos\beta' + \cos^2\beta' = \cos^2\gamma^1$;

folglich ist $1 + 2\ \text{Cos}\,(\alpha' - \beta') + 1 = 1$,

$$\text{Cos}\,(\alpha' - \beta') = -\tfrac{1}{2},$$

$$\alpha' - \beta' = 120°.$$

Eben so findet sich aus Nr. 7. und 8., wenn man $\sin\beta'$ und $\cos\beta'$ auf die andere Seite des Gleichheitszeichens bringt,

$$\text{Cos}\,(\alpha' - \gamma') = -\tfrac{1}{2}$$

$$\alpha' - \gamma' = 120°$$

und eben so $\beta' - \gamma' = 120°$.

Der gesuchte Punct mufs also so liegen, dafs die aus demselben an die drei gegebenen Puncte gezogenen geraden Linien gleiche Winkel mit einander machen, und es darf, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, keiner der drei Winkel des Triangels, an dessen Spitzen die drei gegebenen Puncte liegen, gröfser als 120° seyn.

Dafs aber wirklich unter dieser Voraussetzung ein Minimum statt finde, kann so gezeigt werden. Man differentiire die Gleichung Nr. 5. in Beziehung auf x, so erhält man

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\alpha - (x-a)\frac{d\alpha}{dx}}{\alpha^2} + \frac{\beta - (x-b)\frac{d\beta}{dx}}{\beta^2} + \frac{\gamma - (x-c)\frac{d\gamma}{dx}}{\gamma^2},$$

$$= \frac{\alpha - \frac{(x-a)^2}{\alpha}}{\alpha^2} + \frac{\beta - \frac{(x-b)^2}{\beta}}{\beta^2} + \frac{\gamma - \frac{(x-c)^2}{\gamma}}{\gamma^2},$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[1 - \left(\frac{x-a}{\alpha}\right)^2\right] + \frac{1}{\beta}\left[1 - \left(\frac{x-b}{\beta}\right)^2\right] + \frac{1}{\gamma}\left[1 - \left(\frac{x-c}{\gamma}\right)^2\right],$$

$$= \frac{1}{\alpha}.\text{Cos}^2\alpha' + \frac{1}{\beta}.\text{Cos}^2\beta' + \frac{1}{\gamma}.\text{Cos}^2\gamma'.$$

Eben so erhält man aus Nr. 6., wenn man in Beziehung auf y differentiirt,

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{\alpha - (y-A)\frac{d\alpha}{dy}}{\alpha^2} + \frac{\beta - (y-B)\frac{d\beta}{dy}}{\beta^2} + \frac{\gamma - (y-C)\frac{d\gamma}{dy}}{\gamma^2}$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[1 - \left(\frac{y-A}{\alpha}\right)^2\right] + \frac{1}{\beta}\left[1 - \left(\frac{y-B}{\beta}\right)^2\right] + \frac{1}{\gamma}\left[1 - \left(\frac{y-C}{\gamma}\right)^2\right].$$

$$= \frac{1}{\alpha}.\sin^2\alpha' + \frac{1}{\beta}.\sin^3\beta' + \frac{1}{\gamma}.\sin^2\gamma'.$$

Ferner ist, wenn man die Gleichung Nr. 6. in Beziehung auf x, oder die Gleichung Nr. 5. in Beziehung auf y differentiirt,

$$\frac{d^2u}{dx.dy} = -\frac{(y-A)\frac{d\alpha}{dx}}{\alpha^2} - \frac{(y-B)\frac{d\beta}{dx}}{\beta^2} - \frac{(y-C)\frac{d\gamma}{dx}}{\gamma^2},$$

$$= -\frac{y-A}{\alpha^2}.\frac{x-a}{\alpha} - \frac{y-B}{\beta^2}.\frac{x-b}{\beta} - \frac{y-C}{\gamma^2}.\frac{x-c}{\gamma},$$

$$= -\frac{1}{\alpha}.\cos\alpha'.\sin\alpha' - \frac{1}{\beta}.\cos\beta'.\sin\beta' - \frac{1}{\gamma}.\cos\gamma'.\sin\gamma',$$

und daher

$$\left(\frac{d^2u}{dx.dy}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}.\sin^2\alpha'.\cos^2\alpha' + \frac{1}{\beta^2}.\sin^2\beta'.\cos^2\beta' + \frac{1}{\gamma}.\sin^2\gamma'.\cos^2\gamma'$$

$$+ \frac{2}{\alpha\beta}.\sin\alpha'.\cos\alpha'.\sin\beta'.\cos\beta' + \frac{2}{\alpha\gamma}\sin\alpha'.\cos\alpha'.\sin\gamma'.\cos\gamma'$$

$$+ \frac{2}{\beta\gamma}.\sin\beta'.\cos\beta'.\sin\gamma'.\cos\gamma'.$$

Endlich ist

$$\frac{d^2u}{dx^2}.\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\alpha^2}.\sin^2\alpha'.\cos^2\alpha' + \frac{1}{\beta^2}.\sin^2\beta'.\cos^2\beta' + \frac{1}{\gamma^2}.\sin^2\gamma'.\cos^2\gamma'$$

$$+ \frac{1}{\alpha\beta}.\sin^2\alpha'.\cos^2\beta' + \frac{1}{\alpha\gamma}.\sin^2\alpha'.\cos^2\gamma' + \frac{1}{\beta\gamma}.\sin^2\beta'.\cos^2\gamma'$$

$$+ \frac{1}{\alpha\beta}.\cos^2\alpha'.\sin^2\beta' + \frac{1}{\alpha\gamma}.\cos^2\alpha'.\sin^2\gamma' + \frac{1}{\beta\gamma}.\cos^2\beta'.\sin^2\gamma'.$$

Hieraus folgt

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{d^2 u}{dy^2} - \left(\frac{d^2 u}{dx \cdot dy}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}\left[\sin^2\alpha'.\cos^2\beta' - 2\sin\alpha'.\cos\beta'.\cos\alpha'.\sin\beta' + \cos^2\alpha'.\sin^2\beta'\right]$$

$$+ \frac{1}{\alpha\gamma}\left[\sin^2\alpha'.\cos^2\gamma' - 2\sin\alpha'.\cos\gamma'.\cos\alpha'.\sin\gamma' + \cos^2\alpha'.\sin^2\gamma'\right]$$

$$+ \frac{1}{\beta\gamma}\left[\sin^2\beta'.\cos^2\gamma' - 2\sin\beta'.\cos\gamma'.\cos\beta'.\sin\gamma' + \cos^2\beta'.\sin^2\gamma'\right]$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\sin^2(\alpha'-\beta') + \frac{1}{\alpha\gamma}\sin^2(\alpha'-\gamma') + \frac{1}{\beta\gamma}\sin^2(\beta'-\gamma').$$

Also ist, wenn α, β, γ positiv sind, mithin der gesuchte Punct innerhalb des durch die drei gegebenen Puncte gebildeten Triangels liegt, sowohl $\frac{d^2 u}{dx^2}$ als $\frac{d^2 u}{dy^2}$ positiv, und zugleich $\frac{d^2 u}{dx^2} \cdot \frac{d^2 u}{dy^2} - \left(\frac{d^2 u}{dx \cdot dy}\right)^2$ eine positive Gröſse. Folglich findet wirklich ein Minimum statt, wenn α, β, γ positiv sind, d. i. auf den Schenkeln der Winkel von 120° selbst, nicht aber auf ihren Verlängerungen liegen.

II. Soll die Summe der Producte der Entfernungen α, β, γ in die gegebene Zahlen n, n′, n″ ein Minimum werden, so wird man haben

$$u = n.\alpha + n'.\beta + n''.\gamma,$$

$$\frac{du}{dx} = n.\frac{d\alpha}{dx} + n'.\frac{d\beta}{dx} + n''.\frac{d\gamma}{dx},$$

$$= n.\frac{x-a}{\alpha} + n'.\frac{x-b}{\beta} + n''.\frac{x-c}{\gamma}$$

$$= n.\sin\alpha' + n'.\sin\beta' + n''.\sin\gamma'.$$

$$\frac{du}{dy} = n.\frac{d\alpha}{dy} + n'.\frac{d\beta}{dy} + n''.\frac{d\gamma}{dy},$$

$$= n.\cos\alpha' + n'.\cos\beta' + n''.\cos\gamma'.$$

Da nun sowohl $\frac{du}{dx}$ als $\frac{du}{dy} = 0$ seyn müssen; so wird man, wenn $n''.\sin\gamma'$ und $n''.\cos\gamma'$ auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gebracht, und die Quadrate genommen werden, erhalten

$$n^2.\sin^2\alpha' + 2n.n'.\sin\alpha'.\cos\beta' + n'^2.\sin^2\beta' = n''^2.\sin^2\gamma,$$
$$n^2.\cos^2\alpha' + 2n.n'.\cos\alpha'.\cos\beta' + n'^2.\cos^2\beta' = n''^2.\cos^2\gamma,$$

$$n^2 + 2n.n'(\cos\alpha'.\cos\beta' + \sin\alpha'.\sin\beta') + n'^2. = n''^2,$$

oder $n^2 + n'^2 + 2n.n'.\cos(\alpha' - \beta') = n''^2$,

mithin $\cos(\alpha' - \beta') = -\dfrac{n^2 + n'^2 - n''^2}{2n.n'}$.

Eben so findet man, wenn $n'.\sin\alpha'$ und $n'.\cos\beta'$ auf die andere Seite des Gleichheitszeichens gesetzt werden,

$$\cos(\alpha' - \beta') = -\frac{n^2 + n''^2 - n'^2}{2n.n''},$$

und auf ähnliche Weise

$$\cos(\alpha' - \beta') = -\frac{n'^2 + n''^2 - n^2}{2n'.n''}.$$

Die gegebenen Zahlen n, n', n'' müssen also, wenn die Aufgabe möglich seyn soll, so beschaffen seyn, daſs die Ausdrücke der Cosinus ächte Brüche werden, zu welchem Ende je zwei der gegebenen Zahlen zusammen genommen gröſser seyn müssen als die dritte.

Man denke sich einen Triangel verzeichnet, dessen Seiten sich wie die Zahlen n, n', n'' verhalten, so werden $\alpha' - \beta'$, $\alpha' - \gamma'$, $\beta' - \gamma'$ die äuſseren Winkel dieses Triangels seyn, und man wird innerhalb des Triangels, an dessen Spitzen die drei gegebenen Puncte liegen, einen Punct so bestimmen können, daſs die aus diesem Punct an die Spitzen des Triangels gezogenen geraden Linien die gegebenen Winkel $2R - (\alpha' - \beta')$, $2R - (\alpha' - \gamma')$, $2R - (\beta' - \gamma')$ mit einander machen, wenn anders diese Winkel gröſser sind als die Winkel des gegebenen Triangels.

Als Anwendung kann die erste Aufgabe so eingekleidet werden:

Man hat in einer Kantonirung oder Winterpostirung drei Posten A, B, C, welche die Lage eines spitzwinkligen Triangels bestimmen; man will zur Sicherung der Kommunikation zwischen diesen Posten noch einen vierten Posten oder ein Piket irgendwo in D so stellen, daſs die dahin führenden Kommunikationswege AD, BD und CD zusammen genommen die möglichst kleinen werden, wodurch nicht allein Zeit und Arbeit bei Anlegung der Wege erspart, sondern auch der Vortheil erhalten wird, die beiden übrigen Posten B und C auf dem kürzesten Wege sich in D vereinigen und A unter-

stützen können; und dieses wird nach der obigen Voraussetzung bei jedem andern Posten, B oder C, welcher angegriffen wird, gelten, folglich, wenn

A angegriffen wird, mufs DB + DA und DC + DA ⎫
B - - - - - DB + DA und DB + DC ⎬ am kürzesten seyn,
C - - - - - DB + DC und DC + DA ⎭

oder es mufs, um diese Bedingungen im Ganzen zu erfüllen, diese Summe 4 (DB + DA + DC), oder DB + DA + DC ein Minimum seyn; man soll den Punct D oder dieses Minimum bestimmen.

Elementar-Beweis, daſs die Basis e der natürlichen Logarithmen durch keine rationale Zahl ausgedrückt werden kann, nebst verwandten Untersuchungen.

Von Herrn Gruson *).

Lambert hat in seinen Beiträgen II. Theil I. Abschnitt auf eine recht scharfsinnige Art durch die Theorie der continuirlichen Brüche erwiesen, daſs die Zahl π, die den Umfang des Kreises für den Durchmesser 1 ausdrückt, irrational seyn muſs. — Le Gendre hat im Anhange seiner Geometrie diesen Beweis etwas kürzer und eleganter ebenfalls mittelst der continuirlichen Brüche dargestellt. — Diese Beweise erfordern aber noch immer viel Anstrengung; ich habe es daher versucht, und es scheint mir gelungen zu seyn, viel einfachere Beweise von der Irrationalität der Summen solcher Reihen zu geben. — Lamberts Verdienste in diesen Untersuchungen scheinen noch nicht allgemein bekannt genug zu seyn, sonst würde man selbst von Mathematik-Verständigen nicht hören und lesen, daſs es z. B. gar noch nicht erwiesen wäre, daſs das Verhältniſs des Durchmessers zum Kreisumfange wirklich irrational sey. — Kästner in der 6ten Auflage des ersten Theils seiner Anfängsgründe der Mathematik Seite 342. 3 Anmerk. sagt: „In der Theorie könnte man noch suchen, ob sich das Verhältniſs des „Umfangs zum Durchmesser nicht durch ein Paar bestimmte Zahlen voll„kommen darstellen lieſse. Vermuthlich ist dieses Verhältniſs irrational. „Ich sage vermuthlich, denn Sturms Beweis davon *Mathes. Enucl. Lib. I.*

*) Vorgelesen den 30. Januar 1817.

§. 2. *Prop.* 43. ist Zweifeln unterworfen." — Seite 343. führt Kästner Lamberts dahin gehörige Abhandlung zwar an, aber ich mufs aus der vorher erwähnten Stelle schliefsen, Kästner habe Lamberts Untersuchungen nicht Aufmerksamkeit genug geschenkt, denn sonst wäre es unbegreiflich, wie er noch so unbestimmt von einer ganz ausgemachten Sache sprechen könnte.

I.

Bekanntlich ist $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots$

Da die beiden ersten Glieder von dieser Reihe zusammen 2 betragen und die Summe des übrigen Theils positiv ist, aber kleiner als die Summe der Reihe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots = \frac{1}{2-1} = 1, \text{ so folgt, dafs}$$

$$e > 2 \text{ aber } < 3.$$

Nun behaupte ich ferner, dafs diese Reihe durch keinen rationalen Bruch ausgedrückt werden kann, denn wäre sie einem nicht weiter aufzuhebenden Bruche $\frac{m}{n}$ gleich, so hätte man

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \ldots \frac{1}{2\ldots n} + \frac{1}{2\ldots n.n+1} + \ldots$$

Multiplizirt man diese Gleichung mit dem Product $1.2\ldots n$ der Reihe der natürlichen Zahlen bis zu derjenigen, die durch den Nenner des Bruchs $\frac{m}{n}$ angedeutet wird, so ergiebt sich

$$[1.2\ldots n-1].m = \text{einer ganzen Zahl} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1.n+2} + \frac{1}{n+1.n+2.n+3} + \ldots (A)$$

Da nun

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1.n+2} + \frac{1}{n+1.n+2.n+3} + \ldots$$

kleiner ist als $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots = \frac{1}{(n+1)-1} = \frac{1}{n}$

und da in der Gleichung (A) die erste Hälfte der Gleichung eine ganze Zahl ist, so würde daraus folgen, dafs, wenn man zu einer ganzen Zahl einen Bruch kleiner als $\frac{1}{n}$ addirte, das Resultat eine ganze Zahl seyn müfste, wel-

ches ungereimt ist; eben so ungereimt ist es, anzunehmen, daſs e eine rationale Zahl seyn soll, folglich ist e irrational.

II.

Die Gleichung

$$\text{Lg}\,(1-x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots\right)$$

giebt für $x = 1$

$$\text{lg}\,0 = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots\right),$$

da nun $\text{lg}\,0 = -\infty$, so schlieſst man daraus, daſs die Summe der Glieder

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

unendlich groſs ist.

Gestehen wir, daſs der hier gegebene Beweis nicht den Charakter der vollkommensten Ueberzeugung hat, denn obgleich die Glieder beständig abnehmen, so kann demungeachtet der Gang dieser Reihe doch nicht mit dem von einer abnehmenden geometr. Progression verglichen werden, denn der Verhältniſs-Nahme von zwei auf einander folgenden Gliedern nähert sich um so mehr der Einheit, je weiter sie von dem ersten Gliede der Reihe entfernt liegen, und in dem Uebergange von einem Gliede zum andern nimmt dieser Verhältniſs-Nahme zu. Wir können also im Zweifel bleiben, ob die Reihe noch geeignet sey, den Werth der ersten Hälfte der Gleichung zu geben; diese Zweifel lassen sich in der That einigermaſsen heben, indem man diese Reihe nicht mit einer abnehmenden geometrischen vergleicht, sondern mit dem, was aus der Reihe $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$ wird, wenn man x einen von der Einheit wenig unterschiedenen Werth giebt; denn da bei dieser Voraussetzung ein beliebiges Glied der harmonischen Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ gröſser als ein correspondirendes Glied der vorhergehenden Reihe ist, so folgt daraus, daſs die ganze harmonische Reihe dasjenige übertrifft, was aus der andern Reihe wird, wenn man für x einen kleinern Werth als 1 setzt, so wenig sie übrigens auch von dieser Einheit unterschieden seyn mag. Man kann es aber so machen, daſs x so wenig von der Einheit unterschieden ist, daſs die erste Reihe eine beliebige Zahl übersteigt; folglich ist die Summe der Glieder der

harmonischen Reihe auch viel gröfser als jede Gröfse; folglich ist sie unendlich grofs.

Um jeden Zweifel, der über das Gesagte noch da seyn könnte, gänzlich zu verscheuchen, so wollen wir die in Rede stehende Reihe, unabhängig von der Function, aus welcher sie entstand, betrachten, und zeigen, dafs man wirklich die Einheit unendliche Mal darin findet; zu diesem Ende wollen wir die Glieder der harmonischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \ldots$$

so zusammen ordnen, dafs jede Zusammenstellung alle Brüche enthalte, deren Nenner diejenigen ganzen Zahlen sind, die zwischen einer Potenz von 2 bis zu der unmittelbar nächst folgenden höhern Potenz liegen;

$$\text{Z B. } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2^1 + 1} + \frac{1}{2^1 + 2^1}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2^2 + 1} + \frac{1}{2^2 + 2} + \frac{1}{2^2 + 3} + \frac{1}{2^2 + 2^2}$$

$$\vdots$$

allgemein

$$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \frac{1}{2^n + 3} + \ldots \frac{1}{2^n + 2^n}.$$

Betrachten wir diese letztere Zusammenstellung, so findet sich, dafs die Summe der Brüche, deren Anzahl 2^n ist, gröfser ist, als der letzte Bruch $\frac{1}{2^n + 2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$ (welcher zugleich unter allen der Kleinste ist), so vielmal genommen, als Brüche da sind, d. h. die Summe jener Brüche ist gröfser als $\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$; da es hier nun so viel solche Zusammenstellungen geben mufs, als Potenzen von 2 in der harmonischen Reihe sind, und da diese Potenzen in unendlicher Anzahl vorhanden sind, so folgt daraus, dafs die Summe der Glieder der gegebenen Reihe $\frac{1}{2}$ unendlichemal enthalten, und folglich auch die Einheit selbst unendlichemal.

Bei dieser Gelegenheit will ich noch ein sehr merkwürdiges Resultat, welches man aus dieser Reihe erhält, berühren, aus welchem man geneigt wäre, zu folgern, dafs der natürliche Log. von 2 gleich Null sey.

Es sey S die Summe der Glieder von der harmonischen Reihe, also

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots; \qquad (B)$$

daher

$$\frac{1}{2} S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \ldots \qquad (C)$$

Ziehen wir diese Reihe von der ersten Reihe ab, so hat man

$$\frac{1}{2} S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots \qquad (D)$$

Ferner (D) weniger (C), giebt

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots;$$

Da nun $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \lg 2$,

so scheint daraus zu folgen, dafs $\lg 2 = 0$ sey.

Diese Schlufsfolge ist offenbar ungereimt, und hängt damit zusammen, dafs man nicht auf die Ergänzungs-Functionen Rücksicht genommen hat, die man immer zu den Gliedern der Entwickelung der Functionen zusetzen mufs, so weit man sie auch immer verlängern, und wie grofs auch immer die veränderliche Gröfse seyn mag, und sie giebt ein merkwürdiges Beispiel von der Gefahr, die man läuft, wenn man sich den Schlufsfolgen, zu welchen die Reihen Veranlassung geben können, überläfst, wenn man kein Mittel hat, nichts über die Natur dieser Functionen oder über ihre Gröfse festzusetzen.

Zusammenstellung der Gründe, von welchen der Gebrauch des Woltmanschen hydrometrischen Flügels abhängt, unabhängig von jeder Theorie über den Stoſs des Wassers.

Von Herrn Eytelwein *).

1. Der Woltmansche hydrometrische Flügel ist für den Wasserbaumeister, zur Bestimmung der Geschwindigkeit des flieſsenden Wassers, ein so unentbehrliches Werkzeug, daſs es nicht unwichtig ist, bei der noch sehr mangelhaften Theorie über den Stoſs des Wassers, die Gründe, auf welche sich der Gebrauch desselben stützt, unabhängig von dieser Theorie, zusammen zu stellen, und dadurch jedem Zweifel zu begegnen, welcher bisher über den richtigen Gebrauch dieses wichtigen Werkzeugs entstanden ist. Die vollständige Beschreibung des Flügels findet man in der Schrift des Herrn Woltman: „Theorie und Gebrauch des hydrometrischen Flügels. Hamburg, 1790." weshalb die Beschaffenheit desselben hier als bekannt angenommen wird.

Vorausgesetzt, das ganze Instrument werde in stillstehendem Wasser nach einerlei Richtung dergestalt gleichförmig bewegt, daſs die Ruthen oder Stangen, an welchen die Wasserflügel befestigt sind, auf der angenommenen Richtung senkrecht stehen nnd während der Fortbewegung des Instruments die Flügel, durch den entstehenden Wasserstoſs, sich frei umdrehen können, so sey A der Raum, welchen das ganze Instrument, in der Zeit T, gleich-

*) Vorgelesen den 23. Oktober 1817.

förmig durchläuft, und N die Anzahl der Umläufe eines Flügels in dieser Zeit. Irgend ein Punkt dieses Flügels durchlaufe bei einer Umdrehung desselben den Kreis P, und es sey V die Geschwindigkeit dieses Punkts oder der Bogen, welchen dieser Punkt in jeder Sekunde durchläuft, welcher hier die Geschwindigkeit des Flügels heifsen kann, so erhält man diese Geschwindigkeit

$$V = \frac{NP}{T}.$$

Derselbe Raum A werde in der Zeit T′ durchlaufen, in welcher N′ Umläufe des Flügels mit der Geschwindigkeit V′ erfolgen, so wird

$$V' = \frac{N'P}{T'} \text{ also } \frac{TV}{N} = \frac{T'V'}{N'} \text{ oder}$$

$$\text{(I)} \quad \frac{N}{N'} = \frac{TV}{T'V'}.$$

Bezeichnet man ferner durch C, C′ die entsprechenden Geschwindigkeiten, mit welchen das ganze Instrument den Raum A in den Zeiten T, T′ durchlaufen hat, so wird $A = CT = C'T'$ oder

$$\text{(II)} \quad \frac{C}{C'} = \frac{T'}{T}.$$

Verhielten sich nun die Geschwindigkeiten des Flügels wie die zugehörigen Geschwindigkeiten des ganzen Instruments, so wird $V : V' = C : C'$ also $\frac{C}{C'} = \frac{V}{V'} = \frac{T'}{T}$ wegen (II), also $\frac{TV}{T'V'} = 1$ oder $\frac{N}{N'} = 1$ wegen (I), daher $N = N'$.

Ist daher die Voraussetzung richtig, dafs sich verhält $V : V' = C : C'$, so mufs auch $N = N'$ seyn, oder für einerlei Flügel wird stets dieselbe Anzahl von Umläufen entstehen, man mag ihn langsam oder schnell durch einerlei Raum bewegen. Diesen Satz beweisen alle bisher angestellte Beobachtungen, daher ist auch die Voraussetzung $V : V' = C : C'$ als richtig anzunehmen.

Da nun die Zahl der Umläufe N für einerlei Raum A und einerlei Flügel unveränderlich bleibt, so setze man dafs aus zureichenden Beobachtungen $\frac{A}{N} = a$ bestimmt werde, so ist a der Raum, welchen das Instrument bei jedem Umgang des Flügels durchläuft. Macht der Flügel n Umläufe

in

in der Zeit t, so ist na der Raum, welchen das Instrument in dieser Zeit durchläuft, und wenn c die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher das Instrument im stillstehenden Wasser fort bewegt wird, so ist $c = \frac{na}{t}$.

Anstatt das Instrument im stillstehenden Wasser zu bewegen, werde vorausgesetzt, daſs, bei ungehinderter Umdrehung der Flügel, bewegtes Wasser dem stillstehenden Instrument, mit der Geschwindigkeit c entgegen ströme, so muſs der Erfolg unverändert bleiben, und es ist noch

$$\text{(III)} \quad c = \frac{an}{t}.$$

Ist daher für ein Instrument der Werth a ein für allemal bekannt, so läſst sich alsdann, bei unveränderter Stellung der Flügel, aus der beobachteten Zeit t, in welcher die Flügel eine gewisse Anzahl n Umläufe machen, die entsprechende Geschwindigkeit des flieſsenden Wassers, unabhängig von jeder Theorie des Wasserstoſses bestimmen.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daſs hiernach der Gebrauch eines jeden hydrometrischen Flügels davon abhängt, für eine bestimmte Stellung der Flügel den dazu gehörigen Werth von a genau auszumitteln. Wären daher für verschiedene Längen A', A'', A''', ... die beobachtete Anzahl der Umläufe des Flügels im stillstehenden Wasser, N', N'', N''', ... und man findet $\frac{A'}{N'} = a'$, $\frac{A''}{N''} = a''$, ..., so erhält man als Mittelwerth für μ Beobachtungen

$$a = \frac{a' + a'' + a''' + \ldots}{\mu}.$$

Hieraus folgt zugleich, daſs die Prüfung der Richtigkeit dieses Instruments, wenn die Vermuthung entstehen sollte, daſs durch den Gebrauch eine Biegung der zarten Ruthen oder Flügel entstanden wäre, sehr leicht ist, weil es selten an einer Gelegenheit fehlen wird, die erforderlichen Beobachtungen in stillstehendem Wasser anzustellen.

Die ganze Einrichtung des Instruments würde, so wie solche Herr Woltman beschrieben hat, beizubehalten seyn, wenn nur die Vorrichtung getroffen wird, daſs die Flügel jedesmal genau diejenige Stellung erhalten, worauf sich der Werth a bezieht. Dies wird am sichersten dadurch zu erreichen seyn, daſs das Ende der Ruthen, welches gewöhnlich cylindrisch abgedreht in eine Hülse mittelst Schrauben befestigt wird, eine prismati-

sche Gestalt erhält, um jede Umdrehung der Ruthen um ihre Axe zu verhindern.

II. Die vorstehende Bestimmung der Geschwindigkeit des fliefsenden Wassers, nach dem Ausdruck (III), setzt voraus, dafs die geringste Geschwindigkeit des Wassers im Stande sey den Flügel umzudrehen, welches auch bei fleifsig gearbeiteten Instrumenten der Fall ist, weil die Reibung bei denselben so klein ausfällt, dafs die geringste bemerkbare Geschwindigkeit des Wassers im Stande ist, den Flügel in Bewegung zu setzen. Anders verhält es sich, wenn man den hydrometrischen Flügel auf die Beobachtung der Geschwindigkeit des Windes anwenden will, weil alsdann schon eine bestimmte Geschwindigkeit der Luft erfordert wird, die Reibung des Flügels zu überwältigen. Will man daher diesen Flügel auch als Windmesser gebrauchen, so wird der Ausdruck, welcher die Geschwindigkeit des Wassers bestimmt, hier keine Anwendung finden, und man wird zur Erlangung eines allgemeinen Ausdrucks den durch alle angestellten Versuche bestätigten Erfahrungssatz anwenden können, dafs sich unter übrigens gleichen Umständen die Wirkungen des Windes eben so wie die des Wassers, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten der anstofsenden Flüssigkeiten verhalten, welche Gestalt auch die dem Stofse ausgesetzte Oberfläche erhalten mag.

Dies vorausgesetzt, so erhält man, wenn C die Geschwindigkeit des Windes und V die Geschwindigkeit bezeichnet, mit welcher sich der Flügel frei umdreht, $C^2 = mV^2$, wo m die noch unbekannte, von der Gestalt der gestofsenen Fläche abhängige Funktion seyn mag. Weil aber die Bewegung des Flügels nicht frei erfolgt, sondern durch die Reibung verhindert wird, so kann diese als eine Kraft betrachtet werden, welche dem Flügel nach der Richtung seiner Geschwindigkeit V entgegen wirkt. Diese Kraft sey Q, so wird

$$C^2 = mV^2 + Q.$$

Wird das Instrument in stiller Luft bewegt, und dadurch die gröfste Geschwindigkeit des Instruments ausgemittelt, für welche noch keine Bewegung des Flügels erfolgt, so sey β diese Geschwindigkeit des Instruments, für welche $V = o$ ist; so erhält man, wenn in vorstehender Formel $C = \beta$ und $V = o$ gesetzt wird, $\beta^2 = Q$, also

$$C^2 = mV^2 + \beta^2.$$

Die Bewegung des Instruments in stiller Luft verursache, daſs N Umläufe des Flügels in der Zeit T entstehen, wenn der Flügel bei jeder Umdrehung mit der Geschwindigkeit V den Kreis P durchläuft, so erhält man

$$V = \frac{PN}{T} \text{ oder } V^2 = \frac{P^2 N^2}{T^2}.$$

Es ist aber $V^2 = \dfrac{C^2 - \beta^2}{m}$ also $= \dfrac{P^2 N^2}{T^2}$, daher

$$C^2 = mP^2 \cdot \frac{N^2}{T^2} + \beta^2,$$

wo m und P unbekannte Gröſsen sind.

Setzt man $mP^2 = \alpha$, so wird $\alpha = \dfrac{C^2 T^2 - \beta^2 T^2}{N^2}$, und wenn A den Raum bezeichnet, welchen das Instrument in der Zeit T mit der Geschwindigkeit C durchläuft, so wird $A = CT$ also

$$\alpha = \frac{A^2 - \beta^2 T^2}{N^2}.$$

Sind nun aus mehrern Beobachtungen für verschiedene Räume A', A'', A''', ... welche das Instrument durchlaufen hat, T', T'', T''', ... die zugehörigen Zeiten, und N', N'', N''', ... die entsprechende Anzahl der Umläufe des Flügels, so erhält man für μ solcher Beobachtungen, wenn

$$\frac{A'A' - \beta^2 T'T'}{N'N'} = B'; \quad \frac{A''A'' - \beta^2 T''T''}{N''N''} = B'',$$

u. s. w. gesetzt wird

$$\alpha = \frac{B' + B'' + B''' + \ldots}{\mu}. \text{ folglich}$$

$$C = \sqrt{\left(\alpha \frac{N^2}{T^2} + \beta^2\right)}.$$

Ueber die Vergleichung der Differenz-Coefficienten mit den Bernoullischen Zahlen.

Von Herrn EYTELWEIN *).

Bei der Entwickelung der höhern Differenzen in Reihen, welche nach den Potenzen der ersten Differenzen fortschreiten, entstehen Zahlen-Coefficienten, die hier den Namen Differenz-Coefficienten erhalten sollen. Diese Coefficienten sind von weitläuftigem Gebrauche bei analytischen Untersuchungen, und deshalb besonders merkwürdig, weil sie mit den Coefficienten mehrerer der wichtigsten Reihen in Verbindung stehen, vorzüglich aber, weil sie mit denjenigen Coefficienten, welche unter dem Namen der Bernoullischen Zahlen bekannt sind, zusammen hängen.

Hier ist die Absicht, die Eigenschaften und den Zusammenhang dieser Zahlen mittelst abkürzender Bezeichnung darzustellen.

1.

Es sey y_n irgend eine Funktion von n, und für die besondern Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots$ statt n, erhalte man y; y_1; y_2; y_3; ... statt y_n, so ist y; y_1; y_2; y_3; ... eine Reihe von $n+1$ Gliedern, deren allgemeines Glied durch y_n und deren Summe durch $\int y_n$ ausgedrückt werden kann. Läuft die Reihe ohne Ende fort, so soll ihre Summe durch ${}^{\text{t}}\!\int y_n$ bezeichnet werden.

Von irgend einem Binom, welches auf die m^{te} Potenz erhoben werden soll, bezeichne man den $n+1^{\text{ten}}$ Coefficienten durch m_n, so ist der erste

*) Vorgelesen den 28. März 1816.

Binomial-Coefficient $m_0 = 1$, der zweite $m_1 = m$, der dritte $m_2 = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}$, u. s. w.

Ferner werde zur Bezeichnung einer numerischen Fakultät, deren erster Faktor sowohl als die Differenzen der aufeinander folgenden Faktoren der Einheit gleich sind, eine eckigte Klammer gewählt, innerhalb welcher sich der letzte Faktor eingeschlossen befindet. Z. B. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = [5]$; $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n = [n]$.

2.

Nach der Lehre von den Differenzen der Funktionen ist, wenn m eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$\Delta^m y = y_m - m_1 y_{m-1} + m_2 y_{m-2} - \ldots \pm m_2 y_2 \mp m_1 y_1 \pm y$$

wo m_1; m_2; m_3; .... Binomial-Coefficienten sind, und die obern Zeichen für ein grades, die untern für ein ungrades m gelten.

Man setze $y = x^r$ und $\Delta x = h$, so wird $y_1 = (x + h)^r$; $y_2 = (x + 2h)^r$; ... $y_m = (x + mh)^r$. Diese Werthe in vorstehenden Ausdruck gesetzt und die Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, so findet man, wenn durch r_1; r_2; r_3; .... ebenfalls Binomial-Coefficienten angedeutet werden:

$$\Delta^m x^r = \left.\begin{array}{r} +1 \\ -m_1 \\ +m_2 \\ \ldots \\ \pm m_2 \\ \mp m_1 \\ \pm 1 \end{array}\right| x^r + \left.\begin{array}{l} m \\ -m_1(m-1) \\ +m_2(m-2) \\ \ldots \\ \pm m_2 \cdot 2 \\ \mp m_1 \cdot 1 \end{array}\right| r_1 h x^{r-1} + \left.\begin{array}{l} m^2 \\ -m_1(m-1)^2 \\ +m_2(m-2)^2 \\ \ldots \\ \pm m_2 \cdot 2^2 \\ \mp m_1 \cdot 1^2 \end{array}\right| r_2 h^2 x^{r-2} \ldots$$

$$\ldots + \left.\begin{array}{l} m^{m-1} \\ -m_1(m-1)^{m-1} \\ +m_2(m-2)^{m-1} \\ \ldots \\ \pm m_2 \cdot 2^{m-1} \\ \mp m_1 \cdot 1^{m-1} \end{array}\right| r_{m-1} h^{m-1} x^{r-m+1} + \left.\begin{array}{l} m^m \\ -m_1(m-1)^m \\ +m_2(m-2)^m \\ \ldots \\ \pm m_2 \cdot 2^m \\ \mp m_1 \cdot 1^m \end{array}\right| r_m h^m x^{r-m} + \ldots \text{ u. s. w.}$$

Weil aber nach den Eigenschaften der Reihen mit Binomial-Coefficienten hier alle dem $m + 1^{\text{ten}}$ Gliede vorangehende Coefficienten $= 0$ werden, so findet man:

$$\Delta^m x^r$$

$$= r_m \{ m^m - m_1 (m-1)^m + m_2 (m-2)^m - \ldots \pm m_2 . 2^m \mp m_1 . 1^m \} h^m x^{r-m}$$
$$+ r_{m+1} \{ m^{m+1} - m_1 (m-1)^{m+1} + m_2 (m-2)^{m+1} - \ldots \pm m_2 . 2^{m+1} \mp m_1 . 1^{m+1} \} h^{m+1} x^{r-m-1}$$
$$+ r_{m+2} \{ m^{m+2} - m_1 (m-1)^{m+2} + m_2 (m-2)^{m+2} - \ldots \pm m_2 . 2^{m+2} \mp m_1 . 1^{m+2} \} h^{m+2} x^{r-m-2}$$
$+$ u. s. w.

Erhalten die in grofse Klammern eingeschlossene Reihen den Namen der Differenz-Coefficienten, und man setzt:

$${}^mD = m^m - m_1 (m-1)^m + m_2 (m-2)^m - \ldots \pm m_2 . 2^m \mp m_1 . 1^m$$
$${}^mD_1 = m^{m+1} - m_1 (m-1)^{m+1} + m_2 (m-2)^{m+1} - \ldots \pm m_2 . 2^{m+1} \mp m_1 . 1^{m+1}$$
$${}^mD_2 = m^{m+2} - m_1 (m-1)^{m+2} + m_2 (m-2)^{m+2} - \ldots \pm m_2 . 2^{m+2} \mp m_1 . 1^{m+2}$$

u. s. w., so wird

(I) $${}^mD_n = m^{m+n} - m_1 (m-1)^{m+n} + m_2 (m-2)^{m+n} - m_3 (m-3)^{m+n} + \ldots \pm m_2 \, 2^{m+n} \mp m_1 \, 1^{m+n}$$

wo die obern Zeichen für ein grades, die untern für ein ungrades m gelten.

Hiernach ist ${}^mD_n$ der $n+1^{te}$ Differenz-Coefficient in der Reihe der m^{ten} Differenzen, und es wird ${}^mD_n = 0$; ${}^1D_n = 1$ und ${}^0D_n = 0$.

Dieser Beziehung gemäfs ist:

(II) $$\Delta^m x^r = r_m \, {}^mD \, h^m x^{r-m} + r_{m+1} \, {}^mD_1 \, h^{m+1} x^{r-m-1} + r_{m+2} \, {}^mD_2 \, h^{m+2} x^{r-m-2} + \ldots$$

5.

In (I) §. 2. werde $n-1$ statt n und $m-1$ statt m, dann aber $m+n-1 = p$ gesetzt, dies giebt:

$${}^mD_{n-1} = m^p - m_1 (m-1)^p + m_2 (m-2)^p - m_3 (m-3)^p + \ldots \pm m_2 \, 2^p \mp m_1$$
$${}^{m-1}D_n = + (m-1)^p - (m-1)_1 (m-2)^p + (m-1)_2 (m-3)^p - \ldots \mp (m-1)_2 \, 2^p \pm (m-1)_1$$

Beide Reihen zusammen addirt und mit m multiplicirt, giebt

$$m ({}^{m-1}D_n + {}^mD_{n-1}) =$$
$$m^{m+n} - m(m-1)(m-1)^p + m \{ m_2 - (m-1)_1 \} (m-2)^p - m \{ m_3 - (m-1)_2 \} (m-3)^p \ldots$$
$$\pm m \{ m_2 - (m-1)_2 \} 2^p \mp m \{ m_1 - (m-1)_1 \} 1^p.$$

Nun ist, wenn q irgend eine positive ganze Zahl bedeutet, nach den Eigenschaften der Binomial-Coefficienten

$m \{ m_q - (m-1)_{q-1} \} = (m-q) . m_q$ und $m \{ m_q - (m-1)_{q-1} \} = q . m_q$. daher

$$m ({}^{m-1}D_n - {}^mD_{n-1}) = m^{m+n} - m_1 (m-1)^{m+n} + m_2 (m-2)^{m+n} - \ldots \pm m_2 \, 2^{m+n} \mp m_1 \, 1^{m+n}$$

oder nach (I) §. 2.

(I) $^{m}D_{n} = m\,({}^{m-1}D_{n} + {}^{m}D_{n-1})$.

Hiernach läſst sich leicht eine Tafel für die verschiedenen Werthe der Differenz-Coefficienten berechnen. In Eulers Differenzialrechnung 1. Theil. Kap. 1. §. 14. und 2. Theil. Kap. 3. §. 55. wird diese Eigenschaft aber ohne Beweis angeführt.

Nach (I) findet man:

$$^{1}D_{n} = 1\,({}^{0}D_{n} + {}^{1}D_{n-1}) = 1;$$

$$^{2}D_{n} = 2\,({}^{1}D_{n} + {}^{2}D_{n-1}) = 1.2 + 2.{}^{2}D_{n-1};$$

$$^{3}D_{n} = 3\,({}^{2}D_{n} + {}^{3}D_{n-1}) = 1.2.3 + 2.3.{}^{2}D_{n-1} + 3\,{}^{3}D_{n-1};$$

$$^{4}D_{n} = 4\,({}^{3}D_{n} + {}^{4}D_{n-1}) = 1.2.3.4 + 2.3.4.{}^{2}D_{n-1} + 3.4.{}^{3}D_{n-1} + 4.{}^{4}D_{n-1};$$

und überhaupt nach der Bezeichnung §. 1.

(II) $$^{m}D_{n} = [m]\left(1 + \frac{^{2}D_{n-1}}{[1]} + \frac{^{3}D_{n-1}}{[2]} + \frac{^{4}D_{n-1}}{[3]} + \ldots + \frac{^{m-1}D_{n-1}}{[m-2]} + \frac{^{m}D_{n-1}}{[m-1]}\right).$$

Hierin $n = 0$ gesetzt, giebt

(III) $^{m}D = [m] = 1.2.3.4 \ldots m.$

4.

Bedeuten A; A_1; A_2; A_3; .... noch näher zu bestimmende Coefficienten, welche von x unabhängig sind, so läſst sich leicht beweisen, daſs die Reihe für $\Delta^{-1} x^r = \Sigma x^r$ folgende Form erhält:

$$\Sigma x^r = A x^{r+1} + A_1 x^r + A_2 x^{r-1} + A_3 x^{r-2} + \ldots$$

Als Differenz von jedem Gliede dieser Gleichung findet man, wenn $\Delta x = 1$ gesetzt wird:

$$x^r = \frac{r+1}{1} A h x^r + \frac{r+1.r}{1.2} A h^2 \left| x^{r-1} + \frac{r+1.r.r-1}{1.2.3} A h^3 \right| x^{r-2} + \ldots$$
$$\qquad\qquad + \frac{r}{1} A_1 h \qquad\qquad + \frac{r.r-1}{1.2} A_1 h^2$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{r-1}{1} A_2 h$$

Dieser Ausdruck giebt nach der Lehre von den unbestimmten Coefficienten

$$A = \frac{1}{(r+1)h};$$

$$-A_1 = (r+1)\,\frac{h}{2}\,A;$$

$$-A_2 = (r+1)_2\,\frac{h^2}{3}\,A + r\,\frac{h}{2}\,A_1;$$

$$-A_3 = (r+1)_3\,\frac{h^3}{4}\,A + r_2\,\frac{h^2}{3}\,A_1 + (r-1)\,\frac{h}{2}\,A_2;$$

$$-A_4 = (r+1)_3\,\frac{h^4}{5}\,A + r_3\,\frac{h^3}{4}\,A_1 + (r-1)_2\,\frac{h^2}{3}\,A_2 + (r-2)\,\frac{h}{2}\,A_3;$$

u. s. w.

Hieraus die einzelnen Coefficienten entwickelt, giebt:

$$A = \frac{1}{(r+1)\,h};\quad A_1 = -\,\frac{1}{2};$$

$$A_2 = +\,\frac{1}{6}\,r\,\frac{h}{2};\qquad A_3 = 0;$$

$$A_4 = -\,\frac{1}{30}\,r_3\,\frac{h^3}{4};\qquad A_5 = 0;$$

$$A_6 = +\,\frac{1}{42}\,r_5\,\frac{h^5}{6};\qquad A_7 = 0;$$

$$A_8 = -\,\frac{1}{30}\,r_7\,\frac{h^7}{8};\qquad A_9 = 0;$$

$$A_{10} = +\,\frac{5}{66}\,r_9\,\frac{h^9}{10};\qquad A_{11} = 0;$$

u. s. w. u. s. w.

Hiernach wird:

$$\Sigma x^r = \frac{x^{r+1}}{(r+1)h} - \frac{1}{2}x^r + \frac{1}{6}r\frac{h}{2}x^{r-1} - \frac{1}{30}r_3\frac{h^3}{4}x^{r-3} + \frac{1}{42}r_5\frac{h^5}{6}x^{r-5} - \frac{1}{30}r_7\frac{h^7}{8}x^{r-7} + \ldots$$

oder wenn man $\Delta x = h = 1$ und n statt x setzt, so erhält man wegen $\int n^r = \Sigma n^r + n^r + \text{const}$

$$\int n^r = \frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{n^r}{2} + \frac{1}{6}r\frac{n^{r-1}}{2} - \frac{1}{30}r^3\frac{n^{r-3}}{4} + \frac{1}{42}r^5\frac{n^{r-5}}{6} - \frac{1}{30}r^7\frac{n^{r-7}}{8} + \frac{5}{66}r^9\frac{n^{r-9}}{10} - \ldots + \text{const.}$$

Die

Die vorstehenden Zahlen $\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66} \ldots$ heifsen von ihrem Erfinder, Jacob Bernoulli, die bernoullischen Zahlen, und sollen hier durch $B_1; B_2; B_3; \ldots$ vorgestellt werden, so dafs $B_1 = \frac{1}{6}$ die erste, $B_2 = \frac{1}{30}$ die zweite, $B_3 = \frac{1}{42}$ die dritte, und überhaupt B_n die n^{te} bernoullische Zahl bezeichnet. Hiernach wird:

$$\int n^r = \frac{n^{r+1}}{r+1} + \frac{n^r}{2} + \frac{1}{2} B_1 r_1 n^{r-1} - \frac{1}{4} B_2 r_3 n^{r-3} + \frac{1}{6} B_3 r_5 n^{r-5} - \frac{1}{8} B_4 r_7 n^{r-7} + \ldots + \text{const.}$$

5.

Bedeutet r eine positive ganze Zahl, so wird für $n = 1$, $\int n^r = \int 1^r = 1$ daher nach dem zuletzt gefundenen Ausdruck:

$$1 = \frac{1}{r+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} r_1 B_1 - \frac{1}{4} r_3 B_2 + \frac{1}{6} r_5 B_3 - \frac{1}{8} r_7 B_4 + \frac{1}{10} r_9 B_5 - \frac{1}{12} r_{11} B_6 + \ldots,$$

oder mit $r+1$ multiplizirt

$$\frac{r-1}{2} = (r+1)_2 B_1 - (r+1)_4 B_2 + (r+1)_6 B_3 - (r+1)_8 B_4 + \ldots \mp (r+1)_{2n} B_n \pm \ldots$$

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades n gilt. Man setze $r = 2n$, so wird

$$\frac{2n-1}{2} = (2n+1)_2 B_1 - (2n+1)_4 B_2 + (2n+1)_6 B_3 - \ldots \mp (2n+1)_{2n} B_n \pm (2n+1)_{2n+2} B_{n+1} \mp \ldots,$$

Nun ist nach den Eigenschaften der Binomial-Coeffizienten: $(2n+1)_{2n-1} = (2n+1)_2$; $(2n+1)_{2n} = (2n+1)_1$; $(2n+1)_{2n+2} = 0$ und jeder folgende Coefficient $= 0$, daher mufs die vorstehende Reihe abbrechen und es wird:

$$\frac{2n-1}{2} = (2n+1)_{2n-1} B_1 - (2n+1)_{2n-3} B_2 + (2n+1)_{2n-5} B_3 - \ldots \pm (2n+1)_3 B_{n-1} \mp (2n+1) B_n$$

oder

$$0 = (2n+1) B_n - (2n+1)_3 B_{n-1} + (2n+1)_5 B_{n-2} - \ldots \pm (2n+1)_{2n-3} B_2 \mp (2n+1)_{2n-1} B_1 \pm \frac{2n-1}{2}$$

Durchgängig mit $(2n+1)[2n]$ dividirt, giebt

$$0 = \frac{B_n}{[2n]} - \frac{B_{n-1}}{[3][2n-2]} + \frac{B_{n-2}}{[5][2n-4]} - \ldots \pm \frac{B_2}{[2n-3][4]} \mp \frac{B_1}{[2n-1][2]} \pm \frac{2n-1}{2[2n+1]} \text{ oder}$$

$$0 = \frac{B_n}{[2n]} - \frac{B^{n-1}}{[3][2n-2]} + \frac{B^{n-2}}{[5][2n-4]} - \ldots \pm \frac{B_2}{[2n-3][4]} \mp \frac{B_1}{[2n-1][2]} \pm \frac{-1}{[2n+1]} \pm \frac{1}{2[2n]}$$

Hiernach wird

$$0 = -1 + 1;$$

$$0 = \frac{B_1}{[2]} - \frac{-1}{[3]} - \frac{1}{2[2]};$$

$$0 = \frac{B_2}{[4]} - \frac{1}{[3]}\frac{B_1}{[2]} + \frac{-1}{[5]} + \frac{1}{2[4]};$$

$$0 = \frac{B_3}{[6]} - \frac{1}{[3]}\frac{B_2}{[4]} + \frac{1}{[5]}\frac{B_1}{[2]} - \frac{-1}{[7]} - \frac{1}{2[6]};$$

u. s. w.; daher erhält man aus diesen Coefficientengleichungen nach der Lehre von den Wiederkehrenden Reihen den erzeugenden Bruch:

$$\frac{2 - \frac{x}{[2]} + \frac{x^2}{[4]} - \frac{x^3}{[6]} + \frac{x^4}{[8]} - \ldots}{2\left(1 - \frac{x}{[3]} + \frac{x^2}{[5]} - \frac{x^3}{[7]} + \frac{x^4}{[9]} - \ldots\right)} = 1 - \frac{B_1}{[2]}x - \frac{B_2}{[4]}x^2 - \frac{B_3}{[6]}x^3 - \frac{B_4}{[8]}x^4 - \ldots$$

oder hierin $(2x)^2$ statt x gesetzt, dann auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens durch x dividirt, giebt

$$\frac{2 - \frac{(2x)^2}{[2]} + \frac{(2x)^4}{[4]} - \frac{(2x)^6}{[6]} + \ldots}{2x - \frac{(2x)^3}{[3]} + \frac{(2x)^5}{[5]} - \frac{(2x)^7}{[7]} + \ldots} = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{[2]}x - \frac{2^4 B_2}{[4]}x^3 - \frac{2^6 B_3}{[6]}x^5 - \ldots$$

6.

Bezeichnet A_n irgend eine Funktion von n, so wird

$$\int A_n x^n = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n \text{ und}$$

$${}^t\!\int A_n x^n = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n + A_{n+1} x^{n+1} + \ldots \text{ daher}$$

$$\int A_n x^n = {}^t\!\int A_n x^n + A_n x^n - x^n (A_n + A_{n+1} x + A_{n+2} x^2 + \ldots)$$

oder (Eulers Differ.-Rechn. 2. Theil. 1. Kap. §. 3.)

$$\int A_n x^n = {}^t\!\int A_n x^n + A_n x^n + x^n \left(\frac{A_n}{x-1} - \frac{x \Delta A_n}{(x-1)^2} + \frac{x^2 \Delta^2 A_n}{(x-1)^3} - \ldots\right)$$

Nach dem Taylorschen Lehrsatze ist, wenn $f^n x$ die n^te abgeleitete Funktion von fx bezeichnet:

$$\Delta^n fx = \frac{{}^nD}{[n]} h^n f^n x + \frac{{}^nD_1}{[n+1]} h^{n+1} f^{n+1} x + \frac{D_2}{[n+2]} h^{n+2} f^{n+2} x + \ldots$$

daher wird für $A_n = fn$ und $h = 1$,

$$\Delta A_n = f^1 n + \frac{f^2 n}{[2]} + \frac{f^3 n}{[3]} + \frac{f^4 n}{[4]} + \dots$$

$$\Delta^2 A_n = {}^2D \frac{f^2 n}{[2]} + {}^2D_1 \frac{f^3 n}{[3]} + {}^2D_2 \frac{f^4 n}{[4]} + \cdot$$

$$\Delta^3 A_n = {}^3D \frac{f^3 n}{[3]} + {}^3D_1 \frac{f^4 n}{[4]} + {}^3D_2 \frac{f^5 n}{[5]} + \dots$$

u. s. w.; daher

$$\int A_n x^n = {}'\!\!\int A_n x^n + A_n x^n + \frac{x^n}{x-1} \Big\{ A_n - \frac{x}{x-1} f^1 n - \left.\begin{matrix} \frac{x}{x-1} \\ + \frac{x^2}{(x-1)^2}\,{}^2D \end{matrix}\right| \frac{f^2 n}{[2]} - \left.\begin{matrix} \frac{x}{x-1} \\ + \frac{x^2}{(x-1)^2}\,{}^2D_1 \\ - \frac{x^3}{(x-1)^3}\,{}^3D \end{matrix}\right| \frac{f^3 n}{[3]} - \dots$$

Man setze:

$$E_1 = \frac{+1}{x-1};$$

$$[2]\, E_2 = \frac{-1}{x-1} + \frac{{}^2D x}{(x-1)^2};$$

$$[3]\, E_3 = \frac{+1}{x-1} - \frac{{}^2D_1 x}{(x-1)^2} + \frac{{}^3D x^2}{(x-1)^3};$$

$$[4]\, E_4 = \frac{-1}{x-1} + \frac{{}^2D_2 x}{(x-1)^2} - \frac{{}^3D_1 x^2}{(x-1)^3} + \frac{{}^4D x^3}{(x-1)^4};$$

u. s. w.; überhaupt

$$[n]\, E_n = \frac{{}^nD x^{n-1}}{(x-1)^n} - \frac{{}^{n-1}D_1 x^{n-2}}{(x-1)^{n-1}} + \frac{{}^{n-2}D_2 x^{n-3}}{(x-1)^{n-2}} - \dots \pm \frac{{}^2D^{n-2} x}{(x-1)^2} \mp \frac{1}{x-1}$$

wo die oberen Zeichen für ein grades, die unteren für ein ungrades n gelten.

Für $x = -1$ verwandele sich E in E^I, also wird

$$(I) \quad [n]\, E^I_n = -\frac{{}^nD}{2^n} + \frac{{}^{n-1}D_1}{2^{n-1}} - \frac{{}^{n-2}D_2}{2^{n-2}} + \frac{{}^{n-3}D_3}{2^{n-3}} - \dots \mp \frac{{}^2D^{n-2}}{2^2} \pm \frac{1}{2}$$

Nun ist $\int A_n x^n = {}'\!\!\int A_n x^n + \frac{x^{n+1}}{x-1} (A_n - E_1 f^1 n + E_2 f^2 n - E_3 f^3 n + \dots)$

und ${}'\!\!\int A_n x^n = \frac{A}{1-x} + \frac{x \Delta A}{(1-x)^2} + \frac{x^2 \Delta^2 A}{(1-x)^3} + \dots$ daher

$$\int A_n x^n = \frac{A}{1-x} + \frac{x \Delta A}{(1-x)^2} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{x-1} (A_n - E_1 f^1 n + \ldots).$$

Für $n = 0$ wird $\int A_n x^n = A$, daher $A = \frac{A}{1-x} + \frac{x \Delta A}{(1-x)^2} + \ldots + \frac{x}{x-1} (A - E_1 f^1 + E_2 f^2 - \ldots)$

oder $A = {}^t\!\int A_n x^n + \frac{x}{x-1} (A - E_1 f^1 + E_2 f^2 - E_3 f^3 + \ldots)$ folglich hieraus

(II) $^t\!\int A_n x^n = A - \frac{x}{x-1} (A - E_1 f^1 + E_2 f^2 - E_3 f^3 + \ldots)$

Diesen Werth $= G$ gesetzt, giebt:

(III) $\int A_n x^n = \frac{x^{n+1}}{x-1} (A_n - E_1 f^1 n + E_2 f^2 n - E_3 f^3 n + \ldots) + C.$

Zur Erlangung eines zweiten Ausdrucks für $\int A_n x^n$ wird:
$\int A_n x^n = A + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n$ und
$\int A_{n-1} x^n = A_{-1} + A x + A_1 x^2 + A_2 x^3 + \ldots + A_{n-1} x^n$; daher
$x \int A_n x^n - A_n x^{n+1} = \int A^{n-1} x^n - A_{-1}$.

Nach dem Taylorschen Lehrsatz ist ferner:

$$A_{n-1} = A_n - \frac{d A_n}{dn} + \frac{d^2 A_n}{[2] dn^2} - \frac{d^3 A_n}{[3] dn^3} + \ldots$$

oder mit x^n multiplizirt, und von jedem Gliede die Summe genommen:

$$\int A_{n-1} x^n = \int A_n x^n - \int \frac{d A_n}{dn} x^n + \int \frac{d^2 A_n}{[2] dn^2} x^n - \int \frac{d^3 A_n}{[3] dn^3} x^2 + \ldots$$ oder auch

$$x \int A_n x^n - A_n x^{n+1} + A_{-1} = \int A_n x^n - \int \frac{d A_n}{dn} x^n + \frac{1}{[2]} \int \frac{d^2 A_n}{dn^2} x^n - \ldots$$

folglich hieraus

(IV) $\int A_n x^n = \frac{1}{x-1} \left(A_n x^{n+1} - \int \frac{d A_n}{dn} x^n + \frac{1}{[2]} \int \frac{d^2 A_n}{dn^2} x^n - \frac{1}{[3]} \int \frac{d^3 A_n}{dn^3} x^n + \ldots \right) - \frac{A_{-1}}{x-1}.$

Hierin nach einander $\frac{d A_n}{dn}, \frac{d^2 A_n}{dn^2}, \frac{d^3 A_n}{dn^3}, \ldots$ mit A_n vertauscht, giebt

$$\int \frac{d A_n}{dn} = \frac{1}{x-1} \left(\frac{d A_n}{dn} x^{n+1} - \int \frac{d^2 A_n}{dn^2} x^n + \frac{1}{[2]} \int \frac{d^3 A_n}{dn^3} - \ldots \right) - \frac{A_{-1}}{x-1};$$

$$\int \frac{d^2 A_n}{dn^2} = \frac{1}{x-1} \left(\frac{d^2 A_n}{dn^2} x^{n+1} - \int \frac{d^3 A_n}{dn^3} x^n + \frac{1}{[2]} \int \frac{d^3 A_n}{dn^3} - \ldots \right) - \frac{A_{-1}}{x-1}$$

u. s. w.

Diese Werthe in (III) gesetzt, giebt wegen $\frac{dA_n}{dn} = f^{\prime} n$; $\frac{d^2 A_n}{dn^2} = f^2 n; \ldots$

$$\int A_n x^n = \int A_n x^n + \left.\begin{array}{r} \frac{1}{x-1} \\ - E_1 \end{array}\right| \int \frac{dA_n}{dn} x^n - \left.\begin{array}{r} \frac{1}{[2](x-1)} \\ - \frac{E_1}{x-1} \\ + E_2 \end{array}\right| \int \frac{d^2 A_n}{dn^2} x^n + \left.\begin{array}{r} \frac{1}{[3](x-1)} \\ + \frac{E_1}{[2](x-1)} \\ + \frac{E_2}{x-1} \\ - E. \end{array}\right|$$

$$\int \frac{d^3 A_n}{dn^2} x^n - \left.\begin{array}{r} \frac{1}{[4](x-1)} \\ - \frac{E_1}{[3](x-1)} \\ - \frac{E_2}{[2](x-1)} \\ - \frac{E_3}{x-1} \\ + E_4 \end{array}\right| \int \frac{d^4 A_n}{dn^4} x^n + \ldots$$

Hieraus folgt nach der Lehre von den unbestimmten Coefficienten:

$$E_1 = \frac{1}{x-1};$$

$$E_2 = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{[2]} + E_1\right);$$

$$E_3 = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{[3]} + \frac{E_1}{[2]} + E_2\right);$$

$$E_4 = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{[4]} + \frac{E_1}{[3]} + \frac{E_2}{[2]} + E_3\right);$$

$$E_5 = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{[5]} + \frac{E_1}{[4]} + \frac{E_2}{[3]} + \frac{E_3}{[2]} + E_4\right);$$

u. s. w.

Diese Coefficientengleichungen mit den Gliedern des erzeugenden Bruchs einer wiederkehrenden Reihe verglichen, geben:

$$\frac{1}{1-\frac{u}{x-1}-\frac{u^2}{[2](x-1)}-\frac{u^3}{[3](x-1)}-\ldots}=1+E_1u+E_2u^2+E_3u^3+\ldots$$

oder wenn man den erzeugenden Bruch $= U$ setzt, so wird

$$U=\frac{x-1}{x-1-u-\frac{u^2}{1.2}-\frac{u^3}{1.2.3}-\frac{u^4}{1.2.3.4}-\ldots}$$

daher wenn e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet, so wird wegen $e^u=1+u+\frac{u^2}{1.2}+\ldots.$

$$U=\frac{x-1}{x-e^u}=1+E_1u+E_2u^2+E_3u^3+\ldots$$

Hieraus findet man ferner

$$e^u=\frac{xU-x+1}{U}\text{ also } u=\log(xU-x+1)-\log U,$$

und wenn in diesem letzten Ausdruck nur u und U als veränderlich angenommen werden

$$1=\frac{x-1}{xU^2-(x-1)U}\,\frac{dU}{du},\text{ oder}$$

$$\text{(V)}\quad xU^2=(x-1)U+(x-1)\frac{dU}{du}.$$

Nun ist $U=1+E_1u+E_2u^2+E_3u^3+\ldots$, also auch

$$xU^2=x+2E_1xu+\left.\begin{array}{l}2E_2\\E_1E_1\end{array}\right|xu^2+\left.\begin{array}{l}2E_3\\2E_1E_2\end{array}\right|xu^3+\left.\begin{array}{l}2E_4\\2E_1E_3\\E_2E_2\end{array}\right|xu^4+\ldots$$

$$(x-1)U=(x-1)+E_1(x-1)u+E_2(x-1)u^2+E_3(x-1)u^3+\ldots$$

$$(x-1)\frac{dU}{du}=E_1(x-1)+2E_2(x-1)u+3E_3(x-1)u^2+4E_4(x-1)u^3+\ldots$$

Diese Werthe in den Ausdruck (V) gesetzt und nach den Potenzen von u geordnet, so erhält man nach der Lehre von den unbestimmten Coefficienten

$1\ (x-1)E_1=1;$

$2\ (x-1)E_2=E_1(x+1);$

$3\ (x-1)E_3=E_2(x+1)+E_1E_1x;$

$4(x-1)E_4 = E_3(x+1) + 2E_1E_2x;$
$5(x-1)E_5 = E_4(x+1) + 2E_1E_3x + E_2E_2x;$
$6(x-1)E_6 = E_5(x+1) + 2E_1E_4x + 2E_2E_3x;$
$7(x-1)E_7 = E_6(x+1) + 2E_1E_5x + 2E_2E_4x + E_3E_3x;$
$8(x-1)E_8 = E_7(x+1) + 2E_1E_6x + 2E_2E_5x + 2E_2E_4x;$

u. s. w. Für $x = -1$ wird $E = E^1$, also

$2.1\ E^1_1 = -1;$
$2.3\ E^1_3 = E^1_1E^1_1;$
$2.5\ E^1_5 = 2E^1_1E^1_3;$
$2.7\ E^1_7 = 2E^1_1E^1_5 + E^1_3E^1_3;$
$2.9\ E^1_9 = 2E^1_1E^1_7 + 2E^1_3E^1_5;$
$2.11\ E^1_{11} = 2E^1_1E^1_9 + 2E^1_3E^1_7 + E^1_5E^1_5;$

u. s. w., wo alle grade Coefficienten verschwinden, also überhaupt $E^1_{2n} = 0$ wird.

Bezeichnet nun r jede positive ganze Zahl, und man setzt:

$$E^1_{2r-1} = \frac{\pm Gr}{2^{2r-1}}$$

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades r gilt, so wird $E^1_1 = \frac{-G_1}{2}$; $E^1_3 = \frac{+G_2}{2^3}$; $E^1_5 = \frac{-G_3}{2^5}$; ... daher verwandeln sich die vorstehenden Coefficientengleichungen in

$G_1 = 1;$
$3\ G_2 = G_1G_1$
$5\ G_3 = 2G_1G_2;$
$7\ G_4 = 2G_1G_3 + G_2G_2;$
$9\ G_5 = 2G_1G_4 + 2G_2G_3;$
$11\ G_6 = 2G_1G_5 + 2G_2G_4 + G_3G_3;$

u. s. w.

7.

Es ist $\sin x = x - \frac{x^3}{[3]} + \frac{x^5}{[5]} - \frac{x^7}{[7]} + \ldots$ und $\cos x = 1 - \frac{x^2}{[2]} + \frac{x^4}{[4]} - \frac{x^6}{[6]} + \ldots$

Ferner $\cot x = \frac{1 + \cos 2x}{\sin 2x}$ daher $\cot x = \dfrac{2 - \frac{(2x)^2}{[2]} + \frac{(2x)^4}{[4]} - \ldots}{2x - \frac{(2x)^3}{[3]} + \frac{(2x)^5}{[5]} - \ldots}$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem §. 5. zuletzt gefundenen, so erhält man:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{[2]} x - \frac{2^4 B_2}{[4]} x^3 - \frac{2^6 B_3}{[6]} x^5 - \ldots - \frac{2^{2n} B_n}{[2n]} x^{2n-1} - \ldots$$

Es ist aber $\text{tgt}\, x = \cot x - 2 \cot 2x$, daher:

$$\text{tgt}\, x = \frac{2^2(2^2-1)}{[2]} B_1 x + \frac{2^4(2^4-1)}{[4]} B_2 x^3 + \frac{2^6(2^6-1)}{[6]} B_3 x^5 + \ldots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{[2n]} B_n x^{2n-1} + \ldots$$

Man setze $\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{[2n]} B_n = A_n$, so wird

$\text{tgt}\, x = A_1 x + A_2 x^3 + A_3 x^5 + A_4 x^7 + \ldots$. Ferner sey

$\text{tgt}\, x^2 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^6 + \alpha_4 x^8 + \ldots$, so findet man

$\alpha_1 = A_1 A_1$;

$\alpha_2 = 2 A_1 A_2$;

$\alpha_3 = 2 A_1 A_3 + A_2 A_2$;

$\alpha_4 = 2 A_1 A_4 + 2 A_2 A_3$;

u. s. w. Nun ist $\frac{d\,\text{tgt}\, x}{dx} = 1 + \text{tgt}\, x^2$, also

$$\frac{d\,\text{tgt}\, x}{dx} = 1 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \alpha_3 x^6 + \alpha_4 x^8 + \ldots,$$ aber auch

$$\frac{d\,\text{tgt}\, x}{dx} = A_1 + 3 A_2 x^2 + 5 A_3 x^4 + 7 A_4 x^6 + 9 A_5 x^8 + \ldots,$$ daher erhält man

aus der Vergleichung der Coefficienten $A_1 = 1$; $\alpha_1 = 3A_2$; $\alpha_2 = 5A_3$; $\alpha_3 = 7A_4$; ...

folglich $A_1 = 1$;

$3 A_2 = A_1 A_1$;

$5 A_3 = 2 A_1 A_2$;

$7 A_4 = 2 A_1 A_3 + A_2 A_2$;

$9 A_5 = 2 A_1 A_4 + 2 A_2 A_3$;

$11 A_6 = 2 A_1 A_5 + 2 A_2 A_4 + A_3 A_3$

u. s. w.

Diese Coefficientengleichungen für die Reihe, welche der Tangente eines Bogens entspricht, sind ganz übereinstimmend mit den §. 6. gefundenen Gleichungen für die Coefficienten G_1; G_2; G_3; ... daher muſs auch $A_n = G_n$ seyn. Nun war $G_n = \pm 2^{2n-1} E^1_{2n-1}$ und $A_n = \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{[2n]} B_n$, folglich wird die n^{te} bernoullische Zahl oder

$B_n =$

$$B_n = \pm \frac{[2n]\, E'_{2n-1}}{2(2^{2n}-1)}$$

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades n gilt.

Nun erhält man nach (I) §. 6.

$$E'_{2n-1} = \frac{-1}{[2n-1]}\left(\frac{{}^{2n-1}D}{2^{2n-1}} - \frac{{}^{2n-2}D_1}{2^{2n-2}} + \frac{{}^{2n-3}D_2}{2^{2n-3}} - \ldots - \frac{{}^{2}D_{2n-3}}{2^2} + \frac{1}{2}\right)$$

daher, wenn dieser Werth in die vorstehende Gleichung eingeführt wird, so erhält man die n^{te} bernoullische Zahl als eine Funktion der Differenz-Coefficienten ausgedrückt:

$$B_n = \mp \frac{n}{2^{2n}-1}\left(\frac{{}^{2n-1}D}{2^{2n-1}} - \frac{{}^{2n-2}D_1}{2^{2n-2}} + \frac{{}^{2n-3}D_2}{2^{2n-3}} - \ldots - \frac{{}^{2}D_{2n-3}}{2^2} + \frac{1}{2}\right) \text{ oder}$$

$$B_n = \mp \frac{n \cdot 2^{2n-1}}{2^{2n}-1}\left({}^{2n-1}D - 2\,.\,{}^{2n-2}D_1 + 2^2\,.\,{}^{2n-3}D_2 - \ldots - 2^{2n-3}\,.\,{}^{2}D_{2n-3} + 2^{2n-2}\right),$$

wo das obere Zeichen für ein grades, das untere für ein ungrades n gilt.

Durch ein ähnliches Verfahren läfst sich der Zusammenhang der Coefficienten der Reihen für die Sekanten und Cosekanten mit den bernoullischen Zahlen, und dieser mit den Differenz-Coefficienten nachweisen, so dafs hierdurch die Abstammung der Coefficienten mehrerer sehr wichtiger Reihen von den Differenz-Coefficienten nachgewiesen ist.

Ueber das Muttergewicht der kölnischen Mark, welche für den gröfsten Theil von Deutschland als Münzeinheit dient.

Von Herrn Eytelwein *).

Die Verschiedenheit in den Angaben über die Gröfse der kölnischen Münzmark mufs um so mehr befremden, da die Werthe von dem gröfsten Theil der Münzen Deutschlands auf dieses Markgewicht bezogen werden, auch bei wissenschaftlichen Untersuchungen die kölnischen Gewichte häufig Anwendung finden. Es war daher mein Wnnsch, bei meiner vorjährigen Anwesenheit in Köln die Gröfse der dortigen Münzmark auszumitteln, besonders aber das Muttergewicht aufzufinden, und das Gewicht desselben nach einem richtigen Grammengewichte hinlänglich genau anzugeben.

Es scheint, dafs man in Deutschland, besonders in Köln, wo anfänglich die Hauptmünze der deutschen Könige war, schon weit früher nach der kölnischen Mark Münzen geprägt hat, ehe darüber eine gesetzliche Verfügung ergangen war. In der ältesten Reichsmünzordnung, welche in dem auf dem Reichstage zu Eger 1437 berathschlagten Landfrieden enthalten ist, und in den Nürnberger Reichstagsschlüssen vom Jahr 1438 geschieht zwar keine Erwähnung der kölnischen Mark; allein in der zweiten Reichsmünzordnung, welche auf dem Reichstage zu Worms 1495 zu Stande kam, kommt zuerst die kölnische Mark vor. Es heifst hier: „dafs nur Gulden, die gleich sind am Aufschnitt und Gehalt der vier Kurfürsten am Rhein

*) Vorgelesen den 23. Oktober 1817.

Gulden, nämlich neun zehend halb Grad fein und hundert und sieben auf anderthalb kölnisch Mark, gelten sollen."

In der Münzordnung Karl V. vom Jahr 1524, welche aber nicht zur Vollziehung kam, wird §. I. bestimmt, dafs die gemeine Reichsmünze im Namen, Stück und Gehalt auf eine feine Mark Silbers kölnisch Gewicht gesetzt und ausgetheilt werden soll. Die Einführung der kölnischen Gewichte als Norm beim Münzen in Deutschland, wurde unter Ferdinand I. im Jahr 1559 auf dem Reichstage zu Augsburg zur Bewirkung eines allgemeinen Reichs-Münzfusses festgesetzt, und die daselbst verkündete Münzordnung diente den spätern Münzeinrichtungen zur Richtschnur. Die Stelle, welche sich auf das kölnische Gewicht bezieht, lautet: „Und dieweil alle Rheinische Gulden. so bisher gemünzt, auf kölnisch Gewicht geschlagen worden, so ist unser ernstlicher Wille, Meinung und Befehl, dafs auch hinführo alle Gulden auf dasselbige Gewicht gemünzt werden."

Wenn hiernach schon in den ältesten Zeiten die kölnische Mark einen hohen Werth für Deutschland haben mufste, so wird man auch voraussetzen dürfen, dafs von dieser Mark ein Muttergewicht vorhanden war, dessen sorgfältige Aufbewahrung allein jeden Zweifel über das Gewicht der kölnischen Mark heben konnte.

Welche Zweifel über das Daseyn eines solchen Muttergewichts schon im Jahr 1760 herrschten, geht aus dem Schriftwechsel hervor, welcher sich im Archiv des kölnischen Rathhauses befindet. Es verlangte in diesem Jahre der dortige kayserliche Resident von Bossart von dem Magistrat eine von dem kölner Muttergewicht abgezogene Mark, welche die Reichsgesetze zur Ausmünzung vorschrieben, zum Gebrauche für den kayserlichen Dienst. Allein nach Absendung dieser Mark entstand der Vorwurf, dafs die Stadt Köln selbst nicht einmal ein ächtes, reines und genaues Original-Muttergewicht besitze. Der Magistrat erklärte hierauf, dafs, wenn man durch das Wort Muttergewicht ein uraltes, zur Zeit der ersten Münzeinrichtung verfertigtes Stück einer kölnischen Mark verstehe, so sey nichts natürlicher, als dafs ein solches Stück durch Alterthum und Gebrauch abgenutzt und verzehrt worden wäre; allein es sei von Zeit zu Zeit das zur Richtschnur bei dortiger Rentkammer aufbewahrte Gewicht und dessen Verhältnifs nach dem Troyschen Fufs ausgerechnet und berichtigt worden. Man habe zwei Originalien angeschafft, deren eines dem Stadt-Eichmeister zum täglichen Ge-

brauche anvertraut, das andere aber in der Rentkammer zur Hebung entstehender Zweifel aufbewahrt worden wäre.

Es war vergeblich, bei meiner Anwesenheit in Köln, und ungeachtet der rühmlichen Bemühung des Herrn Ober-Sekretar Fuchs, das Original der kölnischen Mark in der dortigen Rentkammer oder an einem Orte des Rathhauses, wo sich dasselbe wahrscheinlich befinden konnte, aufzufinden. Dagegen versicherte der anwesende vormalige Bürgermeister Herr von Klespe, er habe während etwa eilf Jahren der Rentkammer vorgestanden und Gelegenheit gehabt, die dort aufbewahrte kölnische Muttermark zu sehen, aber keins der jetzt vorhandenen, noch näher zu beschreibenden, Markgewichte stimme damit überein. Diese Original-Mark, in der Gestalt einer am Ende wenig ausgeschweiften Glocke, soll aus Messing verfertigt, mit der noch aufbewahrten englischen Mark Aehnlichkeit gehabt haben. Herr von Klespe hat diese Mark noch zuletzt in der Rentkammer gesehen, als die französische Central-Verwaltung von Aachen einige Gewichte zur Vergleichung mit den französischen nach Aachen kommen liefs. Ungeachtet er damals wegen des dortigen unregelmäfsigen Verwaltungszustandes die Aufbewahrung sehr empfohlen, habe er doch seit dieser Zeit nichts mehr davon gesehen. Anderweitige Nachforschungen lieferten ähnliche Erfolge, auch waren die nach Aachen gelieferten Gewichte richtig zurückgekommen, ohne dafs sich unter denselben die verlohrne Original-Mark gefunden hatte.

Weil sich aller Bemühungen ungeachtet das Original der kölnischen Mark nicht mehr auffinden liefs, so konnten nur die in der Rentkammer noch vorhandene kölnischen Gewichte dem Abwiegen, nach einem sorgfältig geprüften Grammengewichte, durch tariren unterworfen werden.

Die zur Abwiegung ausgewählten Gewichte, welche gut erhalten und aus gegossenem Messing verfertigt waren, sind in den folgenden fünf Abtheilungen näher beschrieben.

I. Ein beinahe cylindrisch abgedrehtes Pfundstück, mit den drei alten kölnischen Kronen in erhabener Arbeit verziert, und mit einem angegossenen kreisförmigen Griff versehen. An dem Ring, welcher den Griff bildet, war ein Streifen Papier mit folgender etwa 200 Jahre alten Inschrift befestigt: „Dies ist kölnisch Pfundgewicht haltende 32 Loth deren 2 Loth 19 Englisch halten soll."

Dieses Pfund wog 468,125 Grammen.

II. Ein hölzernes mit altem Schnitzwerk und dem Stadtwappen versehenes Gewichtkästchen, in welchem sich 12 viereckigte messingene Gewichte nebst zwei Wagen befanden. Das Kästchen war mit rothem Sammet ausgefuttert, und auf der innern Seite des Deckels stand: „Diese Wag und Gewicht ist gemacht durch Meister Casparen Grievenberg. Wagenmacher. Anno 1705 den 21. Januar."

Jedes dieser Gewichte hat die Jahrzahl 1705 und das Wappen des Meisters. Die 12 Gewichte bestehen aus 1 Mark; 8, 4, 2, 1 Loth; 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1 Englisch.

Die Mark wog 233,75 Grammen.

Die halbe Mark 116,90 Grammen.

III. Ein Pfundgewicht, eben so wie Nro. I. An demselben war ein Streifen Papier mit alter Cursivschrift, und zur Vorsorge ein Stück Pergament mit späterer Frakturschrift, mit dem Zettel Nro. I. gleichlautend, befestigt.

Dieses Pfund wog 467,548 Grammen.

IV. Ein grofses messingenes Einsatzgewicht, 16 Pfund schwer, sehr zierlich gearbeitet, mit einer beweglichen Handhabe, welche mit Wasserjungfern und Seepferden versehen ist. Dies Einsatzgewicht, welches ein hohes Alter verräth, enthält auf dem Deckel das kölnische Stadtwappen, dann zweimal einen einfachen Adler und ein fliegendes Pferd eingeprägt. Der Einsatz oder die Büchse hat die Zahl 8; das folgende Gewicht die Zahl 8, die nächstfolgenden 4, 2, 1, u. s. w. bis zu $\frac{1}{32}$ Loth.

Beim Abwiegen fand man

das Gewicht von 8 Loth = 117,175 Grammen,
von 16 Loth = 233,75 - -
von 1 Pfund = 467,7375 - -
von 2 Pfund = 935,6 - -

V. In der Rentkammer fand sich ferner eine Sammlung äufserst sorgfältig gearbeitete, mit feinen Gliedern abgedrehte messingene Gewichte, mit länglich runden Handgriffen und der Jahrzahl 1756 versehen. An der ausgebauchten Seite derselben war das kölnische Stadtwappen eingegraben. Die einzelnen Stücke enthielten 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 25 und 50 Pfund, wozu noch ein sorgfältig gearbeitetes Einsatzgewicht von 8 Pfund gehörte, welches ebenfalls mit der Jahrzahl 1756 und dem kölnischen Stadtwappen bezeichnet war. Die gröfsern Gewichte hatten durch Oxydation gelitten,

weshalb nur das rein erhaltene Einsatzgewicht zum Abwiegen gewählt wurde. Auf die Hulse des Einsatzgewichts, welche 4 Pfund wog, folgten Gewichte von 2 Pfund, 1 Pfund, 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ Loth und zwei Stücke von $\frac{1}{8}$ Loth.

Die Stücke von $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=$ 2 Loth wogen 29,215 Grammen,
von $8+4+2=14$ Loth wogen 204,65 - -
das Stück von 16 Loth wog 233,812 - -
von 1 Pfund wog 467,64 - -
von 2 Pfund wog 935,87 - -
die Hülse von 4 Pfund wog 1871,395 - -

Zur bessern Uebersicht, wie weit die hier beschriebenen Gewichte von einander abweichen, und wie schwierig es ist, aus den auf dem Rathhause zu Köln noch vorhandenen Gewichten den wahren Werth der nicht mehr vorhandenen kölnischen Muttermark zu bestimmen, dient folgende Zusammenstellung:

Nro.	Gewichte.		Das Stück wog Grammen	Die Mark wiegt Grammen
I.	Rund abgedrehtes Pfundstück . .		468,125	234,0625
III.	- - - - - . .		467,548	233,7740
II.	Gewichtkästchen, eine Mark . . .		233,75	233,7500
	eine halbe Mark .		116,90	233,8000
IV.	16pfündiges Einsatzgewicht, .	8 Loth	117,175	234,5500
		16 Loth	233,75	233,7500
		1 Pfund	467,7375	233,8687
		2 Pfund	935,6	233,9000
V.	8pfündiges Einsatzgewicht v. 1756	2 Loth	29,215	233,7200
		14 Loth	204,65	233,8857
		16 Loth	233,812	233,8120
		1 Pfund	467,64	233,8200
		2 Pfund	935,87	233,9675
		4 Pfund	1871,395	233,9244

Ein Mittel aus allen diesen 14 Abwiegungen giebt 233,8346 Grammen, und wenn man die beiden am meisten von diesem Mittelwerth abweichenden

Abwiegungen wegläſst, so findet man das Gewicht der kölnischen Münzmark = 233,8596 Grammen.

Der Verlust der kölnischen Muttermark macht es nöthig, dieses Resultat mit andern bekannten Angaben ihres Gewichts, welche den meisten Glauben verdienen, zu vergleichen. Zu den mir bekannten ältesten Angaben gehört die von Eisenschmid (*de ponderibus et mensuris etc. Argent.* 1737. *p.* 7.), nach welcher die kölnische Mark 4402 Gräne des pariser Markgewichts wiegt. Wenn nun 18827,15 dieser Gräne mit einem Kilogramm überein kommen, so hält die kölnische Mark nach Eisenschmid 233,8113 Grammen.

Nach Tillet's Abwiegungen (*Mémoires de l'acad. de Paris, Année* 1767. *p.* 350.) hat eine Kopie der kölnischen Mark 4403 pariser Grän, also 233,8644 Grammen gehalten. Eine vorzügliche Berücksichtigung verdient die Angabe von Vega (Vorlesungen über die Mathematik, 1. Bd. 2. Aufl. Wien 1795. S. 207.), nach welcher ein im Wiener Münzamte gut aufbewahrter messingener Einsatz von einer kölnischen Mark, vom Jahr 1716 mit dem Stempel von Köln versehen 54610 Wiener Richtpfennige gewogen hat. Nun vergleichen sich (Vega Maaſs-, Gewicht- und Münz-System. Wien 1803. 4. Tafel.) 65536 Wiener Richtpfennige mit 280,6440 Grammen, daher hält hiernach die kölnische Mark 233,8557 Grammen. Weniger Vertrauen verdient die Ausmittelung, welche die Kommission zur Bestimmung der Gröſse der Maaſse und Gewichte des Ruhrdepartements im Jahr 1799 in der Stadt Aachen bewirkte, weil sich die von Aachen zurückgekommenen Gewichte noch auf dem kölnischen Rathhause vorfinden, also die Abwiegung nicht nach der verlohrnen Muttermark geschehen ist. Nach den Angaben dieser Kommission hält die kölnische Mark 233,69 provisorische Grammen, welche mit 233,8619 definitiven Grammen übereinkommen.

Hiernach soll die kölnische Mark halten, nach

Eisenschmid	233,8113 Grammen,
Tillet	233,8644 - -
Vega	233,8557 - -
nach der Kommission	233,8619 - -

Vergleicht man diese Angaben mit der vorstehenden Ausmittelung von 233,8596 Grammen, so ergiebt sich daraus eine so gute Uebereinstimmung, besonders mit der Vegaschen Ausmittelung, als unter diesen Umständen nur erwartet werden konnte.

Es bleibt nun noch übrig die Gröfse der preufsischen Münzmark, welche nach den früheren gesetzlichen Bestimmungen mit der kölnischen übereinstimmen sollte, auszumitteln. Nach der neuesten Festsetzung in der Maafs- und Gewichtordnung für die preufsischen Staaten vom 16. Mai 1816. §. 18. soll das Gewicht eines preufsischen Kubikfufses destillirten Wassers, im luftleeren Raume, bei einer Temperatur von 15 Grad des Reaumürschen Quecksilber-Thermometers, mit 66 preufsischen Pfunden übereinstimmen, und die Hälfte eines solchen Pfundes einer preufsischen Münzmark gleich seyn. Hiernach findet man für das Gewicht der preufsischen Mark 233,8556 Grammen, also eine so gute Uebereinstimmung mit den Angaben für die Gröfse der kölnischen Mark, dafs hiernach die preufsische Mark mit der kölnischen als einerlei anzunehmen ist.

Analytische Auflösung der Keplerschen Aufgabe.

Von Herrn F. W. Bessel *).

Die verschiedenen bekannt gewordenen Auflösungen der Aufgabe „die „wahre Anomalie und den Radiusvector in einer elliptischen Bahn, in Rei- „hen zu entwickeln, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen „der mittleren Anomalie fortgehen", beruhen, wenn nicht etwa auf einer ganz kunstlosen successiven Bestimmung der Coefficienten, auf dem Lagrangeschen Lehrsatze. Lagrange selbst deutete diese Rechnung nur an *(Mécan. analyt. S.* 271.); allein Laplace, Oriani, Schubert u. a. haben sie ausgeführt, und der letzte hat noch ganz neulich eine vortreffliche Abhandlung über diesen Gegenstand geliefert, in welcher er die Zahlenentwickelung bis zur 15ten Potenz der Excentricität getrieben hat.

Ein so allgemeines Mittel, alle Arten von Functionen in Reihen zu entwickeln, der Lagrangesche Lehrsatz auch ist, so scheint die wahre Methode, die vorliegende Aufgabe aufzulösen, doch nicht auf ihm zu beruhen. Ich habe eine andere angewandt, die gewissermaſsen das Umgekehrte von jener ist; während jene durch aufeinanderfolgende Differentiirungen das Ziel erreicht, erreicht es diese durch eine Integration, deren Gesetz sich mit der gröſsten Leichtigkeit übersehen läſst.

Wenn eine Function von u in die Reihe

$$U = A' \sin u + A'' \sin 2u + \ldots\ldots + A^{(i)} \sin iu + \ldots\ldots$$
$$+ B' \cos u + B'' \cos 2u + \ldots\ldots + B^{(i)} \cos iu + \ldots\ldots$$

*) Vorgelesen den 2. Juli 1818.

zu entwickeln ist, so ist allgemein

$$\left.\begin{aligned} A^{(i)} &= \frac{1}{\pi}\int U \sin iu \,.\, du \\ B^{(i)} &= \frac{1}{\pi}\int U \cos iu \,.\, du \end{aligned}\right\} \left[\begin{array}{l}\text{von } u = 0 \\ \text{bis } u = 2\pi\end{array}\right]$$

wovon der Grund am Tage liegt. Man erhält hierdurch die Reihenentwickelung in jedem Falle; entweder durch endliche Integrationen, oder durch unendliche Reihen, oder auch durch Anwendung des Verfahrens, welches ich in der Einleitung zur I. Abtheilung meiner Beobachtungen gegeben habe. Diese Art der Entwickelung wird häufig von Nutzen seyn, und namentlich lassen sich viele und wichtige astronomische Aufgaben dadurch behandeln, wovon ich hier ein, freilich nicht zu den wichtigsten gehöriges, Beispiel gebe.

Bezeichnet man die mittlere, wahre und excentrische Anomalie durch μ, v, ε, die Excentricität durch e, den Radiusvector und die halbe grofse Axe durch r und a, und setzt man

$$\begin{aligned} v - \mu = {} & A' \sin\mu + A'' \sin 2\mu + A''' \sin 3\mu + \ldots \\ & + B' \cos\mu + B'' \cos 2\mu + B''' \cos 3\mu + \ldots \end{aligned}$$

so hat man

$$A^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int (v-\mu) \sin i\mu \, d\mu = -\frac{v-\mu}{i\pi} \cos i\mu + \frac{1}{i\pi}\int \cos i\mu (dv - d\mu)$$

$$B^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int (v-\mu) \cos i\mu \, d\mu = \frac{v-\mu}{i\pi} \sin i\mu - \frac{1}{i\pi}\int \sin i\mu (dv - d\mu)$$

und wenn man die durch die Annahme des Integrals von 0 bis 2π verschwindenden Glieder wegläfst:

$$A^{(i)} = \frac{1}{i\pi}\int \cos i\mu \,.\, dv$$

$$B^{(i)} = \frac{-1}{i\pi}\int \sin i\mu \,.\, dv$$

Man hat aber bekanntlich

$$\mu = \varepsilon - e \sin\varepsilon$$

$$dv = \frac{\sqrt{1-ee}\, d\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon}$$

woraus folgt

$$A^{(i)} = \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int \frac{\cos(i\varepsilon - ie\sin\varepsilon)}{1-e\cos\varepsilon}\, d\varepsilon$$

$$B^{(i)} = \frac{-\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int \frac{\sin(i\varepsilon - ie\sin\varepsilon)}{1-e\cos\varepsilon}\, d\varepsilon$$

Man sieht hieraus, daſs alle Coefficienten der Cosinus verschwinden. Denn für ε und $-\varepsilon$ ist die unter dem Integrationszeichen stehende Quantität

$$\frac{\sin(i\varepsilon - ie\sin\varepsilon)}{1-e\cos\varepsilon} \text{ und } - \frac{\sin(i\varepsilon - ie\sin\varepsilon)}{1-e\cos\varepsilon}$$

wodurch also das zwischen den angezeigten Grenzen genommene Integral verschwindet. Wir haben also nur $A^{(i)}$ näher zu untersuchen. Man hat

$$A^{(i)} = \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int \left(\frac{\cos i\varepsilon \cos(ie\sin\varepsilon)}{1-e\cos\varepsilon} + \frac{\sin i\varepsilon \sin(ie\sin\varepsilon)}{1-e\cos\varepsilon} \right) d\varepsilon$$

und wenn man $\cos(ie\sin\varepsilon)$, $\sin(ie\sin\varepsilon)$, $(1-e\cos\varepsilon)^{-1}$ in unendliche Reihen entwickelt

$$A^{(i)} = \frac{\sqrt{e-ee}}{i\pi} \cdot \int d\varepsilon\, [1 + e\cos\varepsilon + e^2\cos\varepsilon^2 + e^3\cos\varepsilon^3 + \dots]$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \cos i\varepsilon \left(1 - \frac{i^2 e^2}{\Pi 2} \sin\varepsilon^2 + \frac{i^4 e^4}{\Pi 4} \sin\varepsilon^4 - \dots \right) \\ + \sin i\varepsilon \left(ie\sin\varepsilon - \frac{i^3 e^3}{\Pi 3} \sin\varepsilon^3 + \frac{i^5 e^5}{\Pi 5} \sin\varepsilon^5 - \dots \right) \end{array} \right\}$$

wo $\Pi n = 1 . 2 . 3 \dots n$, nach der von Gauſs eingeführten Bezeichnung. Die Multiplication der Reihen giebt den Coefficienten einer geraden Potenz von e, von e^{2n},

$$= \frac{\sqrt{e-ee}}{i\pi}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \int d\varepsilon \cos i\varepsilon \left(\cos\varepsilon^{2n} - \frac{i^2}{\Pi 2} . \cos\varepsilon^{2n-2} \sin\varepsilon^2 + \dots + (-1)^n \frac{i^{2n}}{\Pi 2n} \sin\varepsilon^{2n} \right) \\ + \int d\varepsilon \sin i\varepsilon \left(i\cos\varepsilon^{2n-1} \sin\varepsilon - \frac{i^3}{\Pi 3} \cos\varepsilon^{2n-3} \sin\varepsilon^3 + \dots - (-1)^n \frac{i^{2n-1}}{\Pi(2n-1)} \cos\varepsilon \sin\varepsilon^{2n-1} \right) \end{array} \right\}$$

und den Coefficienten einer ungeraden e^{2n+1}

$$= \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi}$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \int d\varepsilon \cos i\varepsilon \left(\cos \varepsilon^{2n+1} - \frac{i^2}{\Pi 2} \cos \varepsilon^{2n-1} \sin \varepsilon^2 + \ldots + (-1)^n \frac{i^{2n}}{\Pi 2n} \cos \varepsilon \sin \varepsilon^{2n} \right) \\ + \int d\varepsilon \sin i\varepsilon \left(i \cos \varepsilon^{2n} \sin \varepsilon - \frac{i^3}{\Pi 3} \cos \varepsilon^{2n-2} \sin \varepsilon^3 + \ldots + (-1)^n \frac{i^{2n+1}}{\Pi(2n+1)} \sin \varepsilon^{2n+1} \right) \end{array} \right\}$$

Um das Gesetz dieser Integrale unter eine leichte Uebersicht zu bringen, werde ich sie ganz nach den Potenzen von cos ε ordnen. Die Wiederholung für gerade und ungerade Potenzen von e wird überflüssig seyn, indem man leicht sieht, was sich dadurch ändert; ich werde daher nur die geraden hier entwickeln. Man hat also das e^{2n} enthaltende Glied von $A^{(i)}$

$$= \left(1 + \frac{i^2}{\Pi 2} + \frac{i^4}{\Pi 4} + \frac{i^6}{\Pi 6} + \ldots\ldots + \frac{i^{2n}}{\Pi 2n}\right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \cos i\varepsilon \cos \varepsilon^{2n}$$

$$- \left(\Pi 2 + \frac{2i^4}{\Pi 4} + \frac{3i^6}{\Pi 6} + \ldots\ldots + n.\frac{i^{2n}}{\Pi 2n}\right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \cos i\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2}$$

$$+ \left(\frac{i^4}{\Pi 4} + \frac{3i^6}{\Pi 6} + \ldots + \frac{n.n-1}{1.2}.\frac{i^{2n}}{\Pi 2n}\right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \cos i\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-4}$$

$$+ \text{etc.} \ldots\ldots$$

$$+ \left(i + \frac{i^3}{\Pi 3} + \frac{i^5}{\Pi 5} + \frac{i^7}{\Pi 7} + \ldots\ldots + \frac{i^{2n-1}}{\Pi(2n-1)}\right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \sin i\varepsilon \sin \varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2}$$

$$- \left(\frac{i^3}{\Pi 3} + \frac{2i^5}{\Pi 5} + \frac{3i^7}{\Pi 7} + \ldots + (n-1)\frac{i^{2n-1}}{\Pi(2n-1)}\right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \sin i\varepsilon \sin \varepsilon \cos \varepsilon^{2n-4}$$

$$+ \left(\frac{i^5}{\Pi 5} + \frac{3i^7}{\Pi 7} + \ldots + \frac{n-1.n-2}{1.2}.\frac{i^{2n-1}}{\Pi(2n-1)}\right) \frac{\sqrt{1-ee}}{i\pi} \int d\varepsilon \sin i\varepsilon \sin \varepsilon \cos \varepsilon^{2n-6}$$

$$+ \text{etc.} \ldots\ldots$$

Die Integrale der zweiten Abtheilung dieses Ausdrucks reduciren sich leicht auf die der ersten, indem man, zwischen den angegebenen Grenzen, hat

$$\int d\varepsilon \sin i\varepsilon \sin i\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2k-1} = \frac{i}{2n\,2k} \int \cos i\varepsilon \, . \cos \varepsilon^{2n-2k} d\varepsilon$$

Diese aber sind, wenn P^x_y den x^{ten} Coefficienten eines zur y^{ten} Potenz erhobenen Binomiums bedeutet,

$$\int \cos i\varepsilon \cos \varepsilon^{2n-2k}\, d\varepsilon = \pi \,.\, 2^{-2n+2k+1}\, P^{\left(n-k-\frac{i}{2}\right)}_{(2n-2k)}$$

Man sieht hieraus, daſs sämmtliche Integrale für ein ungerades i verschwinden, indem $n-k-\frac{i}{2}$ alsdann keine ganze Zahl ist; auch verschwinden die Integrale, für welche $n-k-\frac{i}{n}$ negativ ist. Setzt man daher, um keine unnütze Glieder in den Endausdruck aufzunehmen

$$2n = i + 2p$$

wo p nur positive ganze Zahlen, o mit eingeschlossen, bedeutet: so werden die Integrale, der Reihe nach,

$$\pi 2^{-i-2p+1} P^{p}_{i+2p};\ \pi 2^{-i-2p+3} P^{p-1}_{i+2p-2};\ \pi 2^{-i-2p+5} P^{p-2}_{i+2p-4};\ \text{etc.}$$

$$\frac{i\pi}{i+2p} 2^{-i-2p+1} P^{p}_{i+2p};\ \frac{i\pi}{i+2p-2} 2^{-i-2p+3} P^{p-1}_{i+2p-2};\ \frac{i\pi}{i+2p-4} 2^{-i-2p+5} P^{p-2}_{i+2p-4};\ \text{etc.}$$

Also das e^{i+2p} enthaltende Glied von $A^{(i)}$

$$= \frac{2\sqrt{1-ee}}{i}\left(\frac{e}{2}\right)^{i+2p} \times$$

$$\left(1+\frac{i^2}{\Pi 2}+\frac{i^4}{\Pi 4}+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{i^{i+2p}}{\Pi(i+2p)}\right) P^{p}_{(i+2p)}$$

$$-2^2\left(\frac{i^2}{\Pi 2}+\frac{2i^4}{\Pi 4}+\ldots\ldots\ldots + \left(\tfrac{1}{2}i+p\right)\frac{i^{i+2p}}{\Pi(i+2p)}\right) P^{(p-1)}_{(i+2p-2)}$$

$$+\ 2^4\left(\frac{i^4}{\Pi 4}+\ldots+\frac{\left(\frac{1}{2}i+p\right)\left(\frac{1}{2}i+p-1\right)}{1\,.\,2}\,\frac{i^{i+2p}}{\Pi(i+2p)}\right) P^{(p-2)}_{(i+2p-4)}$$

$$-\ \text{etc.}\ \ldots$$

$$+\frac{i}{i+2p}\left(i+\frac{i^3}{\Pi 3}+\frac{i^5}{\Pi 5}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{i^{i+2p-1}}{\Pi(i+2p-1)}\right) P^{p}_{(i+2p)}$$

$$-\frac{i\,.\,2^2}{i+2p-2}\left(\frac{i^3}{\Pi 3}+\frac{2i^5}{\Pi 5}+\ldots\ldots+\left(\tfrac{1}{2}i+p-1\right)\frac{i^{i+2p-1}}{\Pi(i+1p-2)}\right) P^{(p-1)}_{(i+2p-2)}$$

$$+\frac{i\,.\,2^4}{i+2p-4}\left(\frac{i^5}{\Pi 5}+\ldots+\frac{\left(\frac{1}{2}i+p-1\right)\left(\frac{1}{2}i+p-2\right)}{1\,.\,2}\,\frac{i^{i+2p-1}}{\Pi(i+2p-1)}\right) P^{(p-2)}_{(i+2p-4)}$$

$$-\ \text{etc.}\ \ldots$$

Auf dieselbe Weise findet sich für ein ungerades i das e^{i+2p} enthaltende Glied von $A^{(i)}$

$$= \frac{2\sqrt{1-ee}}{i}\left(\frac{e}{2}\right)^{i+2p} \times$$

$$\left(1+\frac{i^2}{\Pi 2}+\frac{i^4}{\Pi 4}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{i^{i+2p-1}}{\Pi(i+2p-1)}\right)P^p_{(i+2p)}$$

$$-2^2\left(\frac{i^2}{\Pi 2}+\frac{2i^4}{\Pi 4}+\ldots\ldots+\left(\frac{i-1}{2}+p\right)\frac{i^{i+2p-1}}{\Pi(i+2p-1)}\right)P^{(p-1)}_{(i+2p-2)}$$

$$+2^4\left(\frac{i^4}{\Pi 4}+\ldots\ldots+\frac{(\frac{i-1}{2}+p)(\frac{i-3}{2}+p)}{1\ .\ 2}\frac{i^{i+2p-1}}{\Pi(i+2p-1)}\right)P^{(p-2)}_{(i+2p-4)}$$

$$-\text{ etc. } \ldots.$$

$$+\frac{i}{i+2p}\left(i+\frac{i^3}{\Pi 3}+\frac{i^5}{\Pi 5}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{i^{i+2p}}{\Pi(i+2p)}\right)P^p_{(i+2p)}$$

$$-\frac{i\ .\ 2^2}{i+2p-2}\left(\frac{i^3}{\Pi 3}+\frac{2i^5}{\Pi 5}+\ldots\ldots+\left(\frac{i-1}{2}+p\right)\frac{i^{i+2p}}{\Pi(i+2p)}\right)P^{(p-1)}_{(i+2p-2)}$$

$$+\frac{i\ .\ 2^4}{i+2p-4}\left(\frac{i^5}{\Pi 5}+\ldots\ldots+\frac{(\frac{i-1}{2}+p)(\frac{i-3}{2}+p)}{1\ .\ 2}\frac{i^{i+2p}}{\Pi(i+2p)}\right)P^{(p-2)}_{(i+2p-4)}$$

$$-\text{ etc. } \ldots.$$

Die früheren Auflösungen derselben Aufgabe enthalten den Factor $\sqrt{1-ee}$ nicht in dieser Gestalt, sondern mit in die Reihe aufgelöset; ich habe dieses vermieden, theils wegen der gröfseren Convergenz der Reihen, theils wegen der dadurch vermehrten Complication des Gesetzes.

Mit auffallender Leichtigkeit giebt diese Methode die Entwickelung des Radiusvectors. Setzt man, indem sich leicht zeigen läfst, dafs alle Coefficienten der Sinus verschwinden,

$$r = B^0 + B' \cos\mu + B'' \cos 2\mu + B''' \cos 3\mu + \ldots.$$

so hat man

$$B^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int r \cos i\mu\, d\mu = \frac{a}{\pi}\int \cos(i\varepsilon - ie\sin\varepsilon)(1-e\cos\varepsilon)^2\, d\varepsilon$$

$$= -\frac{ae}{i\pi}\int \sin e \sin(i\varepsilon - ie\sin\varepsilon)\, d\varepsilon$$

$$= \frac{ae}{i\pi}\int de \left\{\begin{matrix}\cos i\varepsilon\left(ie\sin\varepsilon^2 - \frac{i^3e^3}{\Pi 3}\sin\varepsilon^4 + \frac{i^5e^5}{\Pi 5}\sin\varepsilon^6 - \ldots\right)\\ -\sin i\varepsilon\left(\sin\varepsilon - \frac{i^2e^2}{\Pi 2}\sin\varepsilon^3 + \frac{i^5e^5}{\Pi 4}\sin\varepsilon^5 - \ldots\right)\end{matrix}\right\}$$

Die allgemeinen Glieder beider Reihen sind

$$\frac{ae}{i\pi}(-1)^k \frac{i^{2k+1}e^{2k+1}}{\Pi(2k+1)}\int \sin \varepsilon^{2k+1} \cos i\varepsilon\, d\varepsilon$$

$$\frac{ae}{i\pi}(-1)^{k-1} \frac{i^{2k}e^{2k}}{\Pi 2k}\int \sin \varepsilon^{2k+1} \sin i\varepsilon\, d\varepsilon$$

und folglich die allgemeinen Glieder der Integrale

$$(-1)^{\frac{1}{2}i+k}.a.2^{-2k-1}.\frac{i^{2k}e^{2k+2}}{\Pi(2k+1)}.P_{(2k+2)}^{(k-\frac{i}{2}-1)}$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}i+k-\frac{3}{2}}.a.2^{-2k}.\frac{i^{2k-1}e^{2k+1}}{\Pi 2k}.P_{(2k+1)}^{(k-\frac{i}{2}+\frac{1}{2})}$$

Für ein gerades i verschwindet das zweite, für ein ungerades das erste; setzt man im ersten $2k+2=i+2p$, im zweiten $2k+1=i+2p$, so erhalten beide den Ausdruck

$$(-1)^{p-1}.a.2^{-i-2p+1}.\frac{i^{i+2p-2}.e^{i+2p}}{\Pi(i+2p-1)}P_{(i+2p)}^{p}$$

welcher daher sowohl für ein gerades als für ein ungerades i gilt. Dieser Ausdruck findet jedoch nur dann statt, wenn man für ein gerades i der Gleichung $2k+2=i+2p$ und für ein ungerades i der Gleichung $2k+1=i+2p$, durch ganze positive Werthe von k und p Genüge leisten kann. Die zweite Bedingung kann immer erfüllt werden, die erste aber nicht, wenn i und p zugleich $=0$ sind: für diesen Fall findet man

$$B^{(0)}=a\int(1-e\cos\varepsilon)^2\,d\varepsilon=a\left(1+\frac{e^2}{2}\right)$$

wo jedoch das zweite Glied mit in der allgemeinen Gleichung enthalten sein mufs und enthalten ist.

Aus dem eben gegebenen allgemeinen Gliede von $B^{(i)}$ folgt übrigens

$$B^{(i)}=\frac{-a.i^{i-2}e^i}{2^{i-1}\pi_i}\left[i-\frac{i+2}{1.i+1}\left(\frac{ie}{2}\right)^2+\frac{i+4}{1.2.i+1.i+2}\left(\frac{ie}{2}\right)^4-\frac{i+6}{1.2.3.(i+1.i+2i+3)}\left(\frac{ie}{2}\right)^6+\text{etc...}\right]$$

was auch für die Rechnung so bequem ist als man wünschen kann.

Von den Werthen der Produkte zu bestimmten Summen der Zeigezahlen ihrer Faktoren.

Von Herrn Tralles *).

Da die Funktion eines Polynoms $f(a + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots) = Fx$ der Form

$$fa + f'a \cdot (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) + \frac{f''a}{1 \cdot 2} (a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^2 + \ldots;$$

so ist die ganze Weitläuftigkeit der Entwickelung, denn Schwierigkeit kann man es nicht im allgemeinen nennen, auf die Potenzen des die Differenzial-Coefficienten der Funktion fa multiplizirenden Polynoms zurückgeführt, und es ist also nur darum zu thun, den Coeffizienten von x^n in $(a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^m$ zu bestimmen. Dieser findet sich also im Produkte m gleicher Faktoren, jeder gleich $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ für die Summe aller Glieder, in welchen die Exponenten der sich multiplizirenden Potenzen von x aus jeden der m Faktoren eine genommen, zusammen die Zahl n machen. Da nun der einer jeglichen Potenz von x wie x^λ zugehörige Coeffizient in jedem einzelnen Faktor mit a_λ bezeichnet, eine dem Potenz-Exponenten von x gleiche Zeigezahl hat, und ein solcher Coeffizient von der Potenz, zu welcher er gehört, unzertrennlich, so folgt, daſs der in Rede stehende Coeffizient von x^n die Summe aller Produkte aus m Faktoren, wie $a_{\lambda_{\prime}}\, a_{\lambda_{\prime\prime}}\, a_{\lambda_{\prime\prime\prime}} \ldots a_{\lambda_m}$ sein muſs,

*) Vorgelesen den 14. August 1817.

mufs, in welchem die Summe der m Zeigezahlen $\lambda_{,} + \lambda_{,,} + \ldots + \lambda_{m}$ gleich n ist. Hierbei stelle man sich der Ordnungsansicht wegen vor, dafs $a_{\lambda,}$ aus dem ersten, $a_{\lambda,,}$ aus dem zweiten etc. a_{λ_m} aus der m^ten^ Reihe genommen sei, indem man von den m Faktoren $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ einen als den ersten, den andern als den zweiten u. s. f. betrachtet; dieselben Zeigezahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ können also wiederholentlich vorkommen, als aus dem Range nach verschiedenen Faktoren genommen, stehen dann aber in anderer Ordnungsfolge so oft dies angeht. Bezeichnet man die Summe aller Produkte aus m Coefficienten einen aus jeder der m Reihen genommen, wo die Summe der Zeigezahlen n ist, mit $p_{m,n}$, so ist also dies der Coeffizient von x^n in der m^{ten} Potenz des Polynoms $a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$

Daher ist der Coeffizient von x^μ in der Entwickelung der Funktion $f(a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$ gleich

$$p_{1,\mu} f' a + p_{2,\mu} \frac{f'' a}{1 . 2} + p_{3,\mu} \frac{f''' a}{1 . 2 . 3} + \ldots + p_{\mu,\mu} \frac{f^{\mu} a}{1 . 2 \ldots \mu}.$$

Man hat sich oft und weitläuftig damit beschäftiget, die verschiedenen Produkte, aus welchen $p_{2,\mu}$, $p_{3,\mu}$, $p_{4,\mu}$ etc. bestehen, vollständig und geordnet auseinander zu setzen Moivre und Boscowich haben seit langem dafür Regeln gegeben, und in neuern Zeiten sind dieselben bei der Bearbeitung der Cambinationslehre als eine besonders wichtige Anwendung derselben vorzüglich beachtet worden. Allein hiermit wird doch nicht mehr geleistet, als dafs dasjenige, was man mit dem Verstande fafst, zur Anschauung werde, und man nach derselben die einzelnen Produkte in gegebenen Fällen berechnet, und dann in einem numerischen Resultat zusammenfassen könne. Dies ist allerdings dann sehr wichtig, wenn die Gröfsen a_1, a_2, $a_3 \ldots$ gesetzlos fortschreiten, oder in verwickelten Fällen entweder einem unbekannten Gesetze folgen, oder man doch aus dem bekannten keinen Nutzen ziehen kann. Aber der Analysis ist vornehmlich daran gelegen, in besondern Fällen die Gröfsen $p_{2,\mu}$, $p_{3,\mu} \ldots$ als Funktionen von μ zu kennen, wenn a_μ als solche gegeben ist. Denn jenes Gesetz, welches den Coeffizienten von x^μ andeutet, ist zu allgemein, da es für jede Funktion gültig ist.

Allein meines Wissens hat man noch nicht an das Problem gedacht: wenn die Gröfsen a_1, a_2, a_3 etc. a_λ einerlei Funktionen ihrer Zeigezahlen sind, den gesammten Werth der Produkte aus zwei oder drei etc. derselben als Faktoren bestehend zu finden, wenn die Summe der Zeigezahlen der Fak-

toren gegeben ist, und die Produkte aller Versetzungen ihrer Faktoren mit aufgenommen werden. Die Auflösung dieses Problems, an sich nicht unmerkwürdig, gäbe erst die vollständige und am meisten direkte Entwickelung der Funktionen solcher Polynomien oder Reihen, deren Coeffizienten numerisch als Funktionen des Potenzexponenten der veränderlichen Gröſse, bei welcher sie stehen, bestimmt sind. Beim ersten Anblick könnte man glauben, es lasse sich nicht leicht analytisch behandeln, und dies hat vielleicht von der Betrachtung desselben abgehalten, allein im Allgemeinen findet es sich nicht also, nur in den besondern Fällen treten die gewöhnlichen Schwierigkeiten der Summationen ein.

Es sey P das Aggregat aller Produkte irgend einer Anzahl von Faktoren aus den Gröſsen a_1, a_2, a_3 ...; Q sey ein ähnliches Aggregat, aber für einen Faktor mehr. Die Summenzahl der Zeigezahlen der Faktoren für P und Q sollen die angehängte Buchstaben und Zahlen ausdrücken. In P_μ so wie in $P_{\mu-\iota}$ sind also bei unverändert festgesetzter Faktorenanzahl μ, $\mu-\iota$ die Summe ihrer Zeigezahlen, und jene Gröſsen P_μ, $P_{\mu-\iota}$ als einerlei Funktionen von μ und $\mu-\iota$ zu betrachten, welche zwar von der Zahl der Faktoren mit bestimmt wird, allein sie ist für jetzt als eine beständige darin verwickelt. Nun ist klar, daſs für irgend ein Glied im Aggregat von Q_μ, in welchem a_ι der neu zu P kommende Faktor seyn soll, a_ι nur zu $P_{\mu-\iota}$ treten kann, um einen Theil der im Aggregate von Q_μ vorkommenden Produkte zu bilden. Es kann aber a_ι eine jede von den Gröſsen a_1, a_2 ... seyn, bei welcher $P_{\mu-\iota}$ bestehen kann. Es ist also, wenn man nach der Reihe die Gröſsen a_1, a_2 u. s. w. bis zum unbestimmten a_{x-1} nimmt

$$(Q_\mu)_x = a_1 P_{\mu-1} + a_2 P_{\mu-2} + a_3 P_{\mu-3} + \ldots + a_{x-1} P_{\mu-x+1}$$

Nähme man auch die Funktion a_x noch als neuen Faktor auf, so käme zum vorigen Aggregat noch das Glied $a_x P_{\mu-x}$, und man müſste dasselbe dann mit $(Q_\mu)_{x+1}$ bezeichnen, so daſs also die Differenz der Reihe, welche $(Q_\mu)_x$ ausdrückt, d. i.

$$\Delta . (Q_\mu)_x = a_x P_{\mu-x} .$$

Mithin hat man

$$(Q_\mu)_x = \Sigma . a_x P_{\mu-x}$$

Dies Integral ist so zu nehmen, daſs es für $x = 1$ Null wird, und um dann Q_μ zu haben, setzt man für x die gröſste Zahl, für welche

$P_{\mu-x+1}$ nicht Null wird. Diese hängt ab von der Zahl der Faktoren und von μ. Ist jene e, so ist P_e das Produkt zur niedrigsten Summe aus e Faktoren, also $\mu - x + 1 = e$, mithin $x = \mu + 1 - e$ zu setzen, um Q_μ den Werth des gesammten Aggregats von Produkten aus $e + 1$ Faktoren zur Zeigersumme μ vollständig zu haben, welches denn als eine Funktion von μ erscheint.

Im allgemeinen aber giebt die Formel, so lange x unbestimmt bleibt, die Summe von so vielen Produkten, als man verlangt, die mit einem bestimmten a_1 als ersten Faktor anfangen, und mit dem Faktor a_{x-1} als ersten enden.

Um für das obige eine etwas verschiedene auch noch allgemeinere Darstellung zu erhalten, setze man, es seyen die Gröſsenreihen

$$a_1, a_2, a_3 \ldots; \; b_1, b_2, b_3 \ldots; \; c_1, c_2, c_3 \ldots$$

die man nach ihrer Ordnung als erste, zweite, dritte, ... l^{te} zählt, und die jede unbestimmt fortschreiten. Die Gröſsen a_x, b_x, c_x ... l_x sind verschiedene Funktionen von x, welche die Werthe von a_1, a_2 ... b_1, b_2 etc. geben, wenn man in denselben $x = 1, 2 \ldots$ setzt.

Will man nun die Produkte zu zweien, dreien etc. dieser Gröſsen zu bestimmter Zeigersumme, und so, daſs in den Produkten nie zwei oder mehr Faktoren aus derselben Reihe vorkommen, so wird, wenn P_μ den Werth von e Faktoren zur Zeigersumme μ als Funktion von μ ausdrückt, und Q_μ diejenige von $e + 1$ Faktoren, ähnlich dem vorgehenden,

$$(Q_\mu)_x = f_1 . P_{\mu-1} + f_2 . P_{\mu-2} + f_3 . P_{\mu-3} + \ldots + f_{x-1} P_{\mu-x+1}$$

$$\text{also } (Q_\mu)_x = \Sigma f_x P_{\mu-x}$$

Es ist f_x hier der unbestimmte neu hinzutretende Faktor aus der $e + 1^{ten}$ Reihe. Diese mit f angedeuteten Funktionen kommen in P nicht vor, dieses enthält nur alle aus den vorhergehenden Reihen. Das Integral wird ähnlich wie das vorige im Anfang und Ende bestimmt, und dann kann man weiter gehen und die Produkte von $e + 2$ Faktoren zur Zeigersumme μ bestimmen,

Die Coeffizienten einer Reihe, welche das Produkt mehrerer entwickelt darstellen soll, bestimmen sich in dieser Form, die auch andere Anwendungen hat. Sie geht offenbar in die erstere über, wenn man $a_x = b_x = c_x$ etc. setzt.

Es ist bisher die Zahl der Funktionen a_1, a_2 ... unbestimmt oder unendlich gedacht. Allein es ist sehr leicht, sie auf eine bestimmte Zahl

zu beschränken. Sollen in Q_μ keine Faktoren höherer Zeigezahl als ι aufgenommen werden, so muſs auch P_μ schon so bestimmt seyn, mithin alle vorhergehenden Produkte niedrigerer Dimension. Es wird überflüſsig seyn, dies hier auseinander zu setzen.

Es beschränkt sich das Gesagte nicht blos auf Produkte zu bestimmten Zeigersummen, sondern auch auf andere von der Multiplikation verschiedene Zusammensetzungen. Das Aggregat von Gruppen von e Gröſsen zur Zeigesumme μ durch Addition verbunden, ausgedrückt durch P_μ und zu $e+1$ Gröſsen durch Q_μ, so ist in diesem höchst einfachen Falle

$$(Q_\mu)_x = \Sigma f_x + \Sigma P_{\mu-x}$$

Um das Allgemeine in einiger Anwendung in besondern Beispielen zu zeigen, habe, in der zuerst genommenen Voraussetzung gleicher Reihen, welche die Gröſsen a_1, a_2, a_3 ... enthalten, a_x die einfachste Form. Es werde gleich 1 angenommen. Nun bezeichnen $p_{1,\mu}$, $p_{2,\mu}$, $p_{3,\mu}$ ... die Werthe der Aggregate der Produkte aus einer, zweien, dreien etc. Gröſsen zur Zeigesumme μ, so ist

$$p_{1,\mu} = a_\mu$$

$$(p_{2,\mu})_x = \Sigma a_x a_{\mu-x}$$

und weil a_x, $a_{\mu-x}$ gleich 1, so ist

$$(p_{2,\mu})_x = x + c = x - 1$$

Da es für $x=1$ Null werden soll. Und um $p_{2,\mu}$ zu haben, muſs man nach obigen, $x=\mu+1-e$ setzen. Hier ist, $e=1$, also $x=\mu$ zu nehmen. Daher

$$p_{2,\mu} = \mu - 1.$$

Nun ist ferner

$$(p_{3,\mu})_x = \Sigma a_x p_{\mu-x} = \Sigma 1 . (\mu - x - 1), \text{ also}$$

$$(p_{3,\mu})_x = -\frac{(x+1-\mu)(x-\mu)}{1 . 2} + C$$

welches, für $x=1$ Null gesetzt, $C = \frac{\mu-1 . \mu-2}{1 . 2}$, und da nun $e=2$, für $x=\mu+1-2=\mu-1$ das erste Glied Null macht. Es ist also

$$p_{3,\mu} = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1 . 2}$$

Ferner ist

$$(p_{4,\mu})_x = \Sigma \frac{(\mu - x - 1)(\mu - x - 2)}{1 \cdot 2} = \frac{(x-\mu)(x+1-\mu)(x+2-\mu)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + C,$$

welches ähnlich wie zuvor begränzt durch $x = 1$ und $x = \mu - 2$ den Werth giebt von

$$p_{4,\mu} = \frac{\mu - 1 . \mu - 2 . \mu - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

woraus hinlänglich die Fortschreitung erhellt, so daſs allgemein seyn wird:

$$p_{e,\mu} = \frac{\mu - 1 . \mu - 2 \ldots \mu - e + 1}{1 \cdot 2 \cdot \cdot \cdot e}.$$

Da in diesem Beispiele die einzelnen Produkte wie $a_{\lambda_{,}} . a_{\lambda_{,,}} \ldots a_{\lambda_m}$ stets gleich 1, so ist es klar, daſs $p_{e,\mu}$ die Anzahl aller möglichen Verbindungen zu e angiebt, für welche die Summe der Zeigezahlen μ ist.

So drückt also z. B. $p_{e,\mu}$ die Anzahl der Fälle aus, in welchen mit e Würfeln die Summe der Augen μ ist, der Würfel habe so viele Seiten man wolle, mehr als $\mu + 1 - e$.

Man würde leicht die Zahl der aus verschiedenen Zeigezahlen zusammengesetzten Produkte ausmitteln, aber es ist hier der Ort nicht, dieses zu verfolgen. Uebrigens sieht man, daſs diese Gröſsen $p_{e,\mu}$ die Zahlen-Coeffizienten in der Entwickelung irgend einer Funktion von $\frac{1}{1-x}$ auch $\frac{1}{1+x}$ geben werden.

Es sey nun $a_x = x$, also aus der Reihe der natürlich fortgehenden Zahlen die Summe ihrer Produkte aus e Faktoren zu finden, wenn die Summe der einzelnen Faktoren μ ist. Man hat also auch $p_{1,\mu} = \mu$.

Demnach

$$(p_{2,\mu})_x = \Sigma x . \mu - x = \Sigma [(\mu - 1) x - x (x - 1)]$$

$$= (\mu - 1) \frac{x . x - 1}{1 \cdot 2} - 2 . \frac{x . x - 1 . x - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Die Constante ist o, da diese Gröſse von selbst mit $x = 1$ Null.

Also statt x gesetzt $\mu + 1 - 1$ oder μ, so hat man

$$p_{2,\mu} = \frac{\mu + 1 . \mu . \mu - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Demnach

$$(p_{3,\mu})_x = \Sigma x . \frac{(\mu - x + 1)(\mu - x)(\mu - x - 1)}{1 . 2 . 3}$$

$$= - \Sigma \left(\frac{x+2-\mu . x+1-\mu . x-\mu . x-1-\mu}{1 . 2 . 3} + (\mu - 2) \frac{x+1-\mu . x-\mu . x-1-\mu}{1 . 2 . 3} \right)$$

$$= - 4 (x+2-\mu)_5 - (\mu-2)(x+1-\mu)_4 = (x+1-\mu)_4 \left(\frac{2-\mu-4x}{5} \right) + C$$

Die abgekürzte Schreibart ist ohne Erläuterung verständlich. Die Constante wird, durch $x = 1$ bestimmt, gleich $(2-\mu)_4 \frac{\mu+2}{5}$ und für x gesetzt $\mu+1-2$ oder $\mu - 1$ das x enthaltende Glied; also ist

$$p_{3,\mu} = (2-\mu)_4 \frac{\mu+2}{5} = \frac{\mu+2 . \mu+1 . \mu . \mu-1 . \mu-2}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} = (\mu+2)_5 = \frac{(\mu^2-4)(\mu^2-1)\mu}{1 . 2 . 3 . 4 . 5}$$

und man findet weiter

$$p_{4,\mu} = (\mu+3)_7 = \frac{(\mu^2-9)(\mu^2-4)(\mu^2-1)\mu}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7}$$

und den allgemeinen Ausdruck, analogisch

$$p_{e,\mu} = (\mu + e - 1)_{2e-1}$$

Die Behandlung darf jedoch nicht stets auf die vorige allgemein vorgezeichnete Art geschehen, wie aus folgendem Beispiel erhellt.

Es sey a_μ also $p_{1,\mu} = \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots \mu} = \frac{1}{1^{\mu)}}$

so ist

$$p_{2,\mu} = \frac{1}{1} \frac{1}{1^{\mu-1)}} + \frac{1}{1^{2)}} \frac{1}{1^{\mu-2)}} + \frac{1}{1^{3)}} \frac{1}{1^{\mu-3)}} + \ldots + \frac{1}{1^{\mu-1)}} \frac{1}{1}$$

also

$$p_{2,\mu} = \frac{1}{1^{\mu)}} \left(\frac{\mu}{1} + \frac{\mu . \mu - 1}{1 . 2} + \frac{\mu . \mu - 1 . \mu - 2}{1 . 2 . 3} + \ldots + \frac{\mu}{1} \right)$$

oder

$$p_{2,\mu} = \frac{1}{1^{\mu)}} (2^\mu - 2)$$

daher

$$p_{3,\mu} = \frac{1}{1}\,\frac{1}{1^{\mu-1)}}(2^{\mu-1}-2) + \frac{1}{1^{2)}}\,\frac{1}{1^{\mu-2)}}(2^{\mu-2}-2) + \ldots + \frac{1}{1^{\mu-2)}}\,\frac{1}{1^{2)}}(2^2-2) + \frac{1}{1^{\mu-1)}}\,\frac{1}{1}(2-2)$$

das letzte Glied ist der Symetrie halber hinzugefügt, es ist an sich Null.

Die Reihe geht in die zwei folgenden über

$$p_{3,\mu} = -2\left(\frac{1}{1}\,\frac{1}{1^{\mu-1)}} + \frac{1}{1^{2)}}\,\frac{1}{1^{\mu-2)}} + \frac{1}{1^{3)}}\,\frac{1}{1^{\mu-3)}} + \ldots + \frac{1}{1^{\mu-1)}}\,\frac{1}{1}\right)$$

$$+ \frac{1}{1^{\mu)}}\left(\frac{\mu}{1}\cdot 2^{\mu-1} + \frac{\mu\cdot\mu-1}{1\cdot 2}\cdot 2^{\mu-2} + \ldots + \frac{\mu}{1}\,2\right)$$

das erste Glied ist aus dem vorigen bekannt, also ist

$$p_{3,\mu} = -2p_{2,\mu} + \frac{1}{1^{\mu)}}(3^\mu - 2^\mu - 1^\mu)$$

und für $p_{2,\mu}$ den schon bekannten Werth $\frac{1}{1^{\mu)}}(2^\mu - 2\cdot 1^\mu)$ substituirt

$$p_{3,\mu} = \frac{1}{1^{\mu)}}(3^\mu - 3\cdot 2^\mu + 3\cdot 1^\mu) = \frac{1}{1^{\mu)}}\,\Delta^3\cdot 0^\mu$$

Das weitere findet sich ähnlich, und man hat also den merkwürdigen Satz:

$$p_{e,\mu} = \frac{1}{1^{\mu)}}\,\Delta^e\cdot 0^\mu.$$

Setzt man α_{μ}, also auch $p_{1,\mu} = \frac{1}{1.2\ldots\mu+1} = \frac{1}{2^{\mu)}} = \frac{1}{1^{\mu+1)}}$

so ist

$$p_{2,\mu} = \frac{1}{1^{2)}}\,\frac{1}{1^{\mu)}} + \frac{1}{1^{3)}}\,\frac{1}{1^{\mu-1)}} + \ldots + \frac{1}{1^{\mu)}}\,\frac{1}{1^{2)}}$$

Man setze diesen die Gröſse $\frac{1}{1^{1)}}\,\frac{1}{1^{\mu+1)}}$ vor, und die gleiche $\frac{1}{1^{\mu+1)}}\,\frac{1}{1^{1)}}$ zuletzt noch hinzu, so kann man dieses nach dem vorigen mit $p'_{2,\mu+2}$ bezeichnen, so daſs $p'_{1,\mu} = \frac{1}{1^{\mu)}}$. Mithin ist in diesem Falle

$$p_{2,\mu} = p'_{2,\mu+2} - 2\,\frac{1}{1^{\mu+1)}} = p'_{2,\mu+2} - 2p'_{1,\mu+1}$$

Dafür kann man aber auch setzen, da $p'_{0,\mu+0} = 0$,

$$p_{2,\mu} = \Delta^2\, p'_{0,\mu+0}$$

wo sich das Δ auf o bezieht, so dafs sowohl der Produktsexponent als die Summenzeige als veränderlich angesehen werden.

Man hat aber nach obigem, da

$$p^{1}_{2,\mu+2} = \frac{\Delta^2 . 0^{\mu+2}}{1^{\mu+2)}},$$

$$p_{2,\mu} = \frac{\Delta^2 . 0^{\mu+2}}{1^{\mu+2)}} - 2\,\frac{\Delta . 0^{\mu+1}}{1^{\mu+1)}}$$

demnach

$$p_{3,\mu} = \begin{cases} \frac{1}{1^{2)}}\,\frac{\Delta^2\, 0^{\mu+1}}{1^{\mu+1)}} + \frac{1}{1^{3)}}\,\frac{\Delta^2\, 0^{\mu}}{1^{\mu)}} + \frac{1}{1^{4)}}\,\frac{\Delta^3\, 0^{\mu-1}}{1^{\mu-1)}} + \ldots + \frac{1}{1^{\mu-1)}}\,\frac{\Delta^2\, 0^4}{1^{4)}} \\ -2\left(\frac{1}{1^{2)}}\,\frac{1}{1^{\mu)}} + \frac{1}{1^{3)}}\,\frac{1}{1^{\mu-1)}} + \frac{1}{1^{4)}}\,\frac{1}{1^{\mu-2)}} + \ldots + \frac{1}{1^{\mu-1)}}\,\frac{1}{1^{3)}}\right) \end{cases}$$

Man kann den letzten Gliedern beider Reihen $\frac{1}{1^{\mu)}}\,\frac{\Delta^2 . 0^3}{1^{3)}} - 2\,\frac{1}{1^{\mu)}}\,\frac{1}{1^{2)}}$ hinzufügen, da diese Gröfse o ist, und es wird dann

$$p_{3,\mu} = \begin{cases} p^{1}_{3,\mu+3} - \frac{1}{1^{1)}}\,\frac{\Delta^2\, 0^{\mu+2}}{1^{\mu+2}} - \frac{1}{1^{\mu+1)}}\,\frac{\Delta^2\, 0^2}{1^{2)}} \\ +2\left(\frac{1}{1^{1)}}\,\frac{1}{1^{\mu+1)}} + \frac{1}{1^{\mu+1)}}\,\frac{1}{1^{1)}} - p^{1}_{2,\mu+2}\right) \end{cases}$$

welches zusammengezogen giebt

$$p_{3,\mu} = p^{1}_{3,\mu+3} - 3p^{1}_{2,\mu+2} + 3p^{1}_{1\mu+1}$$

oder

$$p_{3,\mu} = \frac{\Delta^3 . 0^{\mu+3}}{1^{\mu+3)}} - 3\,\frac{\Delta^2 . 0^{\mu+2}}{1^{\mu+2)}} + 3\,\frac{\Delta\, 0^{\mu+1}}{1^{\mu+1)}}$$

Diesem kann man der Symmetrie wegen das Glied $-\frac{0^{\mu}}{1^{\mu)}}$ hinzusetzen, da es Null ist, um die Eorm $p_{3,\mu}$ vollständiger zu ersehen, welche sich auch für die folgenden bewähren wird, so dafs man den für mehrere Anwendungen brauchbaren Satz hat

$$p_{e,\mu} = \frac{\Delta^e\, 0^{\mu+e}}{1^{\mu+e}} - e\,\frac{\Delta^{e-1}\, 0^{\mu+e-1}}{1^{\mu+e-1)}} + \frac{e . e-1}{1 . 2}\,\frac{\Delta^{e-2}\, 0^{\mu+e-2}}{1^{\mu+e-2)}} - \ldots$$

Analytische Betrachtung ebener und sphärischer Dreiecke und deren Analogie.

Von Herrn Tralles *).

§. 1.

Die sphärische Trigonometrie sowohl als die ebene stellen so einfache Gröfsenbeziehungen auf, durch welche ein Theil dieser Dreiecke von den übrigen bestimmt wird, dafs es, rein wissenschaftlich betrachtet, wohl wichtig ist, nachzusehen, unter welchen blos quantitativen Bedingungen sie entstehen, ohne die Anschauung zu Hülfe zu ziehen. In dieser gelangt man erst durch Umwege zu jenen Gröfsenbeziehungen, oder wenn durch den graden, manchen doch lange scheinenden Weg der Geometrie. Ich zeige in dieser Abhandlung, welche höchst einfache Gröfsenbetrachtung zu allen den Gleichungen führt, welche beide Trigonometrien enthalten, und welches das gemeinschaftliche sie verbindende Princip ist. Die entstehenden Formen sind bekannt, allein auch noch in neuern Zeiten läfst ihre rein analytische Ableitung selbst dann, wenn die Hauptform aus geometrischer Betrachtung entlehnt worden ist, wohl noch einiges zu wünschen.

Nimmt man diesen Gegenstand rein algebraisch, so ist er äufserst einfach, kann auch so für sich bestehen. Indessen ist die transcendente Betrachtung so gewöhnlich, dafs ich dieselbe nicht habe unbeachtet lassen wollen, da sich auch in diesem eine Ansicht darbietet, welche mir neu zu seyn scheint, von der Geometrie frei ist, und welche ich mitzunehmen nicht für überflüfsig gehalten habe.

*) Vorgelesen den 29. Februar 1816.

Es werden Gröſsen in Betrachtung kommen, deren positiver oder negativer Werth nicht gröſser als Eins seyn soll. Diese kann man als wahre positive oder negative Brüche unmittelbar setzen, es läſst sich aber auch denken, daſs eine andere Gröſse dieselben bestimmt, und diese die Brüche bestimmende Gröſse selbst keiner Werthbeschränkung unterworfen sei, da sie sonst entweder nicht gröſser als zuläſslich angenommen, oder wiederum als von einer andern abhängig angesehen werden müſste.

Eine jede willkührlich positiv oder negativ angenommene Gröſse x soll also eine andere vollständig bestimmen zwischen den Gränzen $+1$ und -1. Der Bruch wird also als eine Funktion von x betrachtet, welcher stets reel, auch nicht vieldeutig als Werth der Funktion für ein bestimmtes x sich ergeben soll.

Diesem zu genügen, darf man nur bemerken, daſs eine Funktion, wenn sie für ein bestimmtes x einen gröſsten positiven Werth erhalten hat, entweder zu einem kleinsten positiven oder gröſten negativen übergehen muſs, wenn x gröſser wird als zuvor. Im letztern Falle wird die Funktion, bevor sie dies negative Maximum erreicht, Null werden für einen ebenfalls bestimmten Werth von x; ist dieser ξ, so enthält die Funktion $x-\xi$ oder $1-\frac{x}{\xi}$ als Faktor. Soll fernerhin für einen gröſsern Werth von x die Funktion ein positives Maximum erlangen, so wird sie für einen zwischen diesem und ξ fallenden Werth $\xi+i$ wiederum Null, und auch $x-(\xi+i)$ oder $1-\frac{x}{\xi+i}$ zum Faktor haben.

Man nehme das Produkt einfacher Faktoren wie $1+\frac{x}{n}$, so daſs in den verschiedenen, n als jede ganze positive oder negative Zahl einmal vorkömmt. Dieses Produkt, wenn man noch x als Faktor aufnimmt, ist also:

$$\ldots\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n-1}\right)\left(1-\frac{x}{n-2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{1}\right)x\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots$$

besteht aus unendlich vielen Faktoren, und wird Null für x gleich jeder ganzen positiven oder negativen ganzen Zahl auch mit $x=0$. Es kann für keinen Werth von x unendlich werden, da es keinen Faktor der Form $\left(1+\frac{x}{m}\right)^{-e}$ enthält, also wird es zwischen den Werthen von x, für welche

es Null wird, nur endliche positive und negative Werthe annehmen. Also sind die gröfsten Werthe ebenfalls stets endliche positiv und negativ, und können daher vermittelst eines beständigen Faktors, wenn es erforderlich, innerhalb jeder vorgeschriebenen Gränze erhalten werden. Einem gröfsten positiven Werthe aber entspricht ein gleicher negativer, weil das Produkt in die Form

$$x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\ldots\ldots=Q$$

übergeht, wenn man die in der zuerst angenommenen vom Faktor x beiderseits gleich abstehenden mit einander multiplizirt. Diese Form aber zeigt, dafs das Produkt für $x=+\xi$ und $x=-\xi$ gleiche, aber entgegengesetzte Werthe erhält, also auch, wenn es für ξ ein positives Gröfstes, mithin für $x=\xi\pm o$ abnimmt, es auch für $x=-(\xi\pm o)$ eben so viel negativ abnehmen werde. Auch ersieht man leicht, dafs das Produkt nur positive Werthe haben könne für Werthe von x zwischen 2m und 2m+1, nur negative, wenn x gröfser als 2m+1 und kleiner als 2m+2 ist, m als positive ganze Zahl genommen.

Man kann dem Produkte Q noch die Form

$$\frac{\ldots(n-x)(n-1-x)\ldots(1-x)\,x\,(1+x)\ldots(n-1+x)(n+x)\ldots}{\ldots\;n\;.\;n-1\;.\;\ldots\;1\;.\;1\;.\;1\;.\;\ldots\;n-1\;.\;n\;.\;\ldots}$$

geben, und Eigenschaften welche in dieser sich finden, kommen dem Produkte überhaupt zu.

Setzt man in derselben $x+\mu$ statt x, so hat man im Sinne, in welchem das Produkt zu verstehen ist, für den Zähler, aufser dem Faktor $x+\mu$ statt x, alle Faktoren der Form $x+\mu+m$ und $m-(x+\mu)$, in welchen m eine verschiedene ganze positive Zahl ist. Ist nun μ eine ganze positive Zahl, so sind die Faktoren im entstehenden Produkt des Zählers

$$\ldots\big(n-(\mu+x)\big)\big(n-1-(\mu+x)\big)\ldots\big(1-(\mu+x)\big)(\mu+x)(1+\mu+x)\ldots(n-1+\mu+x)(n+\mu+x)\ldots$$

oder

$$\ldots(n-\mu-x)(n-1-\mu-x)\ldots(-x)\times-(1+x)\times-(2+x)\ldots\times-(\mu-1+x)(\mu+x)(1+\mu+x)\ldots$$

einerlei mit denen der ursprünglichen Form, nur sind die μ Faktoren x, $1+x$ ... bis $\mu-1+x$ alle negativ, mithin ihr Produkt negativ, wenn μ ungrade, positiv, wenn μ eine grade Zahl ist. Da nun der Nenner das un-

wandelbare Produkt $1.1^2.2^2.3^2....$ bleibt, so wird das Produkt durch die Substitution von $x+\mu$ statt x denselben Werth der Gröſse nach behalten, welches auch der Werth von x seyn mag, nur negativ oder positiv seyn, nachdem μ grade oder ungrade ist.

Wird $x-\mu$ statt x gesetzt, so werden die μ Faktoren $\mu-x$, $\mu-1-x,...$ bis $1-x$ im Resultat negativ, übrigens ſinden sich alle Faktoren der ursprünglichen Form nach der Substitution wieder. Also auch im Falle, wo $x-\mu$ statt x gesetzt wird, bleibt das Produkt unverändert, wenn μ eine ganze Zahl, nur wird es, wenn diese ungrade, einen entgegengesetzten gleichen Werth annehmen.

Hieraus erhellt, in Verbindung mit dem Vorigen, daſs wenn ein positives Maximum für $x=\xi$ statt hat, für $x=\xi\pm 2m$, wenn m irgend eine ganze Zahl, ebenfalls ein gleiches positives Maximum, und für $x=\xi\pm 2m+1$ ein gleiches negatives statt ſinden werde.

Wird unter μ eine ganze positive Zahl verstanden, und $\mu-x$ statt x in das Produkt gesetzt, so werden die Faktoren von x nebst folgenden,

$$\mu-x,\ 1+\mu-x,\ 2+\mu-x,\ 3+\mu-x \text{ u. s. w.};$$

die dem Faktor x vorstehenden, werden

$$1-(\mu-x),\ 2-(\mu-x)\ldots\mu-1-(\mu-x),\ \mu-(\mu-x),\ \mu+1-(\mu-x) \text{ u. s. w.},$$

von welchen die ersten $\mu-1$ gleich sind

$$-(\mu-1-x),\ -(\mu-2-x),\ \ldots\ -(1-x),$$

also entgegengesetzt den gleichen Faktoren im ursprünglichen Produkt.

Die diesen $\mu-1$ Faktoren folgenden, sind gleich x, $1+x$, $2+x$ etc., und sind also in Gröſse und Zeichen, so wie die ersten $\mu-x$, $1+\mu-x$ u. s. w. übereinstimmend mit den Faktoren des ursprünglichen Produkts, die sich also alle nach der Substitution von $\mu-x$ statt x wieder ſinden, nur haben $\mu-1$ von diesen das negative Zeichen. Es wird also der Gröſsenwerth des Produkts derselbe bleiben, wenn $\mu-x$ statt x gesetzt wird, aber entgegengesetzt werden, wenn μ eine grade Zahl oder Null ist.

Also $\mu=1$ genommen, so folgt, daſs das Produkt gleiche Werthe für x und $1-x$ habe. Man setze $x=\frac{1}{2}-y$, so ergiebt sich, daſs das Produkt einen gleichen Werth für $\frac{1}{2}+y$ habe. Eben die Werthe aber hat es nach

dem vorigen für $2\mu + x$, also finden gleiche Werthe statt für $x = 2\mu + \frac{1}{2} - y$ und $x = 2\mu + \frac{1}{2} + y$, welches auch der Werth von y mithin, wie klein auch derselbe seyn mag. Es wird also das Produkt für $x = 2\mu + \frac{1}{2}$ einen gröfsten oder kleinsten Werth haben. Da nun schon bemerkt worden, dafs das Produkt, für x gröfser als 2μ und kleiner als $2\mu + 1$, nur positive Werthe haben kann, so ist der Werth desselben für $x = 2\mu + \frac{1}{2}$ ein positives Maximum oder Minimum, (wenn man nicht bedenken will, dafs diese, da das Produkt nur reelle Faktoren hat, nicht statt finden) mithin der für $x = 2\mu - \frac{1}{2}$ ein gleiches negatives. Der Werth selbst ist nach der zweiten Form des Produkts

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{4.4}\right)\left(1 - \frac{1}{4.9}\right)\left(1 - \frac{1}{4.16}\right)\cdots$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6^2}\right)\left(1 - \frac{1}{8^2}\right)\cdots$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{3.5}{4^2}\cdot\frac{5.7}{6^2}\cdot\frac{7.9}{8^2}\cdots\cdots$$

und näherungsweise, wenn n eine sehr grofse Zahl

$$= \left(\frac{1.3.5.7\ldots(2n-1)}{2.4.6\;8\ldots\ldots 2n}\right)^2\cdot\frac{2n+1}{2}$$

$$= \left(\frac{1.3.5.7\ldots\ldots 2n-1}{1.2.3.4\ldots\ldots n}\right)^2\cdot\frac{2n+1}{4^n.2}$$

Dieser bestimmte Bruch soll, wenn n eine endliche Zahl, mit $\frac{1}{\Pi_n}$, und wenn n unendlich angenommen wird, durch $\frac{1}{\pi}$ bezeichnet werden.

Man substituire $\frac{1}{2} + y$ statt x im Produkt Q, so wird es

$$\frac{\ldots\left(n-\frac{1}{2}-y\right)\ldots\left(\frac{3}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}+y\right)\left(\frac{3}{2}+y\right)\ldots\left(n+\frac{1}{2}+y\right)\ldots}{n \quad \ldots \quad 2 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad n}$$

oder je gröſser n, desto genaüer gleich

$$\frac{1-\frac{4}{1}y^2}{1\cdot 4}\cdot\frac{1-\frac{4}{9}y^2}{\frac{2\cdot 1}{9}\cdot 4}\cdot\frac{1-\frac{4}{25}y^2}{\frac{3\cdot 2}{25}\cdot 4}\cdot\frac{1-\frac{4}{49}y^2}{\frac{4\cdot 3}{49}\cdot 4}\cdots\frac{1-\left(\frac{2}{2n-1}\right)^2y^2}{\frac{n\cdot n-1}{(2n-1)^2}\cdot 4}\cdot\frac{n+\frac{1}{2}+y}{n}$$

Der Nenner ist

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{2\cdot 1}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 2}{5^2}\cdot\frac{4\cdot 3}{7^2}\cdots\frac{n-1\cdot n-2}{(2n-3)^2}\cdot\frac{n\cdot n-1}{(2n-1)^2}\,4^n.$$

Dieser wird

$$\left(\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n-1\cdot n}{1\cdot 3\quad 5\cdot 7\quad 2n-3\cdot 2n-1\cdot}\right)^2\frac{4^n}{n}$$

welches nach dem zuvor gefundenen mit $\frac{1}{\Pi_n}$ bezeichneten Werthe gleich ist

$$\frac{2n+1}{2n}\Pi_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\Pi_n$$

d. h. der Nenner ist π wenn man n unendlich nimmt. Alsdann ist aber auch das letzte Glied des durch die Substitution erhaltenen Produkts, nemlich

$$\frac{n+\frac{1}{2}+y}{n} = 1+\frac{1}{2n}+\frac{y}{n} = 1$$

für jeden endlichen Werth von y; so daſs also die Substitution von $\frac{1}{2}+y$ statt x im Produkte Q, gleich wird

$$\pi\left[\left(1-\frac{4}{1}y^2\right)\left(1-\frac{4}{9}y^2\right)\left(1-\frac{4}{25}y^2\right)\left(1-\frac{4}{49}y^2\right)\ldots\ldots\right]$$

aus unendlich fortgesetzten Faktoren bestehend, in welchen keine ungrade Potenzen von y vorkommen.

Wird y negativ gesetzt, so ändert der Werth dieses Produktes nicht. Dies ist aber eben dasselbe, als wenn man $\frac{1}{2} - y$ statt x im Produkte Q gesetzt hätte, so daſs hier auch, was schon bemerkt worden, hervorgeht, daſs Q für $x = \frac{1}{2} - y$ und $x = \frac{1}{2} + y$ gleiche Werthe habe. Allein es erhellt nunmehr auch, daſs wenn y von o bis $\frac{1}{2}$ zunimmt, das Produkt oder der Werth von Q stets abnehme, weil jeder der Faktoren dann kleiner wird. Mithin ist der Werth von Q für $x = \frac{1}{2}$ einzig ein Gröſster zwischen $x = 0$ und $x = 1$, welcher zufolge des vorigen für x gleich $\frac{1}{2} \pm 2$; $\frac{1}{2} \pm 4$ etc. also nur wieder kömmt, so wie die negativen gröſsten Werthe für x gleich $\frac{1}{2} \pm 1$; $\frac{1}{2} \pm 3$, etc.

Daſs die gröſsten Werthe von Q im gewöhnlichen Sinne Maxima sind, geht daraus hervor, daſs in Q für $x = m + \frac{1}{2} + y$ die erste Potenz von y nicht vorkömmt, die zweite hingegen erscheinen muſs, und nothwendig mit einem negativen Coeffizienten, wovon die bloſse Ansicht der Faktoren des Produkts schon vor der wirklichen Entwickelung desselben überzeugen kann.

Es ist vielleicht gut zu bemerken, daſs ähnlich der Substitution von $\frac{1}{2} + y$ in Q, sich auch die vorherigen von $\mu + x$ statt x behandeln lassen. Denn da das Produkt Q um so näher gleich ist dem

$$\frac{n-x \,.\, n-1-x \ldots 2-x \,.\, 1-x \,.\, x \,.\, 1+x \ldots n+x}{n \,.\; n-1 \ldots 2 \,.\; 1 \,.\; 1 \,.\; 1 \ldots n}$$

je gröſser n, so wird durch Substitution von $\mu + x$ statt x dasselbe übergehen, wenn μ eine ganze Zahl, in

$$(-1)^{\mu} \,.\, \frac{n-\mu-x \,.\, n-\mu-1-x \ldots n-\mu-1+x \,.\, n-\mu+x \ldots n+\mu+x}{n-\mu \,.\; n-\mu-1 \ldots n-\mu-1 \,.\; n-\mu \,.\, (n-\mu+1 \ldots n)^2}$$

also in

$$(-1)^\mu . x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{(n-\mu)^2}\right).\frac{n-\mu+1+x . n+\mu+2+x \ldots n+\mu+1+x . n+\mu+x}{n-\mu+1 \;.\; n-\mu+1 \ldots \quad n \quad . \quad n}$$

Das Produkt der letzteren Faktoren wird

$$\left(1+\frac{x}{n-\mu+1}\right)\left(1+\frac{1+x}{n-\mu+1}\right)\left(1+\frac{1+x}{n-\mu+2}\right)\left(1+\frac{2+x}{n-\mu+2}\right)\left(1+\frac{2+x}{n-\mu+3}\right)\ldots\left(1+\frac{\mu+1+x}{n}\right)\left(1+\frac{\mu+x}{n}\right)$$

Die Anzahl der Faktoren ist 2μ, also endlich, n hingegen ist unbestimmt grofs, also sind die einzelnen der 2μ Faktoren so wenig man will von der Einheit verschieden, und derselbe gleich, wenn n unendlich, daher ist auch ihr Produkt gleich Eins, und das Resultat der Substitution von $\mu + x$ statt x in Q giebt, da nun $n - \mu$ unbegränzt grofs, das von den unendlich vielen Faktoren

$$(-1)^\mu . x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\ldots.$$

welches das ursprüngliche Produkt wieder ist bis auf das blos Zeichen bestimmende $(-1)^\mu$.

Die andern Fälle bedürfen nach diesem keiner besondern Auseinandersetzung. Auch würde man auf ein ähnliches Resultat geführt werden, wenn man $\mu + \frac{1}{2} + y$ auf einmal in Q für x setzen wollte.

Wenn das ursprüngliche Produkt Q mit Q_x bezeichnet wird, und ein durch Substitution von $\mu \pm x$ aus demselben entstehendes durch $Q_{\mu \pm x}$, so ist also nach obigem, wenn μ eine ganze positive oder negative Zahl

$$Q_{x+\mu} = (-1)^\mu Q_x$$

und da $Q_{x+\mu} = Q_{\mu+x}$ seyn mufs, auch x zufolge der Natur des Produkts

$$Q_{-x} = -Q_x$$

so ist

$$Q_{\mu-x} = (-1)^{\mu+1} Q_x$$

Wird in der geschehenen Substitution von $\frac{1}{2} + y$ statt x jenes y mit x ver-

vertauscht, also in Q_x, $\frac{1}{2}+x$ statt x gesetzt, so ist

$$Q_{\frac{1}{2}+x} = \frac{1}{\pi}\left(1-\frac{4}{1}x^2\right)\left(1-\frac{4}{9}x^2\right)\left(1-\frac{4}{25}x^2\right)\ldots.$$

Dies eigenthümliche Produkt mit P_x bezeichnet, giebt die Gleichung

$$Q_{\frac{1}{2}+x} = P_x$$

Setzt man beiderseits wieder $\frac{1}{2}+x$ statt x, so ist klar, daſs das erste Glied Q_{1+x}, und das zweite demselben entsprechen, also $-Q_x$ wird, wodurch also die Gleichung entsteht

$$P_{\frac{1}{2}+x} = -Q_x \text{ also auch } P_{\frac{1}{2}-x} = Q_x$$

Man wird also durch Substitution von $\frac{1}{2}\pm x$ statt x in das Produkt P_x wieder auf das erste ursprüngliche Produkt Q_x mit entgegengesetzten Zeichen für x zurückgeführt werden.

Da $Q_{\mu+\frac{1}{2}+x} = (-1)^\mu\, Q_{\frac{1}{2}+x}$, für μ ganze Zahl, also auch

$Q_{\mu+\frac{1}{2}+x} = (-1)^\mu\, P_x$, so folgt, da auch

$Q_{\mu+\frac{1}{2}+x} = P_{\mu+x}$, daſs

$P_{\mu+x} = (-1)^\mu\, P_x$.

Nun aber wird sichtlich aus der Form des Produkts P_x, dasselbe am gröſsten, wenn $x=0$, also wird es auch am gröſsten, positiv oder negativ, nemlich $\pm\frac{1}{\pi}$, für $x=0+\mu$, d. i. für x gleich jeder ganzen Zahl; also für die Werthe, für welche Q_x Null, ist P_x am gröſsten und umgekehrt.

Man darf also nur das Produkt

$$\pi x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\ldots.$$

zum Grunde legen, welches ebenfalls mit x gleich jeder ganzen Zahl Null, so wird man durch die Substitution von $\frac{1}{2}+x$ statt x, zum Produkte

$$\left(1-\frac{4x^2}{1}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25}\right)\ldots.$$

geführt, welches den Coeffizienten $\frac{1}{\pi}$ nicht hat, dessen positive und negative Maxima also gleich 1 sind. Man hat also in beiden letztern Produkten solche Funktionen, die für x jede Zahl die Grenzen $+1$ und -1 nicht überschreiten.

Geht man unmittelbar von dem Produkte P_x aus, mit Beiseitesetzung des Coeffizienten $\frac{1}{\pi}$ und der x begleitenden Zahl, also von

$$p_x = \left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\left(1-\frac{x^2}{25}\right)\ldots.$$

so ergiebt sich sogleich augenscheinlich, dafs es abnimmt mit Zunahme des Werthes von x zwischen o und ± 1, also für $x=0$ einen gröfsten Werth hat, und aus der Form

$$\frac{\ldots.\ 5-x\,.\,3-x\,.\,1-x\,.\,1+x\,.\,3+x\,.\,5+x\ \ldots.}{\ldots.\quad 5\ .\ 3\ .\ 1\ .\ 1\ .\ 3\ .\ 5\ \ldots.}$$

übersieht man sogleich, dafs es nur Zeichen ändern kann, wenn $\pm 2\mu + x$ statt x gesetzt wird, und μ eine ganze Zahl ist, und dafs

$$p_{\pm 2\mu + x} = (-1)^{\mu}\, p_x$$

ist; also, da p_x für $x=0$ ein positiv gröfstes, es für $x=\pm 4\mu$ ein gleiches, nemlich $+1$, und für $x=\pm 4\mu+2$ ein negativ gröfstes oder -1 seyn werde.

Setzt man in dem Produkte $x+1$ statt x, so geht es über in

$$-x\,.\,\frac{2^2-x^2}{1\cdot 3}\,.\,\frac{4^2-x^2}{3\cdot 5}\,.\,\frac{6^2-x^2}{5\cdot 7}\ldots\frac{2n^2-x^2}{(2n-1)(2n+1)}\,.\,\frac{2n+2+x}{2n+1};$$

also für n unendlich, ins unendliche Produkt

$$-kx\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{6^2}\right)\ldots.$$

$$\text{wo } k = \frac{2^2}{1\cdot 3}\,.\,\frac{4^2}{3\cdot 5}\,.\,\frac{6^2}{5\cdot 7}\,.\,\frac{8^2}{7\cdot 9}\ldots.$$

also die Hälfte des oben schon gefundenen Bruches, reciprok genommen, nemlich: $\frac{\pi}{2}$ ist.

Setzt man aber in diesen 2x statt x, so gehen sie wieder in die zuvor erhaltenen über, welche wir in der Folge mit Q und P als Funktionen von x bezeichnen wollen, und mit Q_x, P_x, wenn es der Unterscheidung wegen nothwendig, wo dann statt x jede einfache oder zusammengesetzte Gröfse geschrieben werden kann. Es wird also:

$$Q = \frac{2x}{1} \cdot \frac{2^2 - 4x^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2 - 4x^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2 - 4x^2}{5 \cdot 7} \cdots$$

$$P = \frac{1 - 4x^2}{1} \cdot \frac{5^2 - 4x^2}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5^2 - 4x^2}{5 \cdot 2} \cdots$$

wo für Q das negative Zeichen ins positive verwandelt worden, weil zuletzt das Q aus einer Ableitung hervorgegangen, wodurch es der ersten ursprünglichen Setzung entgegengesetzt wird. Und in der That gelangt man auch unmittelbar zu dieser Form von Q, wenn man, damit das zuerst angenommene Produkt

$$\frac{\ldots 2-x \,.\, 2-x \,.\, 1-x \,.\, x \,.\, 1+x \,.\, 2+x \,.\, 3+x \ldots}{\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots}$$

zum gröfsten Werth 1 erhalte, es mit dem bestimmten oben gefundenen Produkte

$$\pi = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \ldots}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \ldots}$$

multiplizirt, die einzelnen Faktoren von jenem mit den einzeln von diesem, und dann die Faktoren paarweise vereinigt. In der eben gegebenen Form von Q aber ist es augenfällig, dafs es für $x = \pm \frac{1}{2}$, positiv oder negativ der Einheit gleich werde. Auch ergiebt sich aus derselben unmittelbar die Form

$$Q = \begin{cases} x \cdot 1 - \frac{x^3}{1} \cdot 1 - \frac{x^2}{4} \cdot 1 - \frac{x^2}{9} \cdots \\ \times 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \end{cases}$$

§. 2.

Durch die Multiplikation der Faktoren müssen diese Produkte in die Formen

$$Q = \pi(x - Ax^3 + Bx^5 - Cx^7 + \ldots.$$

$$P = 1 - A_1 2^2 x^2 + B_1 2^4 x^4 - C_1 2^6 x^6 + \ldots.$$

übergehen. Allein die Schwierigkeit ist, die Werthe der Coeffizienten zu finden, welche die Summen unendlicher Reihen sind, deren Glieder aus reciproken Quadratzahlen und den Produkten derselben zu zwei, drei, u. s. f. bestehen. Daſs diese Summen alle bestimmte endliche Werthe haben, ist aus der Natur des Produktes klar, welches für jeden Werth von x nicht nur endlich, sondern auch kleiner als ± 1 seyn muſs; mithin selbst den in unendlichen Reihen nach x entwickelten Formen der Produkte die eigenthümliche Beschaffenheit zukommen muſs, für jeden Werth von x so groſs man will, konvergent zu werden. Es läſst sich aber jener Schwierigkeit ausweichen, indem man allgemein Q und P, wenn in denselben $x + z$ statt x gesetzt wird, ausdrücken kann durch

$$Q_{x+z} = Q_x + Q'_x \cdot z + Q''_x \cdot \frac{z^2}{1.2} + \ldots.$$

$$P_{x+z} = P_x + P'_x \cdot z + P''_x \cdot \frac{z^2}{1.2} + \ldots.$$

und es ist dann nur darum zu thun, die Differenziale von Q_x und P_x, die Q'_x, Q''_x etc., P'_x, P''_x etc. bezeichnen, zu finden, welche wegen der besondern Natur dieser Funktion sich unmittelbar darbieten. Denn da Q_x, P_x Produkte blos reeller Faktoren, so können, wie aus der Theorie der Gleichungen bekannt ist, auch ihre Differenziale nur solche Produkte seyn. Daſs hier die Zahl der Faktoren unendlich, stöhrt den Satz nicht. Denn es muſs das Differenzial gleichmäſsig in seine Faktoren mit der Zahl der Faktoren in Q fortschreiten und stets so viele mehr erhalten, als mehrere in Q in die Differenziation aufgenommen sind, und so nähern sich beide mit einander desto mehr ihrem wahren Werthe, je mehr Faktoren in Betrachtung kommen. Die Faktoren in Q sind bestimmte, die des Differenzials aber veränderlich nach der in der Ordnung betrachteten Anzahl jener. Allein es ist hinlänglich, dieselben für den Fall zu kennen, wo alle Faktoren

von Q, die unendliche Anzahl, betrachtet werden. Dann aber haben die Maxima von Q für x gleich der Hälfte einer jeden ungraden Zahl statt, und für diese Werthe mufs also das Differenzial Null werden, d. i. $x \mp \frac{2n+1}{2}$ oder

$1 - \frac{4x^2}{(2n+1)^2}$ für n gleich jeder ganzen Zahl mufs ausschliefslich ein unbestimmter Faktor des Differenzials seyn. Es ist daher, wenn k einen beständigen Faktor bedeutet,

$$Q' = k \,.\, 1 - \frac{4x^2}{1} \,.\, 1 - \frac{4x^2}{9} \,.\, 1 - \frac{4x^2}{25} \ldots = k - \alpha x^2 + \beta x^4$$

aber es ist auch nach obigem

$$Q = \pi\,(x - Ax^3 + Bx^5 - \ldots)$$

$$\text{also } Q' = \pi - 3\pi A x^2 + 5\pi B x^4 - \ldots$$

$$\text{daher } k = \pi \text{ und } Q' = \pi P.$$

Und da die Maxima von P einzig für die Werthe von x, für welche Q Null wird, statt finden, so folgt auch ähnlicher Weise dem Vorhergehenden

$$P' = kQ = k\pi x - k\pi A x^3 + \ldots$$

$$\text{Es ist aber } P = 1 - A_1 2^2 x^2 + B_1 2^4 x^4 - \ldots$$

$$\text{Also } P' = -8A_1 x + 4B_1 2^4 x^3 - \ldots$$

$$\text{Daher } P' = -\frac{8A_1}{\pi}\,Q$$

$$\text{worin } A_1 = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots$$

Es lassen sich aber auch die Differenziale von Q_x und P_x auf eine von der Betrachtung der Faktoren unabhängige Weise finden. Man nehme die obigen noch unbestimmten durch Differenziale von Q_x, P_x ausgedrückten Formeln für Q_{x+z}, P_{x+z}, multiplizire jene mit Q_x, diese mit P_x, so hat man für die Summe beider Produkte:

$$P_x P_{x+z} + Q_x Q_{x+z} = \ldots\ldots (P_x^2 + Q_x^2) \times$$

$$\left(1 + \frac{P_x P'_x + Q_x Q'_x}{P_x^2 + Q_x^2}\,z + \frac{P_x P''_x + Q_x Q''_x}{P_x^2 + Q_x^2}\,\frac{z^2}{1.2} + \frac{P_x P'''_x + Q_x Q'''_x}{P_x^2 + Q_x^2}\,\frac{z^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

Nachdem nun entweder $z = \mu + \frac{1}{2}$ oder μ oder $\frac{2\mu + 1}{2}$, wird der erste Theil, wenn μ eine ganze Zahl, nach dem allgemeinen Verhalten jener Gröſsen, entweder o oder $\pm (P_x^2 + Q_x^2)$. Also muſs di unendliche Reihe, welche, im andern Theile der Gleichung, $P_x^2 + Q_x^2$ multiplizirt, entsprechend o, $\pm$ 1 werden, welches unmöglich, wenn nicht die Funktionen von x in derselben beständig werden, so daſs die Reihe übergeht in eine von der Gestalt $1 + k_1 z + k_2 \frac{z^2}{1.2} + k_3 \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$, welche allein von z und absoluten Zahlen abhängig, jenen Forderungen entsprechend seyn kann.

Der Coeffizient von z gleich k_1 gesetzt, giebt

$$d\,(P_x^2 + Q_x^2) = 2k_1\,(P_x^2 + Q_x^2)$$

weil nun $P_x^2 + Q_x^2$ stets positiv, so wird, nachdem k positiv oder negativ, das Differenzial dieser Gröſse ebenfalls stets positiv oder negativ seyn, die, auch leicht, wäre es nicht überflüſsig, bestimmbare Funktion $P_x^2 + Q_x^2$ also eine stets zu- oder abnehmende, welches ihrer erkannten Natur widerstreitet, es muſs also $k_1 = 0$, daher $d\,(P_x^2 + Q_x^2) = 0$, also $P_x^2 + Q_x^2$ eine beständige Gröſse, mithin stets den Werth haben, welcher ihr für x eine ganze Zahl zukömmt, daher ist

$$P_x^2 + Q_x^2 = 1$$

Demnach wird für den Coeffizienten von $\frac{z^2}{1.2}$

$$P_x P_x'' + Q_x Q_x'' = k_2$$

Da aber: $P_x P_x' + Q_x Q_x' = 0$, so ist, differenzirt:

$$P_x P_x'' + Q_x Q_x'' + (P_x')^2 + (Q_x')^2 = 0$$

und die vorhergehende hiervon subtrahirt

$$(P_x')^2 + (Q_x')^2 = -k_2$$

also ist, so wie $P_x^2 + Q_x^2$, auch $(P_x')^2 + (Q_x')^2$ eine beständige Gröſse. Da diese ihrer Form nach positiv, so folgt nur, daſs k_2 negativ sey.

Ferner ist für den Coeffizienten von $\frac{z^3}{1.2.3}$,

$$P_x P_x''' + Q_x Q_x''' = k_3$$

Aber das Differenzial des vorhergehenden Coeffizienten von $\frac{z^2}{1.2}$ mit Weglassung des Nenners $P_x^2 + Q_x^2$, als der Einheit gleich, ist, da dieser Coeffizient beständig

$$P_x P_x''' + Q_x Q_x''' + P_x' P_x'' + Q_x' Q_x'' = 0$$

also die vorhergehende Gleichung von dieser subtrahirt

$$P_x' P_x'' + Q_x' Q_x'' = -k_3$$

Allein der erste Theil ist die Hälfte des Differenzials von $P_x'^2 + Q_x'^2$, also Null, mithin ist $k_3 = 0$,

$$\text{Also:} \quad P_x P_x''' + Q_x Q_x''' = 0.$$

Hiervon ist wieder das Differenzial:

$$P_x P_x^{IV} + Q_x Q_x^{IV} + P_x' P_x''' + Q_x' Q_x''' = 0$$

Aber

$$(P_x'')^2 + (Q_x'')^2 + P_x' P_x''' + Q_x' Q_x''' = [(P_x')^2 + (Q_x')^2]'' = 0,$$

vom vorigen subtrahirt, bleibt

$$P_x P_x^{IV} + Q_x Q_x^{IV} = (P_x'')^2 + (Q_x'')^2$$

Das erste Glied aber ist der Coeffizient von $\frac{z^4}{1.2.3.4}$ gleich k_4, muſs also beständig, mithin auch das zweite Glied eine beständige, also

$$(P_x'')^2 + (Q_x'')^2 = k_4$$

seyn.

Man sieht leicht, wie die folgenden Coeffizienten beschaffen sind, allein sie zu verfolgen, ist überflüſsig. Schon aus der Bestimmung der beiden ersten geht das zu Suchende allgemein und ohne Unbestimmtheit hervor. Da nämlich gefunden

$$P_x^2 + Q_x^2 = 1, \text{ und } (P_x')^2 + (Q_x')^2 = c;$$

so folgt aus der ersten differenzirt und mit PQ dividirt.

$$\frac{P_x'}{Q_x} + \frac{Q_x'}{P_x} = 0.$$

Man setze, es sey:

$$\frac{P_x'}{Q_x} = y; \text{ so ist } \frac{Q_x'}{P_x} = -y,$$

wo y, wenn möglich, eine Funktion von x seyn mag. Also ist:

$$(P'_x)^2 + (Q'_x)^2 = (P_x^2 + Q_x)\, y^2 = y^2.$$

Aber die zweite der obigen Gleichung giebt den Werth des ersten Gliedes gleich einer beständigen. Also ist y eine beständige Gröſse. Daher

$$P'_x = k Q_x;\; Q'_x = - k P_x.$$

Es ist aber, wie schon vorgekommen, nach der Form, welche die Entwickelungen der Produkte Q_x, P_x annehmen müssen

$$Q'_x = \pi . P_x,\ \text{also}\ k = - \pi,\ \text{daher}\ P'_x = - \pi Q_x$$

Oben aber ist gezeigt, wie aus $Q'_x = \pi P_x$ folge

$$P'_x = -\frac{8}{\pi}\left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots\right) Q_x$$

Da nun so eben gefolgert worden, $P'_x = - \pi Q_x$; so erhellt aus der Vergleichung, daſs

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Also hat die Summe dieser unendlichen Reihe einerlei Werth mit dem unendlichen Produkte

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}\right)^2.$$

Aus $\frac{dP}{dx} = - \pi Q$ und $\frac{dQ}{dx} = \pi P$ folgt nun, wenn μ eine ganze Zahl,

$$\frac{d^{2\mu} P}{dx^{2\mu}} = (-1)^\mu \pi^{2\mu} P;\; \frac{d^{2\mu+1} P}{dx^{2\mu+1}} = (-1)^{\mu+1} \pi^{2\mu+1} Q.$$

$$\frac{d^{2\mu} Q}{dx^{2\mu}} = (-1)^\mu \pi^{2\mu} Q;\; \frac{d^{2\mu+1} Q}{dx^{2\mu+1}} = (-1)^{\mu} \pi^{2\mu+1} P$$

Daher ist allgemein

$$P_{z+x} = P_z - \pi Q_z . x - \pi^2 P_z \frac{x^2}{1.2} + \pi^3 Q_z \frac{x^3}{1.} + \ldots$$

$$Q_{z+x} = Q_z + \pi P_z x - \pi^2 Q_z \frac{x^2}{1.2} - \pi^3 P_z \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

für

für $z = 0$ wird $P_z = 1$; $Q_z = 0$, also ist

$$P_x = 1 - \frac{\pi^2 x^2}{1.2} + \frac{\pi^4 x^4}{1.2.3.4} - \ldots.$$

$$Q_x = \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{1.2.3} + \frac{\pi^5 x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

woraus leicht, in Verbindung mit den zwei vorhergehenden Gleichungen, erhellt, dafs

$$P_{z+x} = P_z P_x - Q_z Q_x; \; Q_{z+x} = Q_z P_x + P_z Q_x.$$

Setzt man $\frac{x}{\pi}$ statt x in P_x und Q_x, so entstehen die Funktionen $P_{x:\pi}$, $Q_{x:\pi}$, und in den Reihen für jene geht das π weg. Diese Funktionen, welchen die Namen Cosinus x, Sinus x geeignet sind, haben einerlei Eigenschaften mit jenen, da nur die Veränderlichen der einen beständige Vielfache von denen der andern sind.

§. 3.

In Q_x sind also $\frac{\pi^2}{1.2.3}$, $\frac{\pi^4}{1.2.3.4}$ u. s. f. die Summen aller möglichen Produkte aus den Brüchen $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$ …, zu einen, zweien u. s. f. verschiedenen Faktoren. In P_x sind $\frac{\pi^2}{2^2.1.2}$, $\frac{\pi^4}{2^4.1.2.3.4}$ …., die Summen ähnlicher Produkte aus den Brüchen $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{25}$ …, da diese nun bekannt, so lassen sich andere symmetrische Zusammensetzungen dieser Brüche finden. Zu den Summen ihrer Potenzen aber kann man leicht auf folgendem, wie ich glaube, noch nicht bemerkten Wege gelangen.

Man nehme die Differenziale von Q und P in ihren Produktformen, und dividire beiderseits, jenes mit P, dieses mit Q, so wird erhalten:

$$\frac{P'}{P} = -\frac{8}{1}\,\frac{x}{1-\frac{4x^2}{1}} - \frac{8}{3^2}\,\frac{x}{1-\frac{4x^2}{3^2}} - \frac{8}{5^2}\,\frac{x}{1-\frac{4x^2}{5^2}} - \ldots.$$

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{1}{x} - \frac{2}{1}\,\frac{x}{1-\frac{x^2}{1}} - \frac{2}{2^2}\,\frac{x}{1-\frac{x^2}{2^2}} - \frac{2}{3^2}\,\frac{x}{1-\frac{x^2}{3^2}} - \ldots.$$

Entwickelt man die einzelnen Brüche, und setzt die Summen der unendlichen Reihen wie

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \ldots = S_{2n}$$

und Bequemlichkeit halber:

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \ldots = \Sigma_{2n}$$

da, wie bekannt, und leicht zu ersehen, $\Sigma_{2n} = \frac{2^{2n}-1}{2^{2n}} S_{2n}$, so werden:

$$\frac{P'}{P} = -8x\,(\Sigma_2 + 2^2\Sigma_4 . x^2 + 2^4\Sigma_6 . x^4 + 2^6\Sigma_8\, x^6 + \ldots.),$$

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{1}{x} - 2x\,(S_2 + S_4\, x^2 + S_6\, x^4 + S_8\, x^6 + \ldots.).$$

Das Produkt beider Gleichungen ist

$$\begin{aligned}\frac{P'Q'}{PQ} = -8\Sigma_2 - 2^5\Sigma_4 . x^2 - 2^7\Sigma_6 . x^4 - 2^9\Sigma_8 . x^6 - \ldots \\ + 2^4\Sigma_2 S_2 . x^2 + 2^6\Sigma_4 S_2 . x^4 + 2^8\Sigma_6 S_2 . x^6 + \ldots \\ + 2^4\Sigma_2 S_4 . x^4 + 2^6\Sigma_4 S_4 . x^6 + \ldots \\ + 2^4\Sigma_2 S_6 . x^6 + \ldots \\ + \ldots\end{aligned}$$

Es ist aber auch zufolge des Gefundenen $\frac{P'Q'}{PQ} = -\pi^2$,

demnach, beide Werthe mit einander verglichen, so folgt; daſs alle Coeffizienten bei x Null sind.

Daher, wenn man für die Σ ihre Werthe in S, oder umgekehrt, substituirt, erhält man im ersteren Falle folgende Gleichungen:

$$8 . \frac{2^2-1}{2^2} S_2 = \pi^2$$

$$2^5 . \frac{2^4-1}{2^4} S_4 = 2^4 . \frac{2^2-1}{2^2} (S_2)^2$$

$$2^7 . \frac{2^6-1}{2^6} S_6 = \left(2^6 . \frac{2^4-1}{2^4} + 2^4 . \frac{2^2-1}{2^2}\right) S_4 S_2$$

$$2^9 . \frac{2^8-1}{2^8} S_8 = \left(2^8 . \frac{2^6-1}{2^6} + 2^4 . \frac{2^2-1}{2^2}\right) S_6 S_2 + 2^6 . \frac{2^4-1}{2^4} (S_4)^2.$$

. . . .

Aus diesen lassen sich also nach einander die Werthe von S_4, S_6 ... in S_2 oder in π ausdrücken, und man hat dann auch die für Σ_4, Σ_6 .... Es ist aber hinlänglich, in den Gleichungen das Gesetz der Verbindung dieser Gröfsen und ihre Abhängigkeit von π dargelegt zu haben, da die wirkliche Entwickelung zu hier fremdartigen Untersuchungen führt. Im nähern Zusammenhang mit diesem aber steht das Vorkommen dieser Gröfsen in einigen von P und Q abhängigen Funktionen.

Da den Produkten P und Q die Eigenschaft zukömmt, dafs für jeden ihnen gemeinschaftlichen Werth von x,

$$P^2 + Q^2 = 1,$$

so ist

$$P = \sqrt{1-Q} \,.\, \sqrt{1+Q}, \text{ und } Q = \sqrt{1-P} \,.\, \sqrt{1+P}$$

Wenn daher das Produkt P in zwei Produkte zerlegt wird, und das eine nur aus Faktoren besteht, die, gleich 0 gesetzt, Werthe von x geben, die insgesammt $Q = +1$, also $1 - Q = 0$; das andere nur solche Faktoren enthält, die, gleich 0 gesetzt, Werthe von x geben, die insgesammt $Q = -1$, also $1 + Q = 0$ machen: so folgt, dafs das Produkt jener Faktoren für sich gleich $k\sqrt{1-Q}$, dafs von diesen gleich $k'\sqrt{1+Q}$, das Produkt der Beständigen kk' aber gleich 1 seyn müsse.

Nun aber wird $Q = 1$, für $x = 2\mu + \frac{1}{2} = \frac{4\mu+1}{2}$, also

für $x = \ldots \frac{13}{2}, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, \ldots$

Und es wird $Q = -1$ für $x = 2\mu + 1 + \frac{1}{2} = \frac{4\mu+3}{2}$, also

für $x = \ldots \frac{11}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{13}{2}$

Die Faktoren in P der Form $1 - \frac{2x}{4\mu+1}$ und die der Form $1 - \frac{2x}{4\mu+3}$ haben also, wenn für μ alle ganze positive sowohl als negative ganze Zahlen genommen werden, zu Produkten, jene $k\sqrt{(1-Q)}$, diese $k'\sqrt{1+Q}$, so dafs

$$k\sqrt{1-Q} = \left(1-\frac{2x}{1}\right)\left(1+\frac{2x}{3}\right)\left(1-\frac{2x}{5}\right)\left(1+\frac{2x}{7}\right)\left(1-\frac{2x}{9}\right)\ldots$$

$$k'\sqrt{1+Q} = \left(1+\frac{2x}{1}\right)\left(1-\frac{2x}{3}\right)\left(1+\frac{2x}{5}\right)\left(1-\frac{2x}{7}\right)\left(1+\frac{2x}{9}\right)\ldots$$

Allein die Entwickelung von $k\sqrt{1-Q}$ ist offenbar der Form $k - Kx + \ldots$, die von der Entwickelung des Produkts hingegen ist $1 - Ax + \ldots$; also ist $k = 1$, daher auch $k' = 1$.

Dächte man sich aber das $\sqrt{1-Q}$ negativ, so muſs man $k = -1$ setzen, ähnlich ist es für k'. Man kann also das k und k' weglassen oder $= 1$ setzen, und die Quadratwurzeln nur positiv verstehen.

Aehnlich ſindet man die Faktoren von Q, mit welchen $1 - P = 0$ wird, x, und allgemein die der Form $1 - \frac{x}{2\mu}$, in welchen μ jede ganze positive oder negative Zahl, nur nicht 0; die Faktoren von Q, mit welchen $1 + P$ Null wird, aber der Form $1 - \frac{x}{2\mu+1}$, wo μ auch gleich 0 aufzunehmen ist.

Demnach ist

$$\sqrt{1-P} = kx\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{16}\right)\left(1-\frac{x^2}{36}\right)\ldots$$

$$\sqrt{1+P} = k'\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\left(1-\frac{x^2}{25}\right)\ldots$$

Aber $\sqrt{1+P} = \sqrt{(2 - Ax^2 + \ldots)} = \sqrt{2}\,.\,(1 - A^{I}x^2 + \ldots)$

Das Produkt andererseits ist der Form $k'(1 - ax^2 + \ldots)$

Also ist $k' = \sqrt{2}$.

Da nun

$$\sqrt{1-P}\,.\,\sqrt{1+P} = \sqrt{2}\,.\,k\,.\,x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\ldots,$$

das erste Glied aber gleich Q, und da

$$Q = \pi x\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\ldots;\ \text{so ist:}$$

$$\sqrt{2}\,.\,k = \pi,\quad \text{also } k = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Zu diesen Formeln gelangt man aber auch auf folgende Weise. In der schon gegebenen Gleichung

$$P_{x+z} = P_x P_z - Q_x Q_z$$

setze man $\frac{1}{2}x$ statt z und x, so folgt

$$P_x = 1 - 2\,(Q_{x:2})^2 = -1 + 2\,.\,(P_{x:2})^2$$

daher

$$\sqrt{1 - P_x} = \sqrt{2}\,.\,Q_{x:2}; \quad \sqrt{1 + P_x} = \sqrt{2}\,.\,P_{x:2}.$$

Man setze $x + \frac{1}{2}$ statt x, so gehen diese Formeln über in

$$\sqrt{1 + Q_x} = \sqrt{2}\,.\,Q_{\frac{x}{2}+\frac{1}{4}} = \sqrt{2}\,.\left(Q_{x:2}\sqrt{\frac{1}{2}} + P_{x:2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = Q_{x:2} + P_{x:2}$$

$$\sqrt{1 - Q_x} = \sqrt{2}\,.\,P_{\frac{x}{2}+\frac{1}{4}} = \sqrt{2}\,.\left(P_{x:2}\sqrt{\frac{1}{2}} - Q_{x:2}\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = P_{x:2} - Q_{x:2}$$

Aber $Q_{\frac{x}{2}+\frac{1}{4}} = Q_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = P_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}$ also nach obigem auch

$\sqrt{1 + Q_x} = \sqrt{2}\,.\,P_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}$, ähnlich dem $\sqrt{1 - Q_x} = \sqrt{2}\,.\,P_{\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}$

wie es so eben schon angegeben ist.

Da P_z aus Faktoren besteht der Form, $1 - \frac{4z^2}{(2\mu+1)^2}$, so wird ein solcher Faktor, $\frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ anstatt z gesetzt, wenn man jenen in seine beiden zerfällt, übergehen, in

$$\left(1 - \frac{x - \frac{1}{2}}{2\mu+1}\right)\left(1 - \frac{x - \frac{1}{2}}{2\mu+1}\right) = \frac{(4\mu+1)(4\mu+3)}{(4\mu+2)(4\mu+2)}\left(1 + \frac{2x}{4\mu+1}\right)\left(1 - \frac{2x}{4\mu+3}\right)$$

wo μ jede ganze positive Zahl und auch Null.

Setzt man im angeführten Faktor von P_z, $z = \frac{1}{4}$, so wird derselbe

$$= 1 - \frac{1}{4(2\mu+1)^2} = \frac{(4\mu+1)(4\mu+3)}{(4\mu+2)(4\mu+2)}$$

also gleich dem so eben gefundenen Coeffizienten.

Es ist aber $P_{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$, mithin auch das Produkt aller jener Coefficienten gleich $P_{\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Daher sind die Faktoren von $\sqrt{2}\,.\,P_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}$ blos $\left(1+\frac{2x}{4\mu+1}\right)\left(1-\frac{2x}{4\mu+3}\right)$. Eben so finden sich die Faktoren von $\sqrt{2}\,.\,P_{\frac{x}{2}+\frac{1}{4}}$, sie ergeben sich auch aus jenen, wenn man x negativ setzt, aus leicht zu findenden Gründen. Man hat also für $\sqrt{1 \pm Q_x}$ die schon gefundenen Produkte.

Drückt man $\sqrt{2}\,.\,Q_{x:1}$ und $\sqrt{2}\,.\,P_{x:1}$, durch die Produktform aus, so ergeben sich die für die ihnen gleichen Gröſsen $\sqrt{1-P_x}$ und $\sqrt{1+Q_x}$ angeführten unmittelbar.

Das Differenzial der Gleichung

$$\sqrt{1-Q} = \left(1-\frac{2x}{1}\right)\left(1+\frac{2x}{3}\right)\left(1-\frac{2x}{5}\right)\left(1+\frac{2x}{7}\right)\ldots\ldots$$

mit dx und $\sqrt{1-Q}$ dividirt, giebt

$$\frac{d\sqrt{1-Q}}{dx\,.\,\sqrt{1-Q}} = -\frac{\frac{2}{1}}{1-\frac{2}{1}x} + \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}x} - \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}x} + \frac{\frac{2}{7}}{1+\frac{2}{7}x} - \ldots\ldots$$

Die Brüche des zweiten Gliedes der Gleichung in Reihen entwickelt, so wird

$$\begin{aligned}\frac{d\sqrt{1-Q}}{dx\,.\,\sqrt{1-Q}} = & -\frac{2}{1}-\frac{2^2}{1}x-\frac{2^3}{1}x^2-\frac{2^4}{1}x^3 - \\ & +\frac{2}{3}-\frac{2^2}{3^2}x+\frac{2^3}{3^3}x^2-\frac{2^4}{3^4}x^3 + \\ & -\frac{2}{5}-\frac{2^2}{5^2}x-\frac{2^3}{5^3}x^2-\frac{2^4}{5^4}x^3 - \\ & +\frac{2}{7}-\frac{2^2}{7^2}x+\frac{2^3}{7^3}x^2-\frac{2^4}{7^4}x^3 + \\ & - \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\end{aligned}$$

Aber da $\sqrt{1-Q_x} = P_{x:2} - Q_{x:2}$
so ist das erste Glied der Gleichung

$$\frac{d\sqrt{1-Q_x}}{dx.\sqrt{1-Q_x}} = \frac{-\frac{\pi}{2}(Q_{x:2}+P_{x:2})}{P_{x:2}-Q_{x:2}}$$

und da $Q_{x:2} + P_{x:2} = \sqrt{1+Q_x}$;
so folgt:

$$\frac{d\sqrt{1-Q}}{dx.\sqrt{1+Q}} = -\frac{\pi}{2}.\sqrt{\left(\frac{1+Q}{1-Q}\right)} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{1+Q}{P} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{P}{1-Q}$$

auch giebt dem vorletzten Ausdruck die wirkliche Differenziation des voranstehenden Gliedes.

Bezeichnet man die Summen der unendlichen Reihen

$$\frac{2^{2\mu+1}}{1^{2\mu+1}} - \frac{2^{2\mu+1}}{3^{2\mu+1}} + \frac{2^{2\mu+1}}{5^{2\mu+1}} - \frac{2^{2\mu+1}}{7^{2\mu+1}} + \ldots.$$

$$\frac{2^{2\mu}}{1^{2\mu}} + \frac{2^{2\mu}}{3^{2\mu}} + \frac{2^{2\mu}}{5^{2\mu}} + \frac{2^{2\mu}}{7^{2\mu}} + \ldots.$$

jene mit $[2\mu+1]$ diese mit (2μ), so ist also

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1+Q}{P} = [1] + (2)\,x + [3]\,x^2 + (4)\,x^3 + \ldots.$$

Dem Vorhergehenden ähnlich wird erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{d\sqrt{1+Q}}{dx.\sqrt{1+Q}} = & \frac{2}{1} - \frac{2^2}{1}x + \frac{2^3}{1}x^2 - \frac{2^4}{1}x^3 + \ldots. \\ & - \frac{2}{3} - \frac{2^2}{3^2}x - \frac{2^3}{3^3}x^2 - \frac{2^4}{3^4}x^3 - \ldots. \\ & + \frac{2}{5} - \frac{2^2}{5^2}x + \frac{2^3}{5^3}x^2 - \frac{2^4}{5^4}x^3 + \ldots. \\ & - \frac{2}{7} - \frac{2^2}{7^2}x - \frac{2^3}{7^3}x^2 - \frac{2^4}{7^4}x^3 - \ldots. \\ & + \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Aber das erste Glied ist in Folge vorgefundener Gleichungen

$$\frac{d\sqrt{1+Q_x}}{dx.\sqrt{1+Q_x}} = \frac{d\,(P_{x:2}+Q_{x:2})}{dx.(P_{x:2}+Q_{x:2})} = \frac{\frac{\pi}{2}(P_{x:2}-Q_{x:2})}{P_{x:2}+Q_{x:2}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{1-Q_x}{1+Q_x}\right)}$$

Führt man im ersten Gliede die angewiesene Differenziation wirklich aus, so wird unmittelbar

$$\frac{d\sqrt{1+Q}}{dx.\sqrt{1+Q}} = \frac{\pi}{2}\;\frac{P}{1+Q} = \frac{\pi}{2}\;\frac{1-Q}{P}$$

Man hat also:

$$\frac{\pi}{2}.\frac{1-Q}{P} = [1]-(2)x+[3]x^2-(4)x^3+$$

Addirt man zu dieser die vorhergefundene Gleichung

$$\frac{\pi}{2}\;\frac{1+Q}{P} = [1]+(2)x+[3]x^2+(4)x^3+\ldots$$

so wird erhalten

$$\frac{\pi}{2}\;\frac{1}{P} = [1]+[3]x^2+[5]x^4+\ldots$$

Die erste von der zweiten Gleichung subtrahirt, bleibt

$$\frac{\pi}{2}.\frac{Q}{P} = (2)x+(4)x^3+(6)x^5+\ldots$$

Da nach obigem

$$\sqrt{1-P} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{16}\right)\left(1-\frac{x^2}{36}\right)\ldots.$$

$$\sqrt{1+P} = \sqrt{2}\,.\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\left(1-\frac{x^2}{25}\right)\ldots.$$

so wird, nach den Differenziationen mit 2 dividirt, und da

$$\frac{d\sqrt{1-P}}{dx.\sqrt{1-P}} = \frac{\pi}{2}\;\frac{Q}{1-P} = \frac{\pi}{2}\;\frac{(1+P)}{Q}$$

$$\frac{d\sqrt{1+P}}{dx.\sqrt{1+P}} = -\frac{\pi}{2}\;\frac{Q}{1+P} = -\frac{\pi}{2}\;\frac{1-P}{Q}$$

di-

die letzten Werthe statt den ersten gesetzt,

$$\frac{\pi}{4}\,\frac{P+1}{Q} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4^2}x^3 - \frac{1}{4^3}x^5 - \frac{1}{4^4}x^7 - \ldots$$
$$- \frac{1}{16}x - \frac{1}{16^2}x^3 - \frac{1}{16^3}x^5 - \frac{1}{16^4}x^7 - \ldots$$
$$- \frac{1}{36}x - \frac{1}{36^2}x^3 - \frac{1}{36^3}x^5 - \frac{1}{36^4}x^7 - \ldots$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\pi}{4}\,\frac{P-1}{Q} = - \frac{1}{1}x - \frac{1}{1}x^3 - \frac{1}{1}x^5 - \frac{1}{1}x^7 - \ldots$$
$$- \frac{1}{9}x - \frac{1}{9^2}x^3 - \frac{1}{9^3}x^5 - \frac{1}{9^4}x^7 - \ldots$$
$$- \frac{1}{25}x - \frac{1}{25^2}x^3 - \frac{1}{25^3}x^5 - \frac{1}{25^4}x^7 - \ldots$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Beide Gleichungen addirt geben, wenn man die im Anfang dieses Artikels angenommene Bezeichnung wieder gebraucht, auch eine schon dort vorgekommene Gleichung, nemlich:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{P}{Q} = \frac{1}{2x} - S_2 \cdot x - S_4\,x^3 - S_6\,x^5 - \ldots$$

Subtrahirt man die zweite Gleichung von der ersten, so bleibt

$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{Q} = \frac{1}{2x} - \frac{S_2}{2^2}x - \frac{S_4}{2^4}x^3 - \frac{S_6}{2^6}x^5 - \ldots\\ + \Sigma_2 x + \Sigma_4 x^3 + \Sigma_6 x^5 + \ldots\end{aligned}\right\}$$

Oder in Folge der Gleichung zwischen S_{2n} und Σ_{2n},

$$\frac{\pi}{Q} = \frac{1}{x} + \frac{2-1}{1}S_2 \cdot x + \frac{2^3-1}{2^2}S_4 \cdot x^3 + \frac{2^5-1}{2^4}S_6 \cdot x^5 +$$

Man sieht aus diesen Formeln, daſs die reciproken Funktionen $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{Q}$ und auch dann noch, wenn sie im Zähler mit Q, P oder $1 \mp Q$, $1 \mp P$ multiplizirt werden, eben so einfache Entwickelungen haben als die Funktionen

P und Q selbst, nur sind die als Cosinus und Sinus den letztern analogen gewöhnlicher, auch in den Elementen, unterdessen die jenen verwandten zerstreut und nach den Umständen verschieden, nicht ohne Weitläuftigkeit hergeleitet sich finden. Ich habe deswegen geglaubt, sie in der Kürze, mit welcher sie hier gefunden werden, insgesammt darzustellen, sey nicht unnütz. Ueberdem wird dadurch die Theorie der Funktionen P, Q, vervollständiget und die der Summen reciproker Potenzen ganzer Zahlen in engsten Zusammenhang gebracht und aus den ersten Gründen erkannt.

Wie die Coeffizienten von Q in der Entwickelung des Produkts aus den Verbindungen ungleicher Faktoren der reciproken Quadratzahlen zusammengesetzt sind, so bestehen sie für $\frac{P}{Q}$ aus den Verbindungen gleicher, und ein ähnliches Verhalten findet bei den andern aufgeführten Formen statt. Dafs die Summen solcher Verbindungen zu π^{2n} in einem rationalen Verhältnifs stehen, erhellt aus dem vorigen, und ist aus dem Anfange dieses Artikels für S_{2n}, Σ_{2n} klar. Den dort gegebenen Gleichungen zufolge lassen sich also auch die Coeffizienten von $\frac{\pi P}{2Q}$ geben, die man aber auch bekanntermafsen durch wirkliche Division beider Produkte in Reihen ausgedrückt erhält.

Die Summen ungrader Potenzen mit abwechselnden Zeichen sind in der gegebenen Formel für $\frac{\pi}{2}\frac{1}{P}$ vorhanden. Wird also der Bruch

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{1-\frac{\pi^2x^2}{1.2}+\frac{\pi^4x^4}{1\ldots4}-}$$ entwickelt, und ist das Resultat

$$\frac{\pi}{2}+A\pi^3x^2+B\pi^5x^4+C\pi^7x^6+\ldots,$$

so hat man, mit jenem verglichen:

$$\frac{\pi}{2}=[1],\quad A\pi^3=[3],\quad B\pi^5=[5],\ \text{etc.}$$

Also

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

$$\frac{A\pi^3}{2^3} = \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots$$

$$\frac{B\pi^5}{2^5} = \frac{1}{1^5} - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \ldots$$

. . . .

Bei der absoluten Bestimmung der Zahlen A, B, etc. zu verweilen, ist hier nicht der Ort.

§. 4.

Wenn man im allgemeinen eine Funktion fx von x sich denkt, welche für jedes x einen reellen Werth, aber innerhalb den Gränzen $+1$ und -1 haben soll, so ist sogleich klar, daſs es neben derselben von ihr verschiedene geben müsse. Nicht allein alle positive Potenzen derselben $(fx)^\mu$, wenn $\mu > 1$; sondern da $(fx)^{2n}$ stets positiv und kleiner als 1, für n eine ganze positive Zahl, so folgt, daſs auch $1-(fx)^{2n}$ so beschaffen sey, und $\sqrt{1-(fx)^{2n}}$ wiederum wie fx sich verhalten werde, ohne mit dieser in der Form identisch seyn zu können. Nimmt man $n=1$ und setzt $\sqrt{1-(fx)^2} = \varphi x$, so geben diese die einfache symmetrische Gleichung $(\varphi x)^2 + (fx)^2 = 1$, und es ist daher kein Grund, die eine Form fx oder φx als die ursprüngliche anzusehen; hingegen wird man die, wo n eine von der Einheit verschiedene Zahl, als aus beiden abgeleitete betrachten können.

Setzt man, fx werde nur für einen Werth von x Null, für einen andern $+1$, und für einen dritten -1, so folgt, fx habe nur einen reellen Faktor. Es sey dieser $x-a$, also

$$fx = (x-a)\, f_{,}x.$$

In Folge der Annahme darf $f_{,}x$ keine reelle Faktoren enthalten, und muſs eine stets positive Funktion bleiben, daher nur aus quadratischen unzerlegbaren Faktoren bestehen, und es wird, da fx, also auch $f_{,}x$, nicht jede Gröſse erreichen darf,

$$fx = \frac{x-a}{(b^2 + 2bx.i + x^2)\, f_{,,}x}$$

seyn müssen, wo $f_{\prime\prime}x$ nicht Null und nicht unendlich werden darf, also entweder beständig oder wiederum einen unzerlegbar quadratischen Faktor enthalten muſs. In jenem Falle hat fx ein positives und negatives Maximum, und nähert sich dann asymptotisch Null, auch wenn F_2, F_3 solche Faktoren bedeuten, und $f_{\prime\prime}x$ der Form $f_{\prime\prime\prime}x \,.\, F_3 : F_2$, wo $f_{\prime\prime\prime}x$ sich wie zuvor $f_{\prime\prime}x$ wieder verhält; so daſs man, wenn F_1 den ersten quadratischen Faktor bezeichnet, setzen kann

$$fx = x - a \,.\, \frac{1 \,.\, F_3 \,.\, F_4 \ldots F_{2n+1}}{F_1 \,.\, F_2 \,.\, F_4 \ldots F_{2n} \,.\, f_{2n+1}x}$$

von welchen Faktoren im Zähler weniger als im Nenner vorhanden seyn können, aber wenn $f_{2n+1}x$ als beständig angenommen wird, ein Faktor mehr im Nenner als im Zähler zum mindesten sich finden muſs.

Ganz ähnliche Formen würden entstehen in der Voraussetzung, daſs fx für zwei, drei, und überhaupt für eine bestimmte Anzahl von Werthen o wäre. Diesen würde man auch eine gewisse Symmetrie geben können, theils durch die reellen Faktoren, wenn man x selbst und neben $x - a$ auch $x + a$ mit $x - b$ auch $x + b$ etc. aufnähme, so wie für einen quadratischen Faktor wie $b^2 + 2bxi + x^2$ zugleich den $b^2 - 2bxi + x^2$, sowohl im Zähler als Nenner, in sofern man einen zuzulassen berechtiget oder genöthiget seyn kann. Unter den verschiedenen gröſsten und kleinsten positiven und negativen Werthen einer solchen Funktion würde einer der gröſste Aller und ein schicklicher beständiger Faktor statt der letzten Funktion $f_{2n+1}x$ angenommen, beide Gröſste auf die Einheit bringen können. Indessen liegt in diesen Formen das Gesuchte doch gewissermaſsen verborgen. Die quadratischen Faktoren nemlich verlangen zum Coeffizienten bei $2x$ eine Gröſse i die kleiner als eins ist. Es würden also in solchen Formen einige als Bestimmte anzunehmen seyn. Sie lassen sich aber auch insgesammt wegbringen, denn nichts hindert, sie Null zu setzen, wodurch denn auch die wegen der Symmetrie vorerwähnte Duplizität überflüssig wird. Um die Form, welche der höchsten Einfachheit fähig ist, etwas zu erörtern, setze man in

$$fx = \frac{x - a}{(b^2 + 2bxi + x^2) f_{\prime\prime}x}$$

$a = 0$, $i = 0$, $b = 1$, $f_{\prime\prime}x = \frac{1}{2}$, welches insgesammt in Folge des Bemerkten zuläſsig; so wird:

$$fx = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Deren Differenzial gleich Null gesetzt, giebt also für den gröfsten positiven und negativen Werth $x = +1$ und $x = -1$, welche der Funktion fx die gröfsten Werthe selbst $+1$ und -1 geben, die also auch der Funktion

$$\sqrt{(1-(fx)^2)} = \sqrt{\left(\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}\right)} = \pm \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

zukommen müssen, und sich wie natürlich beide mit den Werthen 0 und $\pm\infty$ für x ergeben, hingegen für $x = \pm 1$ wird diese Funktion Null.

Man kann das zweifache Zeichen nicht aufser Acht lassen, wenn man die eine dieser Funktionen als eine aus der andern abgeleitete betrachtet. Denn ginge man vom Werthe für $\sqrt{(1-(fx)^2)}$ blos mit dem positiven Zeichen aus, so erhielte man für fx den Ausdruck $\sqrt{\frac{4x^2}{(x^2+1)^2}}$, also erschiene das doppelte Zeichen hier. Damit beide Funktionen dieselbe algebraische Charakteristik haben, darf man sie nur als zwei neben einander bestehende, nicht als wechselseitig abgeleitete betrachten, also setzen:

$$fx = \frac{2x}{1+x^2};\quad \varphi x = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

wo zwischen beiden nur die Beziehungsgleichung

$$(fx)^2 + (\varphi x)^2 = 1$$

statt findet, der positive oder negative Werth der einen oder der andern aber nur aus der ihr bestimmt gehörigen Form und dem Werthe von x zu beurtheilen ist.

Die Differenziale dieser Funktionen geben

$$\varphi' x = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2fx}{1+x^2}$$

$$f'x = 2\,\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2\varphi x}{1+x^2}$$

$$\varphi'' x = -4\,\frac{1-x^2}{(1+x^2)^3} = -2\,\frac{\varphi x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''x = \frac{-12x+4x^3}{(1+x^2)^3} = -4\,\frac{fx}{(1+x^2)^2} - 2\,\frac{\varphi x . fx}{1+x^2}$$

Man ersieht aus letztern, daſs $\varphi' x$ ein gröſstes wird für $x = \pm 1$, $f' x$ aber für $x = 0$, und $x = \pm \sqrt{3}$. Die gröſsten Werthe von $\varphi' x$ sind also ± 1; Null wird es mit x, und mit $x = \pm \infty$. Es ist also $\varphi' x$ wiederum eine ihren Werthen nach innerhalb den Gränzen $+1$ und -1 bleibende Funktion. Die $f' x$ hingegen hat als gröſsten Werth 2, und 1 zweimal. Diese Funktion tritt also, wenn man ihr nicht zum eignen Coeffizienten $\frac{1}{2}$ giebt, schon aus der Reihe derjenigen, welche hier berücksichtiget werden.

Das Verhalten ähnlicher Funktionen läſst sich im Allgemeinen betrachten, ohne bei besondern zusammengesetzteren Fällen zu verweilen. Denn bedeutet fx eine solche, so hat sie, wie bemerkt, eine zugeordnete φx, so daſs

$$(fx)^2 + (\varphi x)^2 = 1$$

Das Differenzial dieser giebt die Gleichung

$$\frac{\varphi' x}{f' x} = - \frac{fx}{\varphi x}$$

aus welcher nichts weiter gefolgert werden kann, als

$$\varphi' x = - \xi . fx; \quad f' x = \xi . \varphi x$$

so daſs ξ eine willkührlich zu bestimmende Funktion bleibt, deren Bestimmung aber die der Funktionen fx und φx nach sich zieht.

Man setze, y sey eine Funktion von x, so daſs $\frac{dy}{dx} = \xi$, oder es sey

$$y = \int \xi dx$$

und in y die willkührliche Constante vorhanden, die sich in ξ nicht findet, so ist:

$$\frac{\varphi' x}{\xi} = \frac{d.\varphi x}{dy} = - fx; \quad \frac{f' x}{\xi} = \frac{d.fx}{dy} = \varphi x$$

und alle höhere Differenzial-Coeffizienten nach der Funktion y, von φx und fx genommen, also dy als beständig betrachtet, sind bestimmt, nemlich $\pm \varphi x$ oder $\pm fx$.

Setzt man also:

$$\varphi x = A + B \frac{y - a}{1} + C \frac{(y - a)^2}{1.2} + D \frac{(y - a)^3}{1.2.3} + \ldots$$

und differenzirt diese Gleichung, dividirt im zweiten Gliede mit dy und im ersten mit der dy gleichen Funktion ξdx; so werden, indem man dies Verfahren wiederholt, die ersten Glieder abwechselnd $\mp fx$ und $\mp \varphi x$, und die Gröfsen A, B, C .... als von y und mithin von x unabhängige nach der ersten, zweiten, dritten etc. Differenziation wegfallen, in jeder Gleichung aber eine derselben, die den Anfang der Reihe macht, allein stehen ohne $y - a$.

Nimmt man nun an, a sey der Werth von y für $x = \alpha$, und setzt diesen Werth von x in der Gleichung, so werden die $y - \alpha$ enthaltenden Glieder Null, und die Gleichung selbst nebst denen aus ihr durch fortgesetzte Differenziation abgeleiteten gehen über in folgende:

$$\varphi\alpha = A, \; -f\alpha = B; \; -\varphi\alpha = C; \; f\alpha = D; \; \varphi\alpha = E \text{ etc.}$$

wodurch die Werthe der Coeffizienten also bestimmte sind. Trennt man daher diejenigen, welche gleich $\varphi\alpha$, von denen deren Werth $f\alpha$, so erhält man φx in folgender Gestalt:

$$\varphi x = \varphi\alpha\left(-\frac{(y-a)^2}{1.2} + \frac{(y-a)^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) - f\alpha\left(\frac{y-a}{1} - \frac{(y-a)^3}{1.2.3} + \frac{(y-a)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

Ganz ähnlicher Weise wird erhalten:

$$fx = f\alpha\left(1 - \frac{(y-a)^2}{1.2} + \frac{(y-a)^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) + \varphi\alpha\left(\frac{y-a}{1} - \frac{(y-a)^3}{1.2.3} + \frac{(y-a)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

Dieses sind also die allgemeinen Formen zweier Funktionen von x, so beschaffen, dafs die Summe ihrer Quadrate beständig und gleich Eins ist. Für y ist die angenommene oder aus ξ abgeleitete Funktion von x zu setzen. α und $f\alpha$ oder $\varphi\alpha$ sind willkührlich. Eine von diesen kann daher als eine Beständige c angenommen werden, dann aber mufs, weil doch $f\alpha$, $\varphi\alpha$ Werthe der Funktionen fx, φx für $x = a$ seyn sollen, auch $f\alpha^2 + \varphi\alpha^2 = 1$ seyn. Daher $\varphi\alpha = c$ gesetzt, so folgt: $f\alpha = \sqrt{1 - c^2}$.

Hierdurch wird nun die Willkührliche c in Gröfse zwischen -1 und $+1$ beschränkt, widrigenfalls die Funktionen fx, φx unmöglich, auch die Idee, von welcher ausgegangen, solche zu suchen, deren Werthe stets innerhalb jenen Grenzen bleiben, aufgehoben würde.

Nichts hindert, da y eine willkührliche Beständige enthält, $y - a$ zusammen zu ziehen und dieses y zu nennen, welches dann mit $x = \alpha$ Null wird, und man hat

$$\varphi x = c\left(1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) - \sqrt{1-c^2}\left(y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

$$fx = \sqrt{1-c^2}\left(1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots\right) + c\left(y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right)$$

wo man das Radikal zwar beliebig positiv oder negativ, aber in beiden Formeln doch mit einerlei Zeichen gebrauchen muſs, indem $\sqrt{1-c^2}$ dieselbe Funktion $f\alpha$ in beiden vertritt. Die beiden Formeln sind also als zwei Paare zu betrachten, von welchen ein jedes der Bedingung der Aufgabe genügt.

Man schreibe Kürze halber jene Gleichungen so:

$$\varphi x = c \cdot p_y - c' \cdot q_y; \quad fx = c' \cdot p_y + c \cdot q_y$$

die Vergleichung dieser mit jenen erklärt die Bedeutung der Bezeichnung durch die Stellvertretung; c, c′ können positiv oder negativ seyn. Die Werthe von φx und fx quadrirt und addirt geben 1, daher

$$(c^2 + c'^2)\,(p_y)^2 + (c'^2 + c^2)\,(q_y)^2 = 1$$

Also, da $c^2 + c'^2 = 1$, ist auch

$$(p_y)^2 + (q_y)^2 = 1,$$

welches freilich auch schon daraus erhellt, daſs, da c willkührlich dasselbe auch gleich 1 genommen werden darf, wodurch denn $c' = 0$ und

$$\varphi x = p_y; \quad fx = q_y$$

also p_y, q_y eben als solche Funktionen sich erweisen, von welchen die Summe der Quadrante Eins ist, die also jede für sich die Grenzen -1 und $+1$ nicht überschreitet.

Ob die Funktionen φx, fx diese Gränzen erreichen können, hängt von der Natur des y als Funktion von x ab. Denn obwohl dem x jeglicher Werth beigelegt werden darf, so wird doch y beschränkt seyn, wenn die Gleichung $y = \pm b$ keine mögliche Wurzeln hat. Um den Umfang der Werthe zu kennen, deren y fähig ist, hat man nur die Gleichung $\xi = 0$ aufzulösen, die, da ξ das Differenzial von y, die Werthe giebt, für welche diese Funktion am gröſsten und kleinsten wird. Die zu den gröſsten und kleinsten Werthen der Funktionen φx, fx selbst gehörigen zu erhalten, hat man deren Differenziale gleich Null zu setzen. Diese sind, da aus den Werthen von p_y und q_y hervorgeht, daſs

$$\frac{dp_y}{dx} = -q_y \cdot \xi; \quad \frac{dq_y}{dx} = p_y \cdot \xi$$

$\varphi' x$ ==

$$\varphi' x = -(c q_y + c' p_y)\xi; \quad f' x = (-c' q_y + c p_y)\xi,$$

gleich o gesetzt, geben sie die Gleichungen:

$$c q_y + c' p_y = 0; \quad -c' q_y + c p_y = 0$$

indem die Gleichung $\xi = 0$ sich, wie bemerkt, nur auf die Maxima und Minima von y bezieht, also den hier zu suchenden fremd ist.

Diese Gleichungen geben, für p_y gesetzt $\sqrt{1 - q_y^2}$ oder umgekehrt, die erste:

$$q_y = \sqrt{c'^2} \text{ oder } p_y = \sqrt{c^2};$$

die andere:

$$p_y = \sqrt{c'^2} \text{ oder } q_y = \sqrt{c^2}.$$

Für die zusammengehörigen Werthe von q_y, p_y fordern jene Gleichungen, die erste, daſs das Radikal der einen mit dem entgegengesetzten Zeichen des andern, die andere, daſs sie beide mit gleichen Zeichen genommen werden. Man hat also, wenn man diese Werthe von q_y, p_y in φx, fx substituirt

$$\varphi x = \pm 1 \text{ und } fx = 0$$

$$\text{und } fx = \pm 1 \text{ und } \varphi x = 0$$

wie es der Natur der Sache gemäſs ist.

Um die Werthe von y zu haben, welche gegebenen Werthen von q_y oder p_y entsprechen, wird man nun dahin geleitet, diese Funktionen besonders, als blos von y abhängig, zu betrachten, wobei denn unterdessen von einer Abhängigkeit des y von einer andern Gröſse, welche die von y beschränken könnte, gänzlich abstrahirt wird.

Es ist aber aus dem vorigen schon klar, daſs diese Funktionen von y im Sinne der Behandlung solcher Paare, von welchen überhaupt die Summe der Quadrate gleich Eins ist, zu den einfacheren gehören, da schon angemerkt worden, daſs ihre Differenziale nach y

$$\frac{dp_y}{dy} = q_y; \quad \frac{dq_y}{dy} = p_y$$

sind. Es ist also auch

$$dy = -\frac{dp_y}{\sqrt{1 - p_y^2}} = \frac{dq_y}{\sqrt{1 - q_y^2}}$$

beide führen nach der Entwickelung von $(1 - p_y^2)^{-\frac{1}{2}}$ oder $(1 - q_y^2)^{-\frac{1}{2}}$ und beiderseitiger Integration zu ähnlichen Reihen, und es ist, wenn man den letztern Ausdruck gebraucht:

$$y = q_y + \frac{1}{2}\frac{q_y^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{q_y^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{q_y^7}{7} + \ldots.$$

Setzt man, was auch wirklich statt hat, dafs q_y mit y Null wird, so ist die Beständige 0, und man hat den Werth von y, für welchen q_y gleich einer bestimmten Gröfse, wenn man diese im zweiten Gliede der Gleichung setzt. Der Werth, welchen y für q_y gleich ± 1 erhält, werde durch $\pm\gamma$ bezeichnet. Da dann $q_{\pm\gamma} = \pm 1$, so ist $p_{\pm\gamma} = 0$.

Aber $p_{y \pm z}$, $q_{y \pm z}$ nach dem Binomialsatz entwickelt, geben, wenn man die Reihen-Ausdrücke, welche p_y, q_y bezeichnen, mit in Erwägung zieht

$$p_{y \pm z} = p_y p_z \mp q_y q_z; \quad q_{y \pm z} = q_y p_z \pm p_y q_z$$

Also $y = z = \gamma$ gesetzt, giebt $p_{2\gamma} = -1$; $q_{2\gamma} = 0$;

$y = 2\gamma$, $z = \gamma$ gesetzt, so folgt $p_{3\gamma} = 0$; $q_{3\gamma} = -1$;

ferner für $y = 3\gamma$, $z = \gamma$ folgt $p_{4\gamma} = +1$; $q_{4\gamma} = 0$.

Oder überhaupt, nachdem $p_{n\gamma} = \pm 1$ also $q_{n\gamma} = 0$,

ist $p_{(n+1)\gamma} = 0$, und $q_{(n+1)\gamma} = \pm 1$

$p_{(n+2)\gamma} = \mp 1$, und $q_{(n+2)\gamma} = 0$

$p_{(n+3)\gamma} = 0$, und $q_{(n+3)\gamma} = \mp 1$

Da nun $p_{2\gamma} = -1$, $q_\gamma = +1$, so folgt, wenn n eine ganze positive Zahl

$$p_{4n\gamma} = +1; \; p_{(4n \pm 1)\gamma} = 0; \; p_{(4n \pm 2)\gamma} = -1$$

$$q_{2n\gamma} = 0; \; q_{(4n+1)\gamma} = +1; \; q_{(4n-1)\gamma} = -1.$$

Ueberdem erhellt aus dem vorigen und der blofsen Ansicht der Reihen die p_y, q_y ausdrücken, dafs jenes für gleiche entgegengesetzte Werthe von y einerlei Werthe, dieses gleiche, aber entgegengesetzte erhält.

Nun ist ersehen worden, dafs $q_y = 1$ wenn $y = \gamma$, und aus der all-

gemeinen Formel, welche diesen besondern Werth von y gegeben, erhellt es, daſs für jeden positiven kleinern Werth als 1 für q_y angenommen, die Summe der ganzen Reihe, also y stets kleiner wird, je kleiner q_y, bis q_y und mit demselben y Null wird. Also wird umgekehrt q_y von $y = 0$ an nicht eher gleich Eins, als bis $y = \gamma$ wird, so daſs γ der kleinste positive, auch $-\gamma$ ähnlich der kleinste negative Werth von y ist, für welchen q_y gleich 1, oder für $-\gamma$ gleich -1 wird. Daher ist denn auch zwischen $y = 4n\gamma$ und $y = 4n\gamma + \gamma$ kein Werth von y, für welchen $q_y = 1$. Da nun die Werthe von p_y stets Null sind für $q_y = \pm 1$, das ist, nach obigem, für $y = (2n + 1)\gamma$, so sind sie auch nie anders Null. Da nun ferner gleichermaſsen p_y nie anders ± 1 als für $y = 2n\gamma$, so ist nur für diese Werthe $q_y = 0$.

Die Vielheit der Werthe von y für $q_y = 1$ ist erst, nachdem einer gefunden, entwickelt worden, dies hätte jedoch geschehen können, bevor das γ bekannt war, da es sicher einen solchen Werth giebt, und dieser die übrigen zur Folge hat, da y eine unbeschränkte Gröſse ist. Man hat gesagt, es sey sonderbar, daſs zu einem gegebenen Sinus nur der kleinste entsprechende Bogen durch die Formel gefunden werde, allein es verhält sich anders. Denn da man das Integral der Formel $dy = dq_y (1 - q_y^2)^{-\frac{1}{2}}$ genau genommen setzen muſs

$$y = C + q_y + \frac{1}{2}\frac{q_y^3}{3} + \dots$$

so ist man nicht genöthiget anzunehmen, q_y werde mit y Null, sondern es ist nur erlaubt, und man kann eben sowohl setzen für $q_y = 0$ werde $y = N$, also hat man $N = C$, und dann findet man für $q_y = 1$, $y = N + \gamma$, unter N nemlich einen von den Bogen verstanden, von welchen an q_y mit y positiv wächst. Mit dieser beiläufigen Andeutung ist das Miſsverständniſs hinlänglich beseitiget.

Es erhellt nach obigem, daſs für jeden Werth von y

$$q_{y \pm 2\gamma} = -q_y; \; p_{y \pm 2\gamma} = -p_y$$

daher, weil q_y für entgegengesetzte Werthe von y gleiche entgegengesetzte, p_y in dem Falle einerlei Werthe hat, so ist

$$q_{\mp 2\gamma - y} = q_y;\ p_{\mp 2\gamma - y} = -p_y$$

also allgemein, wenn n eine ganze positive oder negative Zahl

$$q_y = q_{4n\gamma + y} = q_{(4n+2)\gamma - y}$$
$$p_y = p_{4n\gamma + y} = p_{4n\gamma - y}$$

Gleiche Werthe dieser Funktionen p_y, q_y wiederholen sich also ins unendliche in bestimmten gleichen Intervallen für y, wodurch dieselben sich den anfänglich betrachteten Produkten analog bewähren, mit welchen sie auch in der Form der Faktoren übereinkommen.

Denn da q_y Null wird mit $y = \pm 2n\gamma$, p_y mit $y = \pm(2n+1)\gamma$, für n gleich jeder positiven ganzen Zahl; so ist $k(y \mp 2n\gamma)^e$ ein Faktor jener $k'(y \mp (2n+1)\gamma)^e$ ein Faktor dieser Funktion. Es kömmt nur darauf an, den Exponenten e zu bestimmen. Man kann denselben für beide Zeichen sowohl als für beide Funktionen verschieden halten. Allein wenn e gröſser als $+1$, so wird das Differenzial $\frac{dq_y}{dy}$ als Faktor $(y \mp 2n\gamma)^{e-1}$ enthalten, mithin, da $e - 1$ positiv, wird für $y = \pm 2n\gamma$, das $\frac{dq_y}{dy} = 0$. Aber $\frac{dq^y}{dy}$ ist p_y, und dieses kann für $y = \pm 2n\gamma$ nicht 0 werden, also kann e nicht gröſser als 1 seyn.

Nimmt man an, e sey kleiner als 1, so hat der im Differenzial vorkommende Faktor $(y \mp 2n\gamma)^{e-1}$ einen negativen Exponenten $e - 1$ und $y = \pm 2n\gamma$ macht das Differenzial, also auch p_y unendlich, da in einem der Glieder von jenem auſser dem auf die Potenz $e - 1$ erhobenen Faktor $y \mp 2n\gamma$ derselbe nicht weiter vorkömmt. Ist e negativ, so gilt dasselbe. Da nun p_y nicht unendlich werden kann, so kann auch $e - 1$ nicht negativ, und wie gezeigt, auch nicht positiv seyn, also ist $e - 1 = 0$ oder $e = 1$.

Es hat also q_y, nebst y, die einfachen Faktoren $y - 2n\gamma$ und $y + 2n\gamma$ für n jede positive ganze Zahl, oder die in jene zerlegbaren der Form

$1 - \left(\frac{y}{2n\gamma}\right)^2$. Andere reelle einfache Faktoren hat es nicht, weil q_y für keine andere Werthe Null wird, als die so jene Faktoren Null machen. Aber es hat auch keine unmögliche, da q_y für keinen unmöglichen Werth von y Null werden kann.

Denn man setze, es geschehe, wenn möglich, durch $y = \alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, so ist

$$q_y = q_\alpha p_\beta \sqrt{-1} \pm p_\alpha q_\beta \sqrt{-1}$$

und $p_\beta\sqrt{-1}$ und $q_\beta\sqrt{-1}$ durch die Reihen ausgedrückt, so wird

$$q_y = q_\alpha \left(1 + \frac{\beta^2}{1.2} + \frac{\beta^4}{1.2.3.4} + \ldots\right) \pm p_\alpha \left(\beta + \frac{\beta^3}{1.2.3} + \frac{\beta^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right)\sqrt{-1}$$

wo für keinen wirklichen von Null verschiedenen Werth von β das in $\sqrt{-1}$ multiplizirte Glied Null wird. Nur durch $p_\alpha = 0$ könnte es geschehen, dann aber ist $q_\alpha = 1$, und die Reihe, welche q_α multiplizirt, ist gröſser als 1, also q_y nicht Null. Also hat q_y keine quadratische unzerlegbare Faktoren.

Man kennt also alle Faktoren von q_y, und es ist denselben insgesammt nur noch ein allgemeiner beständiger Faktor K zuzuordnen, damit ihr Produkt

$$Ky\left(1 - \left(\frac{y}{2\gamma}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{y}{4\gamma}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{y}{6\gamma}\right)^2\right)\ldots.$$

in der gewählten Form der Faktoren, der Reihe

$$y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

für q_y entspreche, und es erhellt, daſs $K = 1$ anzunehmen sey.

Aehnlicher Weise ergiebt sich

$$p_y = \left(1 - \left(\frac{y}{\gamma}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{y}{3\gamma}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{y}{5\gamma}\right)^2\right)\ldots.$$

Wenn Mathematiker bisher die aus der Anschauung des Kreises gefolgerte Form der Sinusse und Cosinusse als Produkte der einfachen Faktoren, mit welchen sie Null werden, nicht hinlänglich begründet gehalten, so

ergiebt sich aus der angestellten Untersuchung, dafs ein Mehreres erforderlich war, um diesen wichtigen Satz zu erweisen. Des Satzes wegen allein wäre die zuerst angestellte Ableitung der Sinusformen aus denen der Produkte hinlänglich. Allein es ist eine nicht abzuweisende Forderung der Analysis, von jeder Voraussetzung aus zu den Folgerungen zu gelangen, die sie nach sich zieht. Die Aufgabe dieses Artikels, zwei Funktionen zu finden, deren Quadrate zusammengenommen der Einheit gleich, ist auch der Natur, um eine ihr meines Wissens sonst noch nicht besonders gewidmete Untersuchung zu rechtfertigen, wie sie ihren Hauptmomenten nach verfolgt worden, da es nicht der Ort ist, sie hier, so wie es einem Lehrbuche ganz angemessen wäre, vorzutragen. Nachdem die Natur der Funktionen p_y, q_y nun hinlänglich erörtert ist, da ein mehreres als theils in diesem, theils in den vorhergehenden Artikeln dieselben betreffendes vorgekommen, wenns nöthig, als allgemein bekannt, vorauszusetzen ist; so erhellt, dafs die obigen Funktionen φx, fx allgemein in den Formeln

$$\varphi x = p_{i+y}; \quad fx = q_{i+y}$$

enthalten sind, in welchen y eine beliebige Funktion von x, p_i, q_i die Stelle der Beständigen c und $\sqrt{1 - c^2}$ vertreten. Also ist in der gewöhnlicheren Schreibart

$$\varphi x = \cos(i + \psi x); \quad fx = \sin(i + \psi x)$$

worin ψx eine willkührliche Funktion von x, i eine solche Beständige vorstellen, daher auch blos

$$\varphi x = \cos . \psi x; \quad fx = \sin . \psi x$$

gesetzt werden darf.

In Erörterung besonderer Fälle, welche sich ergeben, wenn die Funktion ψx bestimmt angenommen wird, habe ich mich hier nicht einzulassen. Allein die Bemerkung kann ich nicht übergehen, wie sehr die Annahme des Quadranten als Einheit der Analysis entspricht. Denn geht man von den gewöhnlichen Reihen der Sinus und Cosinus aus, so ist es allerdings sehr natürlich, solche Formeln wie $x - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$ als blos von x abhängig, besonders zu benennen und zu bezeichnen, allein dann wird $\frac{\pi}{2}$ der Werth

von x, für welche sie 1 ist, und dieser Werth wird doch in der Anwendung bei Seite gesetzt, und das jener Reihe entsprechende Produkt wird $x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4.\pi^2}\right)\ldots$ seyn. Wird hingegen πx oder $2\gamma x$ statt x gesetzt, und die Reihe $2\gamma x - \frac{(2\gamma x)^3}{1.2.3} + \ldots$ als eine eigenthümliche Funktion von x betrachtet, so wie auch $1 - \frac{(2\gamma x)^2}{1.2} + \ldots$, so sind es solche, welche die eine für x ganze ungrade, die andere für grade Zahlen ± 1 werden, und nun hat x ein für die Anwendung höchst bequemes, aber auch der Analysis, welche dann die Sinusse der Winkel nicht, wies jetzt üblich, der Bogen zum Grunde legte, entsprechendes Maaſs. Diesen Reihen entsprechen die Produkte $2\gamma x\left(1-\frac{x^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2}\right)\ldots\ldots,$

$$\left(1-\frac{x^2}{1}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\left(1-\frac{x^2}{25}\right)\ldots\ldots,$$

und man kann daher die dezimaltrigonometrischen Tafeln als Tafeln der Werthe des letzteren Produkts für jedes gegebene x betrachten, welches Produkt nebst dem zugeordneten, im Anfange dieser Abhandlung auch deswegen nicht unbeachtet gelassen ist. Indessen hat der gewöhnliche analytische Gebrauch für sich, daſs die Sinusse als Funktionen sich auf dieselbe Einheit beziehen, als die veränderliche in derselben, beide also als gleichartige Gröſsen sich gegen einander verhalten.

§. 5.

Nachdem die Gröſsen innerhalb den Zahlen + 1 und — 1 beschränkt, als abhängige oder als Funktionen willkührlich anzunehmender, dem wesentlichsten nach betrachtet worden, bleibt es übrig, sie als für sich bestehende unabhängige anzusehen und in Vergleichung zu ziehen. Hiebei müssen natürlich schon vorgekommene Formen sich von neuem ergeben, es wäre unnütz, dabei zu verweilen, allein grade wegen dem elementaren in der Ableitung sind sie für sich sowohl, als auch wegen des Zusammenhanges mit zunächst folgenden nicht zu übergehen.

Es seyen die Gröſsen w und i jede für sich und abgesehen von ihren Zeichen kleiner als 1, oder vielmehr nicht gröſser als 1; man will i so be-

stimmen, daſs $w + i$ ebenfalls nicht gröſser als 1. Diesem wird entsprochen, wenn i der Gleichung

$$\sqrt{w^2} + \sqrt{i^2} < 1$$

Genüge leistet, welche wegen der in Folge der Radikalzeichen sowohl positiven als negativen zuläſslichen Werthe von w und i die gemachte Bedingung vollständig enthält, wenn die Bezeichnung < 1 nicht gröſser als 1, rücksichtlich der vorherstehenden Gröſse, bedeutet.

Man nehme an

$$i^2 < \left(1 - \sqrt{w^2}\right)^2 \quad \text{oder} \quad i^2 < 1 - 2\sqrt{w^2} + w^2,$$

und setze $\sqrt{w^2} = uv$; so ist, da $(u - v)^2$ oder

$$u^2 - 2uv + v^2 > 0, \text{ auch } 2uv < u^2 + v^2$$

Mithin:

$$1 - 2uv + u^2 v^2 > 1 - (u^2 + v^2) + u^2 v^2$$

der erstere Theil der Ungleichheit aber ist gleich der Gröſse $1 - 2\sqrt{w^2} + w^2$, welche gröſser als i^2 seyn soll, also kann der andere Theil für i^2 genommen werden. Es ist aber derselbe gleich $(1 - u^2)(1 - v^2)$; also hat man

$$i = \sqrt{1 - u^2}\ \sqrt{1 - v^2},$$

so daſs eine der Gröſsen, u z. B., völlig willkührlich, woferne man nur die andere v gleich $\frac{\sqrt{w^2}}{u}$ nimmt.

Setzt man also uv statt $\sqrt{w^2}$, so folgt, daſs stets sey

$$uv + \sqrt{1 - u^2}\ \sqrt{1 - v^2} < 1$$

Man sieht aber, daſs keiner der Faktoren des ersten Produkts kleiner als -1 und gröſser als $+1$ seyn dürfe, widrigenfalls der Ausdruck nicht unrichtig, sondern unmöglich wird.

Da die beiden Produkte, mit dem positiven Zeichen verbunden, nicht gröſser als 1, so werden sie auch, mit dem negativen verbunden, kleiner als 1 bleiben, und man sieht leicht, daſs sie in keiner Verbindung zusammen kleiner als -1 werden können, so daſs der ganze Ausdruck in eben den Gränzen bleibt, welche die Möglichkeit eines wirklichen Zahlenwerthes für die Gröſsen fordert, aus welchen er zusammengesetzt ist.

Achtet man auf die Form des Ausdrucks, so sieht man, daſs der eine Theil das Produkt der Quadratwurzeln aus den Ergänzungen der Quadrate der Faktoren des andern Theils zur Einheit sind. Daher folgt, daſs, so wie

$$uv \pm \sqrt{1-u^2}\;\sqrt{1-v^2} < 1,$$ auch seyn müsse

$$u\sqrt{1-v^2} \pm v\sqrt{1-u^2} < 1.$$

Nimmt man beide Ausdrücke, den einen aber mit dem entgegengesetzten Verbindungszeichen des andern, quadrirt und addirt sie dann, so müssen sich die doppelten Produkte beider Theile aufheben, und man hat blos:

$$u^2 v^2 + (1-u^2)(1-v^2) + u^2(1-v^2) + v^2(1-u^2)$$

welches der Einheit gleich ist.

Jene Ausdrücke können aber der Einheit positiv und negativ so nahe kommen, als man will, selbst sie erreichen, aber nicht überschreiten.

Es folgt leicht, daſs

$$uv + \sqrt{1-u_,^2}\;\sqrt{1-v_,^2} < 1$$

wenn $u_, v_, > uv$, indem die Gröſse

$$u_, v_, + \sqrt{1-u_,^2}\;\sqrt{1-v_,^2} < 1$$

um $u_, v_, - uv$ gröſser ist als jene.

Daraus folgt, daſs die Summe der Reihe:

$$uv + \sqrt{(1-u_,^2)(1-v_,^2)} + \sqrt{(1-u_{,,}^2)(1-v_{,,}^2)} + \sqrt{(1-u_{,,,}^2)(1-v_{,,,}^2)} + \ldots$$

so weit man will fortgesetzt, nie gröſser als 1 werden kann, woferne stets die Produkte $u_, v_,$, $u_{,,} v_{,,}$, $u_{,,,} v_{,,,} \ldots u_n v_n$ gröſser oder nicht kleiner sind, als die Summe aller vorhergehenden Glieder.

Wenn daher in einer ins unendliche fortschreitenden Reihe von irgend einem Gliede an die folgenden so fortschreiten, daſs wenn man sie alle durch irgend eine Zahl dividirt, welche das Glied, bei welchem man anfängt, kleiner macht als 1, dieselben jener Bedingung entsprechen, so hat die Summe der unendlichen Reihe einen endlichen Werth.

Es ist überflüſsig, die oben gefundenen Ausdrücke in u und v, um alle mögliche Werthe zu erhalten, deren sie fähig sind, bei bestimmten Zahlen für u und v, mit dem Doppelzeichen ± zu verbinden, da nichts hindert, ungeachtet u und v gegeben, die Radikalgröſsen jede für sich nach

Gefallen positiv oder negativ zu nehmen, und umgekehrt, wenn diese gegeben, bleiben jene im Zeichen willkührlich.

Allein will man beide als zusammengehörige betrachten, deren Summe der Quadrate gleich 1, so mufs man die beiden Ausdrücke mit entgegengesetzten Verbindungszeichen ihrer Theile zusammensetzen, und im einen wie im andern die Gröfsen vollkommen gleich betrachten in Zahl und Zeichen, und es bleibt nur verstattet, das vollständige Resultat der einen dann entgegengesetzt zu nehmen, wie ihr gegenseitiges Verhältnifs U und $\sqrt{1-U^2}$ es ausweiset.

Wenn $U^2 < 1$, also $\pm U < 1$, so ist auch offenbar:

$$\frac{1-U}{2} < 1 \text{ und } \frac{1+U}{2} < 1,$$

da aber die Summe dieser Gröfsen gleich 1, so mufs, wenn man setzt

$$\frac{1+U}{2} = V^2, \text{ die andere } \frac{1-U}{2} = 1 - V^2 \text{ seyn,}$$

aus welchen folgt: $U = \frac{2V^2 - 1}{2} < 1$,

und man hat, so weit man will, fortgesetzt,

$$\cfrac{1 \mp \cfrac{1 \mp \cfrac{1 \mp \cfrac{1 \mp P}{2}}{2}}{2}}{2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

in jeder Zeichenverbindung kleiner als ± 1, woferne P es ist, welches freilich von selbst erhellt.

§. 6.

Es seyen drei Gröfsen a, b, c, so beschaffen, dafs je zwei zusammen gröfser als die dritte, oder vielmehr nicht kleiner als die dritte, damit der Fall, wo zwei zusammen, der dritten gleich, nicht ausgeschlossen bleibe, und auch nichts hindere, dafs zwei zusammen um so wenig man will, die dritte übertreffen. Wenn die Zeichen $>$ und $<$ zwischen zwei Gröfsen gesetzt, andeuten, die dem erstern Zeichen vorhergehende Gröfse sey nicht klei-

ner als die demselben folgende, fürs andere Zeichen hingegen nicht grösser, so ist der Ausdruck der zwischen a, b, c gemachten Bedingung

$$a + b > c; \quad a + c > b; \quad b + c > a$$

Also

$$a > c - b; \quad a > b - c; \quad b > a - c$$
$$b > c - a; \quad c > b - a; \quad c > a - b$$

Es folgt mithin, dass die drei Grössen, woferne sie möglich, positiv sind, weil eine jede grösser ist als der positive oder negative Unterschied der andern beiden. Damit es aber unbestimmt bleibe, welche der drei Grössen grösser oder kleiner als eine andere, nehme man die Quadrate dieser Ungleichheiten, wodurch alle sechs zusammengefasst werden, in den dreien folgenden:

$$a^2 > (c - b)^2; \quad b^2 > (c - a)^2; \quad c^2 > (b - a)^2$$

welche Gleichungen ausweisen, dass das Quadrat einer jeden der drei Grössen nicht kleiner sey, als das Quadrat des Unterschiedes der andern beiden, und die Bedingung, von welcher ausgegangen ist, vollständig wiedergeben, dass je zwei zusammen grösser als die dritte.

Da nun

$$a^2 > c^2 + b^2 - 2cb;$$

so kann man setzen:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\alpha,$$

wo α willkührlich, wofern es nur nicht grösser als $+1$ und nicht kleiner als -1 ist. Denn im Falle $\alpha = 1$ wird $a = \pm (c - b)$ und für $\alpha > 1$ würde $a < \pm (c - b)$, welches letztere nicht zuläfslich. Für $\alpha = -1$ wird $a = c + b$ am grösten, für α kleiner als -1 hingegen dürfte a grösser als $c + b$ genommen werden, welches wieder unzuläfslich. Man kann aber α leicht die Form geben, dass es selbst unmöglich wird, wenn der entstehende Werth von a, als der Bedingung zuwider, nicht möglich seyn darf.

Setzt man nemlich $\alpha = \sqrt{1 - \zeta^2}$, so wird α, mithin a, für ζ^2 grösser als 1, unmöglich; und da in der That sogleich erhellt, dass

$$c^2 + b^2 - 2cb\sqrt{1 - \zeta^2} > c^2 + b^2 - 2cb,$$

so liegt im Grunde nichts willkührliches darin, jene Grösse im ersten Gliede dieser Vergleichung als den Ausdruck für a^2 zu betrachten, weil, welche

nur mögliche andere die unbestimmten b und c enthaltende Form man für a^2 auch annehmen möchte, für dieselbe sich doch jene angenommene einfache Form annehmen, und der Werth von der unbestimmten ζ oder $\sqrt{1-\zeta^2}$ finden lassen müſste, und gleich a^2 gesetzt, giebt sie sogleich:

$$\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb} \text{ oder}$$

$$1 - \varkappa^2 = \zeta^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2}$$

in welchen Formeln man nur die für a^2 gewählte noch substituiren darf, die dann, welche willkührliche aber bestimmte Werthe man auch für b und c setzt, kleiner als 1 werden müssen.

Die ersten Ungleichheiten, wie $a < b + c$ führen auch unmittelbar auf dasselbige. Da

$$a^2 < b^2 + c^2 + 2bc$$

mithin gesetzt werden kann

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \,.\, \alpha$$

wenn α wie oben verstanden wird.

Versteht man auch unter β, γ wie unter α Gröſsen zwischen den Gränzen -1 und $+1$, so hat man also für die drei Gröſsen a, b, c folgende drei Bedingungs-Gleichungen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \alpha$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \,.\, \beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \,.\, \gamma$$

welche zugleich statt haben müssen.

Addirt man je zwei dieser Gleichungen, und dividirt mit der, nach Aufhebung der übrigen, allen Gliedern noch als Faktor gemeinschaftlichen Gröſse, so entstehen die Gleichungen:

$$0 = c - b\alpha - a\beta$$
$$0 = b - c\alpha - a\gamma$$
$$0 = a - c\beta - b\gamma$$

Zwei dieser Gleichungen müssen auch aus einer folgen durch gehörige Vertauschung der Buchstaben, welche die leicht zu ersehende Zusammensetzung einer der Gleichungen angiebt.

Eliminirt man aus der ersten und zweiten und auch aus der zweiten und dritten Gleichung eine und eben dieselbe von den Gröſsen a, b, c; gesetzt b, so erhält man die beiden

$$o = c\,(1-\alpha^2) - a.\gamma\alpha - a.\beta$$
$$o = a\,(1-\gamma^2) - c.\gamma\alpha - c.\beta$$

aus welchen folgt, wenn man die erste mit c, die zweite mit a multiplizirt,

$$o = c^2\,(1-\alpha^2) - a^2\,(1-\gamma^2)$$

oder

$$c\sqrt{1-\alpha^2} = a\sqrt{1-\gamma^2}$$

Man muſs also auch, wegen der Gleichheit der Form der ursprünglichen drei Gleichungen, die nur in den Buchstaben sich unterscheiden, ſinden

$$b\sqrt{1-\alpha^2} = a\sqrt{1-\beta^2},\quad b\sqrt{1-\gamma^2} = c\sqrt{1-\beta^2}$$

Da die Gröſsen a, b, c positiv, so können die Radikalgröſsen nicht anders als entweder insgesammt positiv oder alle mit einander negativ genommen werden. Diese Gleichungen gehen aber auch unmittelbar aus dem oben für $\zeta^2 = 1-\alpha^2$ gegebenen Ausdruck, nach welchem $4b^2c^2\,(1-\alpha^2)$ mithin auch $bc\sqrt{1-\alpha^2}$ einen von der Vertauschung der Buchstaben unabhängigen Werth hat, also für $ac\sqrt{1-\beta^2}$, $ab\sqrt{1-\gamma^2}$ derselbe bleibt.

Setzt man in der obigen Gleichung

$$o = c\,(1-\alpha^2) - a\,(\gamma\alpha + \beta)$$

den so eben gefundenen Werth von c in a ausgedrückt, nemlich $c = a\dfrac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ so geht auch a aus derselben weg und man erhält

$$o = \sqrt{1-\gamma^2}\,\sqrt{1-\alpha^2} - \gamma\alpha - \beta$$
$$o = \sqrt{1-\gamma^2}\,\sqrt{1-\beta^2} - \gamma\beta - \alpha$$
$$o = \sqrt{1-\beta^2}\,\sqrt{1-\alpha^2} - \beta\alpha - \gamma$$

die zwei letzteren in Folge der Verwechselung, daher auch als Folgerungen der ersten.

Setzt man aber in der gefundenen Gleichung

$$o = c - b\alpha - a\beta$$

für b und a deren Werthe in c, nämlich:

$$b = c \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\gamma^2}}; \quad a = c \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\gamma^2}};$$

so geht c als allgemeiner Faktor aus derselben weg, und es wird, wenn man mit $\sqrt{1-\gamma^2}$ multiplizirt,

$$o = \sqrt{1-\gamma^2} - \alpha\sqrt{1-\beta^2} - \beta\sqrt{1-\alpha^2} \quad \text{also auch}$$
$$o = \sqrt{1-\beta^2} - \alpha\sqrt{1-\gamma^2} - \gamma\sqrt{1-\alpha^2}$$
$$o = \sqrt{1-\alpha^2} - \beta\sqrt{1-\gamma^2} - \gamma\sqrt{1-\beta^2}$$

welche Formeln aber auch unmittelbar aus den dreien zunächst vorhergehenden folgen, und da sie jede dieselben drei Gröſsen allein enthalten, nur verschiedene Gestalten derselben Gleichung seyn können. Sie sind merkwürdig, sowohl weil sie zwischen den Gröſsen α, β, γ Relationen angeben, völlig unabhängig von den Gröſsen a, b, c, aus welchen sie durch die einzige Bedingung, daſs zwei derselben gröſser als die dritte entsprungen sind, als auch wegen diesen Relationen selbst, in Folge welcher aus zwei willkührlichen Gröſsen α, β, wofern deren Werthe nur nicht auſserhalb den Gränzen $+$ und -1 fallen, eine dritte stets mögliche eben so beschaffene Gröſse γ oder $\sqrt{1-\gamma^2}$ bestimmt wird.

Daſs dieses statt finden müsse, läſst sich gleich vom Anfange aus der Form der Gleichungen, von welcher ausgegangen ist, $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cdot \alpha$ übersehen; da man aus den drei verschiedenen, zwei von den drei Gröſsen a, b, c eliminiren, also zu einer Gleichung gelangen kann, welche nur die dritte noch übrige nebst den drei Gröſsen α, β, γ enthält. Allein da die drei Gleichungen nur Glieder gleicher Dimension von a, b, c enthalten; so muſs auch die Endgleichung gleicher Dimension in der einzelnen dritten Gröſse seyn, diese also in allen Gliedern auf einerlei Potenz oder als allgemeinen Faktor enthalten, der andere Faktor mithin die Gleichung zwischen α, β, γ allein ausmachen.

Ueberhaupt aber kann jede aus der ersten abgeleitete Gleichung zwischen Gröſsen aus a, b, c und aus α, β, γ jene durchgehends nicht anders als in gleichen Dimensionen enthalten. Da nun

$$b = \frac{a}{\sqrt{1-\alpha^2}}\sqrt{1-\beta^2}; \quad c = \frac{a}{\sqrt{1-\alpha^2}}\sqrt{1-\gamma^2}; \quad a = \frac{a}{\sqrt{1-\alpha^2}}\sqrt{1-\alpha^2}$$

oder überhaupt, in welcher der einen man auch die übrigen ausdrückt, gesetzt werden kann

$$a = k\sqrt{1-\alpha^2}, \quad b = k\sqrt{1-\beta^2}, \quad c = k\sqrt{1-\gamma^2}$$

so wird, wenn man diese Werthe von a, b, c in irgend einer der gedachten Gleichungen substituirt, eine jede Gleichung k, oder dessen Potenz als allgemeinen Faktor enthalten, und daher in eine Gleichung zwischen den Grösen α, β, γ allein übergehen, und sie werden natürlich stets zu dreien vorhanden seyn.

Diese Gleichungen müssen aber übereinstimmen mit den oben zuletzt gefundenen zwischen α, β, γ allein, also umgekehrt auch als bloſse Folgerungen aus diesen sich ergeben, so daſs man also im Voraus sicher ist, alle Gleichungen, die zwischen a, b, c und α, β, γ möglich sind, allein aus den letzten der Form nach vollständig ableiten zu können, und will man a, b, c wieder hineinbringen, so darf man sie nur mit k oder k^2 multipliziren, betrachten in wiefern sie $\sqrt{1-\alpha^2}$, $\sqrt{1-\beta^2}$, $\sqrt{1-\gamma^2}$ enthalten, und nach ihrem Vorkommen grade hin a, b, c setzen, mit der Beachtung, daſs die Gleichung in jenen Gröſsen zu gleicher Dimension gebracht werden muſs.

§. 7.

Es ist hinlänglich, hier diesen Rückgang angedeutet zu haben, und überflüſsig, denselben wirklich zu entwickeln, da es kürzer und zugleich zweckmäſsiger, dieses für den allgemeinen Fall zu thun, also statt der gefundenen Gleichung

$$\alpha = \sqrt{1-\beta^2}\,\sqrt{1-\gamma^2} - \beta\gamma$$

und deren Formen eine andere allgemeinere für jede der Gröſsen α, β, γ zum Grunde zu legen, die in jene übergehen kann. Nun ist aber die Bedingung dieser Gröſsen α, β, γ, daſs sie nicht auſserhalb den Gränzen $+1$ und -1 fallen. Dieses wird auch der Fall bleiben, wenn unter A eine willkührliche, aber in eben den Gränzen enthaltene Gröſse verstanden und dann gesetzt wird

$$\alpha = A\sqrt{1-\beta^2}\,\sqrt{1-\gamma^2} - \beta\gamma$$

damit α wirklich die äuſserste Gränze -1 der gestatteten Werthe erreichen könne, ist es nothwendig, den Faktor A mit dem ersten und nicht mit dem andern Gliede zu verbinden. Denn es wird nach oben schon bemerkter Bedingung das Produkt $\sqrt{1-\gamma^2}$, $\sqrt{1-\beta^2}$ stets positiv genommen. Der Fak-

tor A ist daher zugleich geeignet, das Produkt beider Radikalgröſsen negativ zu machen, das andere Glied $\beta\gamma$ kann aber sowohl positiv als negativ seyn, nachdem β und γ für sich entgegengesetzt oder gleichnamig sind.

Die angenommene Gleichung drückt überhaupt die Ungleichheit der Endgleichungen des vorigen Artikels aus, nemlich daſs sey

$$\alpha < \sqrt{1-\beta^2}\ \sqrt{1-\gamma^2} - \beta\gamma$$

welche umgekehrt jedesmal sich auf obige Gleichheitsform zurückführen läſst, und da die Ungleichheit auch für β und γ gelten soll, wenn sie mit gleichen Formen in α, γ und α, β als die Form für α in β und γ verglichen werden; so hat man, wenn B, C im Werth ähnlich beschränkte Gröſsen sind als A, die drei Gleichungen:

$$\text{(A)} \ldots \quad \alpha = A\sqrt{1-\beta^2}\ \sqrt{1-\gamma^2} - \beta\gamma$$
$$\beta = B\sqrt{1-\alpha^2}\ \sqrt{1-\gamma^2} - \alpha\gamma$$
$$\gamma = C\sqrt{1-\alpha^2}\ \sqrt{1-\beta^2} - \alpha\beta$$

Um aus diesen die Gleichungen verschiedener Verbindungen zwischen A, B, C und α, β, γ zu finden, eliminire man nach einander von den letztern die eine oder die andere. Man nehme zwei der Gleichungen, lasse die Radikalgröſsen auf einer Seite allein und quadrire, die entstehenden Gleichungen

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma + \beta^2\gamma^2 = A^2(1-\beta^2)(1-\gamma^2)$$
$$\beta^2 + 2\alpha\beta\gamma + \alpha^2\gamma^2 = B^2(1-\alpha^2)(1-\gamma^2)$$

subtrahire man von einander und dividire mit $1-\gamma^2$, so hat man

$$\alpha^2 - \beta^2 = A^2(1-\beta^2) - B^2(1-\alpha^2)$$

da man für den ersten Theil auch schreiben kann $1-\beta^2-(1-\alpha^2)$, so folgt

$$(1-\beta^2)(1-A^2) - (1-\alpha^2)(1-B^2) = 0$$

oder

$$\text{(B)} \ldots \quad \frac{\sqrt{1-A^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{\sqrt{1-B^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{und deren 2 Abwechselungen,}$$

wo wiederum zu bemerken, daſs, da die Radikale der Nenner einerlei Zeichens, auch die der Zähler es seyn müssen.

Setzt man im Werthe von α (Gleichung A. 1.) statt β dessen Werth (aus Gleichung A. 2.), und statt $\sqrt{1-\beta^2}$ dessen Werth aus der so eben gefundenen, so entsteht die Gleichung:

$$\alpha \sqrt{1-\gamma^2} = A \frac{\sqrt{1-B^2}}{\sqrt{1-A^2}} \sqrt{1-\alpha^2} - B\gamma \sqrt{1-\alpha^2} \text{ oder}$$

$$(C) \ldots \quad \alpha \sqrt{1-A^2} \sqrt{1-\gamma^2} = A \sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-B^2} - \gamma . B \sqrt{1-\alpha^2} \sqrt{1-A^2}$$

welche 6 Abänderungen durch Verwechselung der Gröſsen giebt.

Statt $\sqrt{1-\gamma^2}$ dessen Werth aus der Gleichung (B) $= \frac{\sqrt{1-C^2}}{\sqrt{1-A^2}} \sqrt{1-\alpha^2}$ gesetzt, giebt

$$\alpha \sqrt{1-C^2} = A \sqrt{1-B^2} - \gamma . B \sqrt{1-A^2}$$

Eben so ist:

$$\gamma \sqrt{1-A^2} = C \sqrt{1-B^2} - \alpha B \sqrt{1-C^2}$$

welches in die vorhergehende Gleichung gesetzt, giebt:

$$\alpha \sqrt{1-C^2} = A \sqrt{1-B^2} - CB \sqrt{1-B^2} + \alpha B^2 \sqrt{1-C^2}, \text{ also}$$

$$(D) \ldots \quad \alpha \sqrt{1-B^2} \sqrt{1-C^2} + CB = A$$

daher:

$$A < CB + \sqrt{1-C^2} \sqrt{1-B^2}$$

welches in gleicher Form für jede der zwei noch möglichen Verwechselungen der Buchstaben statt hat. Man wird also zu einer ähnlichen Form der Ungleichheit geführt, als die, von welcher man ausgegangen.

§. 8.

Anstatt die Zweideutigkeit der Vergleichung $a > \pm (c - b)$ in der Quadratform zu heben, kann von beiden Gliedern eine andere Funktion genommen werden, welche für gleiche positive und negative Gröſsen einerlei Werth hat. Die, welche nächst jener sich leicht darbietet, und zu den einfachsten Gleichungen führt, ist der Cosinus. Sind die Gröſsen a, b, c, alle drei oder zwei der Zahl nach betrachtet, gröſser als π, so können sie mit einer willkührlichen Zahl dividirt werden, die jede derselben kleiner als π macht, und es sollen daher unmittelbar a, b, c insgesammt kleiner als π gesetzt seyn.

Da für ein positives a, so lange $a + \omega < \pi$

$$\cos . a + \omega < \cos a, \text{ so folgt aus}$$

$$a > \pm (c - b),$$

$$\cos a < \cos b \, \cos c + \sin a . \sin b.$$

Man kann also setzen:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin a \sin b \,.\, \alpha;$$

wenn α nur Werthe von -1 bis $+1$ annehmen darf, so bleibt diese Gleichung stets reel und genügt den zwischen a, b, c gesetzten Bedingungen.

Es ist sehr natürlich, für α den Cosinus einer Gröſse A zu setzen, welcher in den Gränzen o und π bleibt, wodurch also $\alpha = \cos A$ zwischen $+1$ und -1 begränzt ist.

Da nun zugleich auch seyn soll

$$b > \pm (c - a); \quad c > \pm (b - a)$$

so hat man mit der vorhergehenden folgende drei Gleichungen

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \,.\, \cos A \quad \ldots \quad (A)$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \,.\, \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \,.\, \cos C$$

die zugleich statt haben sollen, und demnach die Beziehungen von Funktionen der Gröſsen A, B, C zu einander und gegen die von a, b, c bedingen. Diese zu erhalten, kömmt es nur darauf an, aus zweien jener Gleichungen eine ihnen gemeinschaftliche Gröſse zu eliminiren, oder aus allen dreien zwei um die Gleichungen für alle Verbindungen von 4 Gröſsen aus den 6 vorkommenden zu haben.

Wie eine Elimination vorgenommen wird, ist an sich gleichgültig, da sie stets zu denselben Endgleichungen führen muſs. Allein die besondere Natur gegebener Gleichungen kann Abkürzungen darbieten, welche zu benutzen sind.

Man sieht leicht, daſs sich keine der Gröſsen a, b, c aus zweien Gleichungen wegbringen läſst, ohne die Quadrate derselben zu nehmen.

Die erste Gleichung quadrirt, giebt

$$\sin^2 b \sin^2 c \cos^2 A = \cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c$$

das ähnliche Resultat aus der zweiten hievon subtrahirt, dann mit $\sin^2 c$ im ersten und $1 - \cos^2 c$ im zweiten Gliede dividirt, giebt die von c befreite Gleichung

$$\sin^2 b \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B = \cos^2 a - \cos^2 b$$

welche übergeht in

$$\sin b \sin A - \sin a \sin B = 0 \quad \ldots \ldots \quad (B)$$

welches jedoch auch aus der ersten, wenn man $1 - \sin^2 A$ statt $\cos^2 A$ setzt, hervorgeht, wodurch erhalten wird,

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = -\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c + 1,$$

und da jede der drei Gleichungen im zweiten Gliede symmetrisch aus a, b, c zusammengesetzt, nur dasselbe Resultat geben kann, so ist

$$\sin b \sin c \sin A = \sin b \sin a \sin C = \sin a \sin c \sin B, \quad \ldots \quad (B)$$

Setzt man in der ersten der Gleichungen (A), statt $\cos b$ dessen Werth aus der zweiten; für das in jener vorkommende $\sin b$ aber dessen Werth $\sin a \sin B : \sin A$ aus der Gleichung (B), so findet sich:

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos c \cos B + \sin a \sin c \sin B \frac{\cos A}{\sin A};$$

also

$$\left.\begin{array}{l} \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B = \sin a \sin B \cdot \dfrac{\cos A}{\sin A}, \\ \text{oder} \\ \sin B \cos A + \cos B \sin A \cos c = \sin A \sin c \dfrac{\cos a}{\sin a}. \end{array}\right\} \ldots \quad (C)$$

Beide Gleichungen sind im Grunde dieselbe, und können in einer einzigen Form, welche aber nicht so wie diese analogisch den ersten (A), zusammengefaſst werden. Sie geben nach den verschiedenen möglichen Verbindungen der Gröſsen a, b, c, 6 Gleichungen, welche hier aufzustellen überflüſsig.

Die eine der Gleichungen (C) aber geht in die Form der andern über, wenn man die Cosinusse negativ nimmt und die groſsen und kleinen Buchstaben verwechselt. Man darf also in allen Gleichungen $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ statt a, b, c setzen, wenn man zugleich $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$ statt A, B, C nimmt. Es sind also dieselben Beziehungen, d. h. einerlei Formeln gelten, zwischen

$$\pi - A,\ \pi - B,\ \pi - C \text{ und } \pi - a,\ \pi - b,\ \pi - c,$$

wie zwischen a, b, c und A, B, C.

Gebraucht man diese Verwechselung für die Gleichungen unter (A), so wird die erste

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \quad \ldots \quad (D)$$

Durch Substitution gelangt man zu dieser Form, wenn man bemerkt,

dafs in Folge der Gleichungen (B) das letzte Glied der zweiten in (C) gleich sin C cos a, die Gleichung selbst also wird:

$$\sin C \cos a = \sin B \cos A + \cos B \sin A \cos c.$$

Setzt man, da zufolge eben dieser Form auch

$$\sin A \cos c = \sin B \cos C + \cos B \sin C \cos a$$

diesen Werth für sin A cos c im letzten Gliede jener, so geht cos c weg, und die entstehende Gleichung reduzirt sich auf die vorige (D).

Es zeigt sich, dafs dieser Artikel mit dem vorigen einerlei Formeln in entgegengesetzter Ordnung entwickelt. Dort ist die Behandlung vom Anfange an im Gebiet algebraischer Gleichungen geblieben, hier in dasselbige übergegangen; nur erweisen sich die Gröfsen als abhängig und daher als transcendent, da sie zuvor als unmittelbare, sowohl wie gegebene als zu suchende, betrachtet worden. Indessen, wenn man statt α, β, γ das, was sie vorstellen können, cos A′, cos B′, cos C′ setzt, so verhält es sich eben so, als wäre die Voraussetzung gewesen

$$A' > \pi - (B' + C'); \;\; B' > \pi - (A' + C'); \;\; C' > \pi - (A' + B')$$

und die Behandlung der Ansicht des letzten Artikels gemäfs. Das Endresultat ist dann, wenn, was wiederum erlaubt, statt A, B, C, cos a′, cos b′, cos c′ geschrieben wird, dafs $\cos a' < \cos(b' - c')$ oder $a' > \pm(b' - c')$. Obwohl es vom Anfange an zu ersehen, dafs, da die Betrachtung der Relation zwischen a, b, c einer Gleichung entspricht, welche mit der letzten des vorhergehenden Artikels übereinstimmt, die in demselben vorausgesetzten folgen würden, so war doch die Darstellung gewöhnlicher Formeln nicht füglich zu übergehen, und kann auch dienen zu zeigen, in welcher Kürze sich die Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie aus einer ableiten und übersehen lassen. Denn sie sind enthalten in den beiden

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \sin c \,.\, \cos A$$

$$\cos B \sin a = \cos b \,.\, \sin c - \sin b \cos c \,.\, \cos A$$

wenn man bemerkt, dafs der Werth von sin A : sin a beim Wechsel mit andern Buchstaben unverändert bleibt, und gleichnamige Gröfsen gegeneinander umgetauscht werden dürfen, woferne man nur beachtet die Cosinusse, oder die durch sie bestimmten, in den Formeln negativ zu nehmen.

Man kann sich also im Beweise auf eine der Ableitungen der Gleichungen (B) und der Gleichungen (C) aus den Fundamentalformeln (A)

beschränken. Nur müssen, da die Gleichung (C) sich in zweifacher Gestalt zeigt, die Folgerungen gezogen werden, welche die Vergleichung veranlaſst, die, wie ich glaube, unbemerkt geblieben, da noch die vierte Formel (D) erst durch Elimination gesucht und dann aus deren Analogie mit der ersten das Aehnliche geschlossen wurde.

So wie eben die Gleichung (C) ausgedrückt ist, enthält sie freilich fünf Gröſsen, also eine mehr als erforderlich. Allein der zweite Theil derselben enthält doch nur drei, und der erste läſst sich unmittelbar durch die Nebengleichung $\sin b \,.\, \sin A = \sin a \,.\, \sin B$, welche sin a durch drei unter den übrigen vieren ausdrückt, von der fünften befreien, wo sie dann in der zuerst gefundenen Gestalt erscheint, und die Bestimmung der Gröſse B oder b nach Art der Gleichungen vom ersten Grade giebt, durch die gewöhnlich angeführte,

$$\cot B \,.\, \operatorname{Sin} A = \cot b \,.\, \sin c - \cos c \,.\, \cos A$$

in welcher aber, man mag sie stellen wie man will, keine Symmetrie sich offenbart, die hingegen in der hier aufgenommenen Form nicht übersehen werden kann. Ueberdem liegt vor Augen, daſs, so wie aus der in b und c symmetrischen Formel für cos a durch die Verwechselung der Sinus und Cosinus von c gegen einander, wenn die von b bleiben, $\cos B \sin a$ entsteht, eben so $\cos C \,.\, \sin a$ folge, wenn Sinus und Cosinus von c bleiben und die von b wechseln; daſs daher diese Form sechsmal vorkömmt, wie es die analoge Beziehung gleichnamiger Gröſsen erfordert.

Die Formeln für die Fälle, wo eine oder mehrere der Gröſsen gleich $\frac{\pi}{2}$, verdienen keine besondere Aufmerksamkeit, da sie aus den allgemeinen von selbst folgen, andere an sich merkwürdige werden aus den gegebenen blos vermittelst der Eigenschaften, welche den Sinusfunktionen überhaupt zukommen, abgeleitet, und können daher übergangen werden. Nur gehören hierher die Funktionen von $\sin A + B + C$, deren Ableitung auch, wie mir vorgekommen, im Umwege durch die Neperschen Analogien geführt wird, welches doch besser gradezu geschehen kann.

Man entwickele $\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)$ wirklich in die Produkte der einzelnen Sinusse und Cosinusse, um für dieselben die Werthe jener Sinusse in a, b, c ausgedrückt zu substituiren. Die Fundamentalformeln (A) geben sie, wenn man

statt $\cos A$, $1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$ oder $2\cos^2\frac{A}{2} - 1$ setzt, unmittelbar. Und man hat $a + b + c = 2p$ gesetzt, die bekannten Ausdrücke

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin(p-b).\sin(p-c)}{\sin b.\sin c}\right)};\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sin p.\sin(p-a)}{\sin b.\sin c}\right)}$$

Man setze: $\sin p.\sin(p-a).\sin(p-b).\sin p-c = P$ und es wird

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\left(\frac{P}{\sin p.\sin p-a.\sin b.\sin c}\right)};\ \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\left(\frac{P}{\sin p-b\sin p-c\sin b\sin c}\right)}$$

Diese und die ähnlichen Werthe der Sinus und Cosinus von $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$ in der Entwickelung von $\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$ gesetzt, so erhält man denselben gleich

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = \ldots$$

$$\frac{P^{1:2}}{\sin a.\sin b.\sin c}\left\{\begin{matrix}\frac{1}{\sin p-a.\sin p-b.\sin p-c} - \frac{1}{\sin p.\sin p-a.\sin p-b} \\ -\frac{1}{\sin p.\sin p-b.\sin p-c} - \frac{1}{\sin p.\sin p-c.\sin p-a}\end{matrix}\right\}$$

oder

$$\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) = P^{1:2}\left(\frac{\sin p - \sin(p-a) - \sin(p-b) - \sin(p-c)}{\sin a.\sin b.\sin c}\right)$$

Wenn man auch nur die erste der Gröſsen im Zähler, $\sin p = \sin\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}\right)$ entwickelt, so wird sogleich klar, daſs, da man die übrigen erhält, wenn man in jener a oder b oder c negativ setzt, der Zähler übergeht in $4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$ also im Nenner $2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$ etc. statt $\sin a$ etc. ge-

setzt, so wird

$$\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)=\frac{-\sqrt{P}}{2\cos\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{b}{2}\cdot\cos\frac{c}{2}}$$

Aus den angeführten Werthen von $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$ ersieht man, daſs

$$\frac{1}{2}\sin A=\frac{\sqrt{P}}{\sin b\,\sin c}\text{ also }\sqrt{P}=\frac{1}{2}\sin b\,\sin c\,\sin A.$$

Diesen Werth von $\sqrt{P}$ in die eben gefundene Gleichung gesetzt, giebt die Formel von De Lambre

$$\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=-\frac{\sin\frac{b}{2}\cdot\sin\frac{c}{2}\cdot\sin A}{\cos\frac{a}{2}}.$$

Setzt man in $\sin\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\ldots.$

$$-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

die Werthe der einzelnen Faktoren nach den zuerst angegebenen Formeln für $\sin\frac{A}{2}$ und $\cos\frac{A}{2}$, so wird

$$\sin\frac{A+B+C}{2}=\ldots.$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}-\sin p-a\,.\,\sin p-b\,.\,\sin p-c+\sin p\,.\,\sin p-a\,.\,\sin p-b\\+\sin p\,.\,\sin p-b\,.\,\sin p-c+\sin p\,.\,\sin p-c\,.\,\sin p-a\end{array}\right\}}{\sin a\,.\,\sin b\,.\,\sin c}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}(\sin p-\sin p-a)(\sin p-\sin p-b)(\sin p-\sin p-c)\\+\sin^2 p\left(\sin(p-a)+\sin(p-b)+\sin(p-c)-\sin p\right)\end{array}\right\}}{\sin a\,.\,\sin b\,.\,\sin c}$$

Es ist aber der Mitfaktor von $\sin^2 p$ nach schon oben bemerktem gleich $4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$, und da $\sin p-\sin p-a$ gleich $2\sin\frac{a}{2}\cos\left(p-\frac{a}{2}\right)$

das ist $2 \sin\frac{a}{2} \cos\frac{b+c}{2}$, und ähnlich die andern, so wird, Zähler und Nenner mit $4 \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{c}{2}$ dividirt,

$$\sin\frac{A+B+C}{2} = \frac{2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{c+a}{2} + \sin^2\frac{a+b+c}{2}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$= \frac{1-\cos(a+b+c) + 4\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{b+c}{2}.\cos\frac{c+a}{2}}{4\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}}$$

Da $\cos(a+b+c) = \cos\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}\right)$, so wird, wenn man dieses, als Cosinus einer dreitheiligen Gröſse entwickelt, in die Gleichung bringt und reduzirt,

$$\sin\frac{A+B+C}{2} =$$

$$\frac{1+\cos\frac{a+b}{2}.\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{b+c}{2}.\cos\frac{b-c}{2} + \cos\frac{c+a}{2}.\cos\frac{c-a}{2}}{4\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}}$$

daher auch die von Hrn. Le Gendre zuerst gegebene Gleichung

$$\sin\frac{A+B+C}{2} = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}.\cos\frac{b}{2}.\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos^2\frac{a}{2} + \cos^2\frac{b}{2} + \cos^2\frac{c}{2} - 1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

Die Sinus und Cosinus der halben Summe oder Differenz von nur zweien der Gröſsen A, B, C werden durch eben die Werthe von $\sin\frac{A}{2}$ und $\cos\frac{A}{2}$ und die ähnlichen für B erhalten, wenn man sie in die Entwickelungen von $\sin\left(\frac{A}{2} \pm \frac{B}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{A}{2} \pm \frac{B}{2}\right)$ substituirt, und man hat

$$\sin\frac{A\pm B}{2} = \left(\sin(p-a) \pm \sin(p-b)\right)\sqrt{\left(\frac{\sin p.\sin(p-c)}{\sin a.\sin b.\sin c.\sin c}\right)} \quad \ldots (A)$$

$$\cos\frac{A\pm B}{2} = \left(\sin p \mp \sin(p-c)\right)\sqrt{\left(\frac{\sin(p-a).\sin(p-b)}{\sin a.\sin b.\sin c.\sin c}\right)} \quad \ldots (B)$$

und

und sieht sogleich, daſs die mit dem Wurzelzeichen behafteten Gröſsen wegfallen, wenn man die beiden Formeln, die in jeder Gleichung enthalten sind, mit einander dividirt. Es entstehen dann, nach einer gewöhnlichen Reduktion, die beiden Neperschen Gleichungen:

$$\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}} = \operatorname{tang}\frac{c}{2}\,.\,\cot\frac{a-b}{2};\quad \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} = \operatorname{tang}\frac{c}{2}\,.\,\cot\frac{a+b}{2}$$

welche, durch einander dividirt, noch die Gleichung

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tang}\frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tang}\frac{a-b}{2}}$$

geben. Mit einander multiplizirt aber

$$\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \operatorname{tang}^2\frac{c}{2}\,.\,\cot\frac{a+b}{2}\,.\,\cot\frac{a-b}{2}.$$

Die beiden Formeln (A), (B) geben auch, mit einerlei Zeichen gebraucht und dividirt,

$$\operatorname{tang}\frac{A\pm B}{2} = \frac{\sin(p-a)\pm\sin(p-b)}{\sin p\mp\sin(p-c)}\sqrt{\left(\frac{\sin p\,.\,\sin(p-c)}{\sin(p-a)\,.\,\sin(p-b)}\right)},$$

allein es ist leicht zu sehen aus den gegebenen Werthen für $\sin\frac{A}{2}$ und $\cos\frac{A}{2}$, daſs die Gröſse mit dem Wurzelzeichen gleich $\cot\frac{C}{2}$, also den Mitfaktor reduzirt und mit $\operatorname{tang}\frac{C}{2}$ multiplizirt, entstehen die beiden andern Neperschen Gleichungen

$$\operatorname{tang}\frac{A+B}{2}\,.\,\operatorname{tang}\frac{C}{2} = \frac{\cos\frac{b-a}{2}}{\cos\frac{b+a}{2}};\quad \operatorname{tang}\frac{A-B}{2}\,.\,\operatorname{tang}\frac{C}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}$$

aus welchen, mit den vorigen verglichen, folgt, daſs sie aus denselben entstehen, indem $\pi - A$ statt a und $\pi - a$ statt A, und so auch für die anders benannten, gesetzt werden, weswegen eine solche Verwechselung für alle Formeln gelten muſs.

Man wird also auch hier auf das vorher schon bewiesene geführt, und zwar auf einem ganz verschiedenen Wege ohne alle Elimination, bloss durch den Gebrauch der Grundformel und den allgemeinen Relationen, die zwischen Sinussen etc. obwalten. Auch die Gleichung $\sin A \,.\, \sin b = \sin B \,.\, \sin b$ folgt leicht aus den Werthen von $\sin \frac{1}{2} A$, $\cos \frac{1}{2} A$, wenn man sie mit den ähnlichen für $\frac{1}{2} B$ verbindet.

Die beiden Formeln (A), (B) geben noch, mit verschiedenen Zeichen im ersten Theile gebraucht, zum Quotienten

$$\frac{\sin \frac{A \pm B}{2}}{\cos \frac{A \mp B}{2}} = \frac{\sin(p-a) \pm \sin(p-b)}{\sin p \pm \sin(p-c)} \cot \frac{C}{2}$$

also

$$\frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = \frac{\cos \frac{a-b}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}} \operatorname{tang} \frac{c}{2}$$

$$\frac{\sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{A+B}{2}} \operatorname{tang} \frac{C}{2} = \frac{\sin \frac{a-b}{2}}{\cos \frac{a+b}{2}} \cot \frac{c}{2}$$

Die Formeln (A), (B) nehmen auch die Form an

$$\sin \frac{A \pm B}{2} = \left(\sin(p-a) \pm \sin(p-b)\right) \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin c}$$

$$\cos \frac{A \pm B}{2} = \left(\sin p \mp \sin(p-c)\right) \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin c}$$

Demnach wird

$$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{a-b}{2} \,.\, \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{c}{2}}; \quad \sin \frac{A-B}{2} = \sin \frac{a-b}{2} \,.\, \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{c}{2}};$$

$$\cos \frac{A+B}{2} = \cos \frac{a+b}{2} \,.\, \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{c}{2}}; \quad \cos \frac{A-B}{2} = \sin \frac{a+b}{2} \,.\, \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{c}{2}}.$$

Ohnerachtet der beiden bekannten ausgezeichneten Abhandlungen von Euler und La Grange, welche diesen Gegenstand betreffen, habe ich doch geglaubt, die hier gegebene Ableitung der Formeln mit aufnehmen zu dürfen, da doch in neuern Schriften, sonst sehr wohl mit diesen Formeln bekannter Mathematiker, von den Neperschen Analogien behauptet wird, die analytischen Beweise derselben seien mühsam und Nichts leite in den Transformationen, welche mit der ursprünglichen Gleichung vorgenommen werden müssen.

Es ist in dem bisherigen angenommen worden, die Gröſsen a, b, c seien kleiner als π, allein nichts hindert, sich vorzustellen, der Divisor, von welchem im Anfange dieses Artikels die Rede gewesen, sey so gewählt, daſs jene Gröſsen kleiner als $\frac{\pi}{2}$, also der Sinus einer jeden kleiner als 1, und die Cosinusse derselben positiv seien. Für die eben durchgeführte Behandlung ist dieser Umstand gleichgültig, aber durch diese Bestimmung bleibt nicht nur die ursprüngliche Bedingung zwischen den Gröſsen selbst, sondern man hat in diesem Falle auch $\sin a + \sin b > \sin c$, und so mit den übrigen.

Denn man hat

$$\sin a + \sin b - \sin (a + b) = \sin a (1 - \cos b) + \sin b (1 - \cos a)$$

Da nun in Folge der Voraussetzung alle Gröſsen im zweiten Theile positiv, so ist es derselbe im Ganzen, also ist

$$\sin a + \sin b > \sin (a + b)$$

Ist nun $a + b < \frac{\pi}{2}$, so folgt von selbst, da $c < a + b$, daſs $\sin c < \sin (a + b)$, also um so mehr $\sin c < \sin a + \sin b$.

Ist $a + b = \frac{\pi}{2}$, so ist $\sin a + \sin b > 1$, daher auch um so mehr $\sin a + \sin b > \sin c$.

Für $a + b > \frac{\pi}{2}$ ist $b > \frac{\pi}{2} - a$, also $\sin b > \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

und daher $\sin a + \sin b > \sin a + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$

der letzte Theil aber ist nach dem vorigen gröfser als 1, mithin um so mehr sin a + sin b, folglich in allen Fällen

$$\sin a + \sin b > \sin c.$$

Man kann also die Gröfsen sin a, sin b, sin c eben so behandeln, wie die Gröfsen a, b, c selbst in zweierlei Rücksicht (§. 6., §. 8.) schon behandelt worden sind. In ersterer hätte man also

$$(\sin a)^2 = (\sin b)^2 + (\sin c)^2 - 2 \sin b \cdot \sin c \cdot \alpha$$

und alle oben (§. 6.) gegebene Gleichungen haben demnach statt, indem man blos sin a, sin b, sin c statt a, b, c schreibt. In der andern Hinsicht würde die Fundamentalgleichung

$$\cos(\sin a) = \cos(\sin b) \cdot \cos(\sin c) + \sin(\sin b) \cdot \sin(\sin c) \cdot \cos A$$

Beide geben eine veränderte Beziehung der drei der ursprünglichen Bedingung unterworfenen Gröfsen, von welchen jede zwei gröfser als die dritte. Aber die zweite Ansicht ist ungewöhnlich, die erstere aber öfters von Nutzen. Es ist klar, dafs, wenn a, b, c blos der Bedingung kleiner als π entsprechen, $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$, in eben den Verhältnissen gegen einander, als jene, insgesammt kleiner als $\frac{\pi}{2}$ seyn werden, und daher auf denselben die vorigen Formen anwendbar sind.

Die anfänglich in diesem Artikel angenommene Form den Bedingungen der Gröfsen a, b, c zu genügen, wird der ersteren (§. 6.) ähnlich, wenn man in derselben statt cos b, sin b setzt $1 - 2\sin^2\frac{b}{2}$, $2\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}$, und so für die andern Gröfsen, wie sie vorkommen; denn die Fundamentalformel geht dadurch über in

$$\sin^2\frac{a}{2} = \sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{c}{2} - 2\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\left(\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos A + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\right)$$

also vollkommen in die Form der ersten Ansicht, man darf nur setzen

$$\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos A + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} = \alpha \quad \ldots \ldots \text{(A)}$$

denn der erste Theil ist, wie es auch α seyn soll, in den Gränzen + 1 und

— 1, kann also die Stelle des letztern einnehmen, so dafs sich alle Relationen zwischen den vorkommenden Gröfsen nach drei der

$$\sin^2\frac{a}{2} = \sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{c}{2} - 2\sin\frac{b}{2}\,.\,\sin\frac{c}{2}\,.\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

ähnlichen behandeln lassen, woferne man nur nachher in Beziehung auf α, β, γ zwei ähnliche mit der so eben für α gegebenen Gleichungen in Betracht zieht, wenn es erforderlich ist auf die in der andern Form enthaltenen Gröfsen A, B, C zurück zu kommen.

Es ist klar, dafs, da cos A der Gleichung

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

von welcher ausgegangen ist, genügen mufs, und ein ähnliches für B, C statt findet, die α, β, γ aus der Gleichung (A) und den beiden zugehörigen bestimmt, so beschaffen sind, dafs

$$\alpha = \sqrt{1-\beta^2}\,\sqrt{1-\gamma^2} - \beta\gamma$$

gemäfs dem obigen (§. 6.), weil diese auch der Gleichung (B) und den dazugehörigen entsprechen, die den dortigen analog sind. Also wenn $\alpha = \cos A_{\prime}$; $\beta = \cos B_{\prime}$; $\gamma = \cos C_{\prime}$, so ist

$$\cos A_{\prime} = -\cos(B_{\prime} + C_{\prime})$$

Man stelle sich vor, die Gröfsen $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$, $\frac{c}{2}$ nehmen so ab, dafs zwischen ihren Sinussen stets dasselbe Verhältnifs bleibt, so stöhrt dies die ursprüngliche Bedingung der Ungleichheit zwischen denselben nicht, und α, β, γ bleiben unverändert, nur A, B, C ändern. Werden jene nun so klein, dafs die Sinusse den Gröfsen gleich gesetzt werden, also die Sinusse wegfallen können, so geht die Gleichung (B) ganz in die erste Form über, und die Gleichung (A) giebt in dieser Ansicht $\cos A = \alpha$.

Diese Ansicht aber ist genau genommen keine andere, als die blofse Berücksichtigung der Verhältnisse zwischen a, b, c mit vollständiger Abstraktion von denselben als für sich bestehende Gröfsen. Demnach können sie in Gleichungen nur in denselben Dimensionen vorkommen, oder nur solche bilden, die aus Absolut-Zahlen, zu welchen auch α, β, γ gehören, nebst Funktionen ihrer Quotienten bestehen, in welchen dann a, b, c ferner nicht erscheinen dürfen.

Da nun die Grundformel (B) dieser Betrachtungsweise gemäſs übergeht in:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \alpha \quad \text{oder} \quad 0 = 1 - \left(\frac{b}{c}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \alpha$$

so gehen alle aus jenen mit den ihr zugehörigen folgenden nach eben der Betrachtung in die aus diesen allein abgeleiteten über. Es läſst sich hiemit vergleichen, was schon oben (§. 6.) in dieser Beziehung erinnert ist. Es sind also wirklich diese Formeln in jenen als allgemeineren enthalten, und diese lassen sich nicht umgekehrt eben so unmittelbar aus den andern ableiten. Die Vergleichung selbst näher zu verfolgen und ins Besondere aufzustellen, wäre hier überflüſsig.

§. 9.

Wenn im mathematischen aus angenommenen Formen Eigenschaften für die in denselben befindlichen Gröſsen entspringen, so ist es freilich nicht nothwendig erforderlich, zu erörtern, wie man zur Annahme jener Formen gekommen seyn möchte. Für die Wahrheit der Folgerungen ist es völlig gleichgültig, nur werden diese in ihren allgemeineren Beziehungen mehr ergründet, wenn die Formen selbst in Untersuchung kommen. Auſser dem, was zu diesem Ende schon berücksichtiget worden, läſst sich aus einem etwas veränderten Gesichtspunkte mehr noch erkennen.

Wenn drei Gröſsen so beschaffen sind, daſs eine jede kleiner oder nicht gröſser ist als die Summe der andern beiden, mithin eine jede gröſser oder nicht kleiner als die negative und positive Differenz der andern, und diese Gröſsen sich wechselseitig mit Zuziehung einer von ihnen unabhängigen bestimmen sollen, wie a durch b, c und die unabhängige α; so heiſst dies annehmen, es sey:

$$a = F(b, c, \alpha),$$

Allein welchen Werth man auch α beilegt, so muſs $F(b, c, \alpha)$ entweder unmöglich seyn, oder wenn möglich, innerhalb den Gränzen $\pm(b-c)$, und $b+c$ fallen, auch diese drei Werthe nebst allen zwischenliegenden wirklich bei bestimmten Werthen von α erhalten, und $F(b, c, \alpha)$ in der That in $\pm(b-c)$ und $b+c$ übergehen können.

In der Gestalt aber, welche die Gleichung hat, kann die Funktion vielförmig seyn. Denn obwohl dieselbe die bedingten Werthe giebt, könnte sie doch zugleich andere enthalten, welche man nicht in vorliegender Hinsicht zu berücksichtigen hätte. Die Auflösung würde in diesem Falle nur

auf eine allgemeinere Aufgabe sich beziehen, als diejenige, welche vorgelegt ist, welches zu verhindern keinesweges Absicht seyn soll. Man nehme also von beiden Theilen der Gleichung eine solche Funktion, in Folge welcher die Mannigfaltigkeit des zweiten aufgehoben wird, so daſs also

$$\varphi a = \varphi . F (b, c, \alpha)$$

übergeht in

$$\varphi a = \psi (b, c, \alpha)$$

wo φ und ψ solche Formen, die in ihrer Entwickelung beiderseits völlig bestimmte Werthe geben, wenn die Gröſsen, auf die sie sich beziehen, bestimmt sind.

Jetzt ist die vorliegende Frage also, eine Funktion zweier Gröſsen und einer veränderlichen zu finden, die für bestimmte Werthe dieser in eine Funktion der Summe und der Differenz jener beiden, sowohl positiv als negativ genommen, übergehen kann. Man sieht leicht, daſs, um die ursprüngliche Aufgabe in sich zu schlieſsen, muſs $\psi (b, c, \alpha)$ gleich $\varphi (b + c)$, $\varphi (b - c)$ und $\varphi (c - b)$ seyn können.

Es ist aber Nichts, was b und c in Beziehung auf a unterscheidet, indem dieselben Bedingungen zwischen a, c, b obwalten, so wie sie zwischen a, b, c angenommen sind. Es ist also auch nichts Bestimmendes vorhanden, um vielmehr $\varphi a = \psi (b, c, \alpha)$ als $\varphi a = \psi (c, b, \alpha)$ zu setzen, also ist es völlig der Natur der Untersuchung angemessen, zu setzen, es sey identisch:

$$\psi (b, c, \alpha) = \psi (c, b, \alpha).$$

Diese Funktionen sind also symmetrische von c und b, mithin ist α mit beiden in einerlei Verknüpfung. Wenn daher α einen solchen Werth erhält, dem zu Folge die eine in $\varphi (b - c)$ übergeht, so giebt dieselbe Form mit diesem Werthe von α auch $\varphi (c - b)$, es ist also auch identisch

$$\varphi (b - c) = \varphi (c - b)$$

oder die Form für φ muſs so beschaffen seyn, daſs sie ihren Werth behält, wenn statt der veränderlichen in derselben die gleiche entgegengesetzt genommen wird.

Welche Form übrigens aber auch φ haben mag, so bestehen doch $\varphi (b + c)$ und $\varphi (b - c)$ als binomische Funktionen aus einerlei Gliedern nur zum Theil mit entgegengesetzten Zeichen, so daſs die Gleichungen

$$\varphi (b + c) = K + L \text{ und } \varphi (b - c) = K - L$$

mit einander statt haben, durch welche K und L sichtlich bestimmt sind.

Da nun $\psi(b, c, \alpha)$ in $\varphi(b + c)$ und φ b — c) übergehen soll für bestimmte Werthe von α, angenommen für $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, so kann man setzen:

$$\psi(b, c, \alpha) = U + V$$

so dafs U für $\alpha = \alpha_{,}$ sowohl als für $\alpha = \alpha_{,,}$ gleich K, V hingegen für jenem Werth $\alpha_{,}$, gleich L, für diesen $\alpha_{,,}$, gleich — L wird. Die einfachste Form, diesem zu genügen, ist offenbar

$$\psi(b, c, \alpha) = K + L \,.\, f\alpha$$

wo dann $f\alpha$ so zu bestimmen ist, dafs es für $\alpha = \alpha_{,}$ gleich + 1 und für $\alpha = \alpha_{,,}$ gleich — 1 werde. Man kann also cos A für $f\alpha$ nehmen, wo denn für $\alpha = \alpha_{,}$ das A = 0, und für $\alpha = \alpha_{,,}$ gleich π seyn mufs. Werden nun für K und L deren Werthe substituirt, so hat man $\psi(b, c, \alpha)$ oder

$$\varphi a = \frac{\varphi(b + c) + \varphi(b - c)}{2} + \frac{\varphi(b + c) - \varphi(b - c)}{2} \cos A.$$

Sollen b und c ähnliches Verhalten, jenes gegen a und c, dieses gegen a und b haben, so kann man für diese entweder dieselbe Form annehmen, oder der Gegenstand der Anwendung kann es erfordern, dafs sie einerlei seien, wie es ganz evident bei ebenen und sphärischen Dreiecken der Fall ist. Man hat alsdann drei einander ähnliche Gleichungen, in welchen nur die Gröfsen gegen einander vertauscht, in denen aber cos A, cos B, cos C allein bestimmte Funktionen sind, und so lange die Form von φ unbestimmt bleibt, lassen sich a, b, c oder Funktionen derselben gegen einander nicht bestimmen, da im zweiten Theile $\varphi(b \pm c)$ vorkömmt, welches sich erst, wenn φ gegeben, in Funktionen von b und c auflösen kann.

Es ist nicht undienlich, zu bemerken, dafs die Form für $\psi(b, c, \alpha)$ als φa, wie sie bisher ausgemittelt ist, keinesweges ausdrücklich verlangt als K + L cos A angesehen zu werden, so bald man glaubt, in dem cos A eine bestimmende Beziehung auf eine geometrische Ansicht zu erkennen, denn es dient blos eine Gröfse zu bezeichnen, die innerhalb den Gränzen + 1 und — 1 bleibt. Man kann also selbst vorläufig annehmen, diese Gröfsenart sey als Funktion noch unbekannt, und

$$\varphi a = \frac{\varphi(b + c) + \varphi(b - c)}{2} + \frac{\varphi(b + c) - \varphi(b - c)}{2} \alpha$$

setzen, wo α nur einen positiven oder negativen Bruch andeutet, welcher jedoch der Einheit, so nahe man will, gleichgesetzt werden kann, und es gänz-

gänzlich unbestimmt lassen, ob es eine Funktion sey und von welcher Gröfse, nur nicht von b und c; auch ist es nicht nöthig, dies eben gebrauchte α mit dem in der Form $\psi(b, c, \alpha)$ identisch zu halten, da vielmehr jenes α für die Funktion $f\alpha$ nun wieder gewählt ist, um kein neues Zeichen zu gebrauchen, und die Formeln hier früher aufgestellten gleichnamiger zu machen. Dies alles liegt zwar in der Vorstellung, in welcher cos A zuvor aufgefafst ist, allein es besonders hervorzuheben für eine Anwendung in der Folge wohl nicht überflüfsig.

Da schon bestimmt ist, φ müsse eine solche Form seyn, nach welcher $\varphi(-b) = \varphi b$, so wird

$$\varphi(b + c) = \varphi b + \varphi c + f(c, b)$$

gesetzt, weder φb noch φc ändern für c oder b negativ; also nur $f(c, b)$, nothwendig eine symmetrische Funktion von c und b, diejenigen Theile der binomischen Funktion enthalten, welche dann Zeichen ändern, obwohl sie auch neben denselben unveränderlich bleibende noch enthalten kann. Es ist leicht zu ersehen, wie diesem zu entsprechen ist.

Da es aber nur um die einfachsten Formen zu thun ist, so setze man, $f(c, b)$ enthalte blos den mit b oder c negativ werdenden Theil, damit $\varphi(b - c) = \varphi b + \varphi c - f(b, c)$ und

$$\varphi a = (\varphi b + \varphi c) + f(b, c) . \alpha,$$

werde, und es ist klar, dafs $f b, c = k . bc$ gesetzt werden könne, dann aber ist kb das Differenzial der Funktion φb, also $\varphi b = b^2$ die entsprechende mit b nicht Zeichen ändernde Form.

Da φb gleich $\varphi(-b)$, so wird auch entsprochen, wenn man

$$\varphi(b + c) = \varphi b . \varphi c \pm f b, c$$

setzt, und der Einfachheit wegen annimmt, $f b, c$ enthalte blos die mit b oder c negativ werdenden Glieder. Da aber $\varphi(b + c)$ eine symmetrische Funktion von b und c, so kann $f b, c = f b . f c$ gesetzt werden, so dafs

$$\varphi(b + c) = \varphi b . \varphi c \pm f b . f c$$

und man sieht, dafs cos b die angemessene Form für φb seyn wird. Eine vollständige Erörterung des Vorliegenden würde zu weit vom näheren Zweck dieser Abhandlung abführen, so dafs ich glaube, mich auf die hier gegebenen Andeutungen beschränken zu können.

Es sind zwar nur drei Gleichungen neben einander in Betrachtung

gezogen, allein es können unter erforderlichen Nebenbestimmungen deren so viele seyn als man will, dann enthalten sie die ebene und sphärische Polygonometrie, und in ihrer Verbindung die Polyhedrometrie, deren Gegenstand analytisch betrachtet, also nur in der Elimination vorkommender Gröſsen, der Bildung von Gleichungen zwischen solchen, die in den gegebenen nicht in derselben vorkommen, bestehen kann, welches zu leisten nur deswegen nicht unmöglich wird, weil die einzelnen Gleichungen der einfachsten Natur sind, welche die Hauptbedingung des Gegenstandes gestattet.

Es ist nur noch zu zeigen, wie die gegebene Theorie Anwendung auf Dreiecke habe, und es genügt, wenn es für ebene geschieht, indem dadurch eine bekannte Schwierigkeit gehoben wird, welches, wie es mir scheint, die Analysis bisher nicht geleistet hat. Denn die Schwierigkeit liegt, nach meinem Erachten, darin, daſs man das Aehnliche zweier über Grundlinien verschiedener Länge, aber mit gleichen anliegenden Winkeln construirten Dreiecke, also auch eine gleichmäſsige Bestimmungsweise bei verschiedener absoluter Gröſse anzuerkennen verweigert, Spitzfindigkeiten findet oder sucht, die Absurdität der Verneinung einer mathematischen Wahrheit aber nicht blos ausgesprochen sondern dargethan werden muſs. Es scheint daher, man müsse von einem Theorem ausgehen, welches für alle Dreiecke vollständig erwiesen ist, und nur vermittelst eines solchen könne eine an sich nicht bezweifelte Wahrheit begründet werden.

§. 10.

Da in den Elementen bewiesen wird, daſs in einem gradlinichten Dreieck je zwei Seiten zusammen gröſser als die dritte, so müssen diese der Gröſse nach betrachtet und mit a, b, c bezeichnet, dreien der

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \alpha$$

ähnlichen Gleichungen nothwendig entsprechen. Es ist nur unbestimmt, welche Bedeutung die Gröſsen α, β, γ in der Anschauung des Gegenstandes haben. Läſst diese sich auffinden, so können jene Gleichungen als ein geometrisches Theorem ausgedrückt werden, welches sich blos auf Gröſsen bezieht, die in der Betrachtung eines Dreiecks liegen.

Aus dieser und der vorliegenden Gleichung geht leicht hervor, daſs der Winkel zwischen b und c das α bestimmt und nur mit diesem ändert, obwohl unmittelbar nicht klar ist, wie die Gröſsen α, β, γ bestimmt sind. Aber wie oben (§. 6.) gezeigt, ist

$$b\gamma + c\beta = a; \quad c\alpha + a\gamma = b; \quad a\beta + b\alpha = c.$$

aus welchen offenbar erkannt wird, daſs $b\gamma$, $c\beta$ gleich zweien Linien, welche zusammengenommen entweder nach ihrer Summe, oder wenn einer der Brüche negativ nach ihrem Unterschiede der dritten Seite des Dreiecks a gleich sind. Das ähnliche hat für jede der andern beiden Seiten b und c statt.

Es giebt also in einem Dreieck, dessen Winkelpunkte A, B, C bezeichnen, in der Seite a einen Punkt D, welcher von den beiden Endpunkten der Linie B C um die Gröſsen βc und γb entfernt ist. Es bezeichne B denjenigen, von welchem D um βc entfernt ist, also C den andern, oder es ist in der leicht vorstellbaren Figur

$$BD = c\beta; \quad CD = b\gamma.$$

Um nun den Ort des Punktes D durch eine geometrische Construktion zu bestimmen, setze man, ohne γ zu ändern, es sey $c = b$, also $AB = AC$, daher der Winkel B gleich dem Winkel C; und vermöge der Gleichungen, da sie $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\gamma^2}}$ geben (§. 6.), $\beta = \gamma$. Also ist in diesem Falle $c\beta = b\gamma$.

Daher $BD = CD = \frac{1}{2} BC$. Der Punkt D liegt also in der Mitte von BC, wird also, da nunmehr das Dreieck ein gleichschenklichtes, nach einleuchtender geometrischer Construktion, durch eine rechtwinklicht vom dritten Punkt des Dreiecks A auf die Seite BC gezogene Linie bestimmt. Also drückt $b\gamma = CD$ die Gröſse der Kathete eines rechtwinklichten Dreiecks aus, welche mit der Hypotenuse $b = CA$ den Winkel C einschlieſst. Die Kathete DC aber ist gegeben, wenn der an ihr liegende Winkel C und die Hypotenuse gegeben sind, da sie durch die Construktion einer rechtwinklichten von einem gegebenen Punkt auf eine gegebene grade gefunden werden kann, also ist $b\gamma$ gegeben, und γ der Voraussetzung gemäſs nothwendig kleiner als 1. (wegen Eucl. I. 17. 18.)

In einem gradlinichten Dreieck, in welchem ein Winkel C nebst den ihn einschlieſsenden Seiten a, b gegeben sind, wenn man das Segment der Seite a zwischen der Perpendikularen auf derselben vom entgegenstehenden Winkel gezogen und dem Winkelpunkte C enthalten c' nennt, ist also das elementare Theorem

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot c'$$

und ähnlich für die andern Seiten, erwiesen, ohne durch die Schwierigkeit der Theorie der Parallelen gestöhrt zu seyn, welche vielmehr hiernach von selbst folgt. Daſs gedachtes Segment, wenn es nicht auf der Seite, sondern in deren Verlängerung liegt, negativ werde, ist hier nicht zu erörtern nöthig. Es ist aber zu bemerken, daſs das Theorem, so wie es hier erscheint, nicht auf Quadrate und Rechtecke zu beziehen ist, sondern auf die Lehre von der Proportionalität, die aber von der Geometrie, also von den Schwierigkeiten derselben unabhängig ist, und ihr, wissenschaftlich betrachtet, voran gehen soll. In unserer jetzigen arithmetischen Betrachtungsweise drückt sich das Theorem ohnehin klar aus, und dies war die wesentlichere Absicht dieses Artikels, zu zeigen, wie die elementare Theorie dreier Gröſsen, deren Summen zu zweien das dritte übertreffen, in der Geometrie, die am Ende ganz auf dem erwiesenen Satz beruht, anzuwenden sey.

Ueber die Gröſse γ selbst ist zu erinnern, daſs, wenn alles wie zuvor bleibt, im gleichschenklichten Dreiecke, wo b und der Winkel an der Basis gegeben, $b\gamma$, also auch γ gegeben ist. Dieses aber ist von b und a unabhängig, in sofern es allein durch die Winkel dieses Dreiecks bestimmt gedacht wird. Aber da nach der allgemeinen Gleichung (§. 6.)

$$\alpha = -\beta\gamma + \sqrt{1-\beta^2}\,\sqrt{1-\gamma^2}$$

hier aber $\beta = \gamma$, so wird $\alpha = 1 - 2\gamma^2$, also ist auch α in Folge desselben Winkels C durch γ bestimmt. Da nun von den drei Gröſsen α, β, γ nur eine allein vorkommt, auch zufolge der den Euklideischen Sätzen die Parallelen betreffend vorangehenden, einer der Winkel ohne einen andern nicht ändern kann, so kann man sagen, γ sey eine Funktion von einem der Winkel, es ist nur am bequemsten, γ als Funktion des Winkels C anzusehen.

Im Grunde aber haben beide Trigonometrien nichts mit den Winkeln selbst zu thun, sondern betrachten einen Winkel als gegeben, wenn das Verhältniſs einer Linie, die zwischen dessen Schenkeln rechtwinklicht auf einen steht, zu einer den Längen, die sie vom Winkelpunkte an von den Schenkeln abschneidet, gegeben ist; weil die Elementargeometrie nur auf diese oder ihr gleichgeltende Weise einen bestimmten Winkel konstruiren oder der Gröſse nach angeben kann. Und in sofern der vorhergegebene Beweis zeigt, nur solche Verhältnisse seyen für die Winkel gegeben, wenn die Seiten eines Dreiecks bestimmt sind, so ist auch nicht mehr zu fordern. Aus den Gleichungen (§. 6.)

folgt übrigens, dafs umgekehrt diese Verhältnisse α, β, γ, die der Seiten aber nicht ihre absolute Gröfse bestimmen, diese daher willkührlich bleibt, woraus erhellt, dafs wenn zwei Winkel bestimmt sind an einer Linie, auch der dritte bestimmt ist, die Linie sey so lang man will. Nur die Anwendung, für welche es bequemer und genauer ist, die Winkel durch Bogen als durch Grade zu messen, hat in der Trigonometrie die Betrachtung der zweifachen Gröfsenbestimmung eingeführt.

Berichte

über die im Auftrage der Akademie zur Beobachtung der Sonnenfinsternifs vom 19. November 1816 angestellten Reisen.

Da die totalen Sonnenfinsternisse in einem bestimmten Lande zu den seltenern Erscheinungen gehören, so beschlofs die Akademie, für die Sonnenfinsternifs am 19. November 1816, welche in den preufsischen Staaten total erscheinen sollte, Beobachter an gelegene Orte zu senden, ausgerüstet mit den erforderlichen astronomischen Instrumenten. Der seitdem leider verstorbene Doctor Tönnies wurde von hier nach Bütow, und Herr Hagen von Königsberg aus nach Culm geschickt. Die Witterung hinderte aber den gewünschten, wenn gleich nicht sehr erwarteten vollständigen Erfolg. Allein die Akademie wollte nicht verscherzen, was vielleicht ein günstiger Wind, doch nur unter der Bedingung der Ausführung der Reisen, für die Wissenschaft erspriefsliches hätte gewähren können. Ueber das von den gedachten beiden Astronomen Beobachtete geben die folgenden Berichte umständlich Nachricht.

Bericht des Herrn Dr. Tönnies.

Nachdem ich den Auftrag erhalten hatte, diese Sonnenfinsternifs an einem Orte zu beobachten, wo dieselbe total erscheinen würde, und hierzu Bütow ausgesucht worden war, so erhielt ich zu diesem Zwecke von der Sternwarte die dazu erforderlichen Instrumente, einen $2\frac{1}{2}$füfsigen Dollond, einen Kometensucher, die Charost'sche Pendeluhr, einen 7zölligen Spiegelsextanten nebst künstlichen Horizonten, Thermometer und Barometer, und so trat ich am 9. Nov. die Reise über Freienwalde, Königsberg in der Neumark und Cöslin an, und traf am 12. Nov. Abends in Bütow ein. Am folgenden Tage suchte ich nach einem für die Beobachtungen schicklichen Orte; es fand sich dazu kein besserer, als ein aufserhalb der Stadt auf einer Anhöhe liegendes Gartenhaus, welches auch die Besitzerin, Frau von Wussow, mit der gröfsten Bereitwilligkeit dazu hergab. Hier befestigte ich nun die Uhr und brachte die Instrumente dahin. Das Wetter begünstigte mich aber so schlecht, dafs nur am 15. Nov. einige unvollständige Sonnenhöhen, so wie am Tage vor der Finsternifs einige Höhen des Aldebaran genommen werden konnten. Meistens waren die Nächte ganz trübe, Sturm, Regen und Schnee wechselten beständig während meines dortigen Aufenthalts. Am 15. Nov. gelang eine Mittagssonnenhöhe, woraus ich die Bütow'er Polhöhe zu $54° 8' 59'',5$ ableitete, vorausgesetzt, dafs Bütow $16' 13''$ in Zeit östlich von Berlin liege. Sehr zuverlässig kann diefs Resultat nicht seyn; auch geben die Karten für diese Polhöhe 1 bis 2 Minuten mehr. Da die ungünstige Witterung so anhaltend war, so konnte die Uhr bis zum 19. gar nicht berichtigt werden, wozu noch kam, dafs sie in der Nacht vom 18. auf den 19. stehen blieb, nachdem sie 5 Tage und 5 Nächte

hinter einander gegangen hatte. Am 19. Morgens früh war der Himmel noch ziemlich klar, bewölkte sich aber wieder, und gegen Tagesanbruch fing es an zu schneien, welches auch noch einige Stunden fortdauerte. Um den Anfang der Finsternifs war es ganz bewölkt, und die Luft war voll Dünste. Gegen 9 U. 55′ W. Z. kam die Sonne einen Augenblick hinter den Dünsten hervor und schien ungefähr $\frac{1}{2}$ Zoll verfinstert zu seyn. Um 10 U. 30′ bis 35′ war sie wieder etwas zu sehen und ungefähr halb bedeckt. Sie stand fortwährend in lauter Dünsten; um 10 U. 48½′ schien ein grofser Sonnenfleck einzutreten; doch ist diefs höchst unsicher, da die Sonne auch fast in demselben Augenblicke wieder hinter dickes Gewölk trat; überhaupt läfst sich keine dieser Beobachtungen auf 1′ verbürgen. Kurz vor der totalen Verdunkelung, welche ungefähr 1′ 26″ dauerte (gewifs auf 10″ unsicher), trat die Sonne so tief hinter Wolken, dafs sie eine Zeitlang gar nicht mehr zu sehen war. Bei Annäherung der totalen Verfinsterung erschienen alle Gegenstände in einem graulichten Lichte; jedoch wurde es während derselben bei weitem nicht so dunkel, als ich erwartet hatte. Die gröfste Finsternifs war nicht im geringsten stärker, als die Dämmerung an demselben Tage um 5 Uhr Abends, und man konnte noch sehr gut die kleinste Schrift lesen. Auch wollte niemand bemerkt haben, dafs sich etwa Thiere zur Ruhe begeben hätten, vermuthlich, weil die Dauer der totalen Verfinsterung zu kurz war. Einige Augenblicke vor Ende der totalen Verdunkelung kam die Sonne etwas hinter den Dünsten hervor, und ich bemerkte einen glänzenden Ring um den Mond, der fast wie ein sogenannter Hof um den Mond aussah, aber dessen Breite nur die Hälfte des Monddurchmessers einnahm. Auf dem Monde zeigten sich nicht glänzende Punkte, wie frühere Beobachter wohl bemerkt haben wollen; doch können diesmal die Dünste verhindert haben, dafs man dergleichen sah. Einige Leute wollen drei, andere fünf Sterne gesehen haben, was nicht unmöglich war, da sich hin und wieder die Wolken etwas getrennt hatten; diefs wären denn wohl Merkur, Jupiter, Arktur, Mars und Spika oder Regulus gewesen. Ich habe mit blofsem Auge keinen Stern bemerkt; ich war auch immer mehr auf die Gegend aufmerksam, wo die Sonne stand, um doch wo möglich noch eine genaue Beobachtung zu erhalten, wenn sie etwas aus den Dünsten heraustreten würde. Allein dieses geschah vor Ende der Finsternifs nicht wieder. Das Thermometer fiel während der totalen Finsternifs einen ganzen Grad,

von

von $-5\frac{1}{2}°$ auf $-4\frac{1}{2}°$, stieg aber gleich nachher wieder. Das Barometer blieb unverändert stehen. Dafs bei diesen Umständen an ein Messen der Hörnerabstände gar nicht gedacht werden konnte, ist einleuchtend. Das Wiedererscheinen des ersten Lichtstrahls glich nicht einem plötzlichen Blitze, wie Beobachter früherer Finsternisse wahrgenommen haben, sondern das Dämmerungslicht während der totalen Finsternifs wurde nach und nach heller. Vielleicht hätte diefs bei ganz heiterm Himmel einem hervortretenden Blitze ähnlicher gesehen, welche Erscheinung die Dünste, in welche die Sonne getaucht war, zu bemerken verhindert haben mögen. Noch waren um 12 U. 2′ und 4′, auch gegen 12 U. 9′ einige Augenblicke, wo die Sonne etwas hervortrat, und ich Flecken austreten zu sehen glaubte, doch sehr unsicher. Das Ende war gar nicht zu beobachten; es mufs zwischen 12 U. 18′ und 19′ erfolgt seyn, vielleicht noch etwas später. Eine halbe Stunde nach Ende der Finsternifs schien die Sonne wieder heller, und Nachmittags war keine Wolke mehr am Himmel. Abends fiel schon wieder Schnee, und die beiden folgenden Tage war es ganz trübe. —

Herr Rektor Wilm in Bütow interessirte sich vorzüglich für die Sache, und leistete mir überall hülfreiche Hand; leider vereitelte die üble Witterung eine bis auf Sekunden genaue Beobachtung der Hauptphänomene der Finsternifs und somit den eigentlich astronomischen Zweck der Reise.

Das Wetter mufs an jenem Tage, auch an sehr nahe liegenden Orten, sehr verschieden gewesen seyn, da man sogar an Orten, die nicht sehr weit von Bütow liegen, ganz heitern Himmel hatte; so in Pollnow, Stolpe, Thorn, wo diese Finsternifs total war. In Stargard und Stettin war sie partial; an jenem Orte der Himmel ganz heiter, an diesem so bedeckt, dafs die Sonne gar nicht zum Vorschein kam.

In mehrern um Bütow herumliegenden Dörfern, wo man etwas von der Finsternifs gesehen haben wollte, erkundigte ich mich, ob denn die Sonne ganz bedeckt worden wäre oder nicht, konnte aber darüber von den Dorfbewohnern nicht recht sichere Auskunft erhalten, indem oft zwei einander hierin widersprachen; es mag auch schwer seyn, mit blofsem Auge zu entscheiden, ob die Sonne wirklich ganz bedeckt ist, oder sich noch ein ganz kleiner Theil der leuchtenden Scheibe zeigt, besonders wenn die Sonne tief in Dünsten steht.

Berechnung der Sonnenfinsternifs am 19. November 1816.

Vom Herrn Dr. TÖNNIES.

Anfang: 9 U. 5′ 37″,7, Ende: 11 U. 31′ 9″,7 M. Z. zu Berlin.

Nach des Herrn Bode Beobachtungen auf der Sternwarte.

	Anfang.	Ende.	Nach den Tafeln
Länge der ☉ =	7 Z. 26° 56′ 5″,9	7 Z. 27° 2′ 13″,8	von Delambre.
Halbmess. ☉ =	16′ 13,48	16 13,5	
Gerade Aufsteigung der Mitte d. Himmels	194° 38′ 18″	231° 7′ 16″,7	
Länge des ☾ =	7 Z. 25° 49′ 45″,4	7 Z. 27° 18′ 51″,3	Burckhardt.
	7 25 49 46,3	7 27 18 53,8	Bürg.
Nördl. Breite d. ☾ =	57 14	49 7,2	Burckhardt.
	57 15,4	49 7,8	Bürg.
Horiz. Aequat. Parall. =	60 16,7	60 14,1	Burckhardt.
	60 18,6	60 15,9	Bürg.
Horiz. Halbm. d. ☾ =	16 25,55	16 24,84	Burckhardt.
	16 27,63	16 26,89	Bürg.
Stündl. Bew. d. ☾ in der Länge.			
Vorhergehende Stunde =	36′ 46″,77	36′ 43″,31	Burckhardt.
	36 46,09	36 42,63	Bürg.
Nachfolgende Stunde =	36 45,37	36 41,85	Burckhardt.
	36 44,35	36 40,83	Bürg.
Stündl. Abnahme der nördl. ☾ Br.			
Vorhergehende Stunde =	3′ 20″,35	3′ 20″,97	Burckhardt.
	Dasselbe.	3 20,91	Bürg.
Nachfolgende Stunde =	3′ 20″,75	3 21,31	Burckhardt.
	Dasselbe.	3 21,25	Bürg.

Für beide Zeiten:

Schiefe der Ekliptik =	23° 27′ 51″,8	Delambre.
Stündl. Bew. der Sonne =	2 31,56	
Horiz. Parallaxe d. ☉ =	8,91	
Nördl. Breite der Sonne =	0,29	

Abplattung = $\frac{1}{308,7}$.

Polhöhe von Berlin = 52° 31′ 15″

Nach Burckhardt berechnete ich hieraus:

Parallaxe ☾ — ☉ für Berlin	60′ 0″,43	59′ 57″,83
Breite ☾ — ☉	57 13,71	49 6,91

Verbesserte Breite von Berlin 52° 20′ 27″,91.

Ferner nach Olbers Formeln:

Scheinbare Länge des ☾ =	5 Z. 26° 25′ 4″,58	5 Z. 27° 34′ 22″,36
Scheinbare Breite des ☾ =	9′ 59″,68 N.	5′ 49″,11 S.
Vergrößerter Halbm. d. ☾ =	16 28,88	16 30,27

Unterschied der wahren Längen:

1° 6′ 27″,47	16′ 41″,43

Heißt nun R die Summe der Halbm. von ☉ und ☾, Δ die Breite des ☾, und P die Parallaxe, so ergiebt sich die wahre

Berl. M. Z.

☌ ☾ ☉ aus dem Anfange: 11 U. 2′ 7″,1 + 1,84 dR — 0,56 dΔ + 0,59 dP.

Ende: 11 U. 1′ 52″,59 — 1,78 dR — 0,32 dΔ + 0,22 dP.

Vermindert man die Halbmesser ☾ und ☉ um 4″,01, so kommt die ☌ aus Anfang und Ende um 11 U. 1′ 59″,72.

Die Burckhardt'schen und Delambre'schen Tafeln geben 11 U. 1′ 59″,49.

Des Herrn Bessel an den Sekretar der mathematischen Klasse eingesandter Bericht: Ueber die Beobachtungen des Herrn Hagen.

Heute theile ich Ihnen einen ausführlicheren Bericht über den Erfolg der, auf den Auftrag der Akademie, von Herrn Hagen nach Culm gemachten Reise mit. Sie werden daraus sehen, dafs der Zweck dieser Reise, wenn auch nicht ganz, doch zum Theil erreicht wurde; dafs sie wenigstens einige Beobachtungen veranlafste, die für die Geographie von Preufsen nicht uninteressant sind.

Obgleich Herr Hagen schon am 15. Nov. in Culm ankam, so konnte er, wegen des immer bewölkten Himmels, vor dem Tage der Sonnenfinsternifs selbst, keine brauchbare Beobachtungen machen. Er hatte seinen Beobachtungsplatz im Missionarien-Institute, im dritten Stockwerke, in einem Zimmer an der südwestlichen Ecke gewählt; 64 Fufs südlich und 257 Fufs östlich von dem Thurme der Pfarrkirche, dem Dreieckspunkte bei der Vermessung von Preufsen. — Seine Instrumente waren ein 12zölliger Dollondscher Sextant nebst einem künstlichen Weingeisthorizonte und einem Quecksilberhorizonte mit einer Bedeckung von Frauenglas; eine gute astronomische Uhr von Hanneke; ein Dollondscher Reflector und ein sehr empfindliches Thermometer.

Ich theile Ihnen zuerst die Beobachtungen in ihrer ursprünglichen Form mit:

19. November 1816.

Höhen des unteren Sonnenrandes: (Therm. = + 0,67 R.)

12ᵘ 12′ 1″ . . .	13° 17′ 22″,5	12ᵘ 18′ 21″ . . .	13° 42′ 22″,5
13 21	22 22,5	19 58	47 22,5
14 42	27 22,5	21 27	52 22,5
16 0	32 22,5	22 54	57 22,5
17 12	37 22,5	24 17 . . .	14 2 22,5

Als die Wolken die Sonne zu verlassen anfingen, war sie schon stark verfinstert; der Anfang konnte also nicht beobachtet werden. Allein die Bedeckung des grofsen auf der Sonnenscheibe befindlichen Flecks fing an um 12 U. 41′ 50″; der Anfang der gänzlichen Verfinsterung der Sonne wurde bei schwachem Gewölke, jedoch sehr genau, = 12 U. 56′ 49″,0 beobachtet. Allein leider vermehrten sich kurz darauf die Wolken so sehr, dafs von der Wiedererscheinung der Sonne erst dann etwas bemerkt werden konnte, als schon eine Sichel von merklicher Breite sichtbar war; — dieses fand statt um 12 U. 58′ 30″. Unter häufigen Wolken erschien die Sonne bis 13 U. 49′, wo es völlig trübe wurde, so dafs weder das Ende der Finsternifs, noch Sonnenhöhen nach Mittag beobachtet werden konnten. Auffallend war, während der gänzlichen Verfinsterung, ein etwa 1′ breiter, die verfinsterte Sonne umgebender, etwa mit der Helligkeit des Mondes bei Tage, erscheinender Ring, der mit unbewaffnetem Auge fast scharf begrenzt erschien, im Fernrohr aber sich verwaschener zeigte. Jedoch ist Herr H a g e n, den diese Erscheinung überraschte, und der sie der Bewölkung des Himmels zuschrieb, nicht im Stande anzugeben, ob beide Ränder, oder nur der äufsere, im Fernrohre verwaschen erschienen. Ferner wurde, während nur ein geringer Theil der Sonnenscheibe sichtbar war, eine auffallend scharfe Begrenzung der Schatten bemerkt. — Die Angaben des Thermometers während der Finsternifs sind folgende:

11ᵘ	56′	. . .	+ 0″,67	Reaum.
12	42	. . .	+ 0,5	—
12	48	. . .	0,0	—
12	53	. . .	0,0	—
12	59	. . .	− 0,5	—
13	49	. . .	+ 0,5	—

Das Thermometer hing im Freien und im Schatten.

20. November.

Sonnenhöhen, Vormittag: (Therm. = 0°)

	Unter. R.		Ober. R.
11ᵘ 29′ 39″	9° 21′ 57″,5	11ᵘ 45′ 57″	11° 16′ 57″,5
30 47	26 57,5	47 9	21 57,5
31 40	31 57,5	48 6	26 57,5
32 42	36 57,5	49 9	31 57,5
33 27	41 57,5	50 14	36 57,5
34 38	46 57,5	51 5	41 57,5
35 25	51 57,5	52 7	46 57,5
		53 10	51 57,5
		54 31	56 57,5

	Ober. R.
12ᵘ 11′ 29″	13° 11′ 57″,5
12 59	16 57,5
14 2	21 57,5
15 27	26 57,5
16 42	31 57,5
17 53	36 57,5
19 0	41 57,5
20 29	46 57,5
21 40	51 57,5

Circummeridianhöhen des unteren Randes.

13ᵘ 55′ 41″	16° 38′ 55″	13ᵘ 9′ 25″	16° 41′ 42″,5
59 15	40 42,5	10 55	41 20,0
14 1 28	41 22,5	12 30	41 10,0
3 21	41 37,5	14 28	40 50,0
4 37	42 00,0	15 58	39 52,5
5 59	41 55,0	18 35	39 2,5
7 18	41 57,5		

Sonnenhöhen, Nachmittag: (oberer Rand.)

16h 37′ 47″	10° 21′ 57″,5
38 43	16 57,5
39 40	11 57,5
40 31	6 57,5
41 32	1 57,5

16h 43′ 35″	9° 51′ 57″,5
44 19	46 57,5
45 23	41 57,5
46 17	36 57,5
47 12	31 57,5
48 7	26 57,5
49 4	21 57,5

16h 50′ 47″	9° 11′ 57″,5
51 46	6 57,5
52 38	1 57,5
53 32	8 56 57,5
54 21	51 57,5

Höhen des *α* Aquilae. (Therm. = − 2°)

20h 8′ 23″	38° 41′ 49″,7
10 37	31 49,7
12 9	21 49,7
13 47	11 49,7
15 22	1 49,7
17 2	37 51 49,7

20h 26′ 23″	36° 51′ 49″,7
28 4	41 49,7
29 38	31 49,7
31 18	21 49,7
32 46	11 49,7
34 22	1 49,7
35 51	35 51 49,7
37 25	41 49,7
38 55	31 49,7
40 32	21 49,7

21h 13′ 38″	31° 21′ 49″,7
15 7	11 49,7
16 27	1 49,7
17 45	30 51 49,7
18 53	41 49,7
20 7	31 49,7
21 35	21 49,7

Höhen des *α* Tauri.

22h 26′ 47″	27° 21′ 49″,7
27 50	31 49,7
29 7	41 49,7
30 10	51 49,7
31 20	28 1 49,7
32 50	11 49,7
33 37	21 49,7
34 12	31 49,7
35 50	41 49,7
37 4	51 49,7

21. November.

Sonnenhöhen, Vormittag. (Therm. = — 1°)

	Unter. R.		Unter. R.
12ᵘ 28′ 54″ . . .	13° 11′ 26″,3	12ᵘ 34′ 22″ . . .	13° 31′ 26″,3
30 11	16 26,3	35 52	36 26,3
31 36	21 26,3	37 12	41 26,3
32 56	26 26,3	38 41	46 26,3

Circummeridianhöhen des oberen Sonnenrandes.

14ᵘ 4′ 19″ . . .	16° 59′ 3″,8	14ᵘ 12′ 44″ . . .	17° 0′ 21″,3
6 0 . . .	17 0 18,8	14 15	0 33,8
7 35	0 18,8	15 53	0 29,8
9 9	0 33,8	17 37	0 21,3
10 18	0 41,3	19 20 . . .	16 59 37,3
11 25	0 41,3	21 29	58 56,3

Sonnenhöhen, Nachmittag. (Therm. = — 1°)

	Unter. R.		Unter. R.
15ᵘ 45′ 38″ . . .	13° 46′ 26″,3	15ᵘ 51′ 26″ . . .	13° 26′ 26″,3
47 8	41 26,3	52 45 . . .	13 21 26,3
48 40	36 26,3	54 4 . . .	13 16 26,3
49 59	31 26,3	55 35 . . .	13 11 26,3

25. November.

Sonnenhöhen, Vormittag. (Therm. + 1°)

	Ober. R.		Ober. R.		Unter. R.
12ᵘ 13′ 42″ . .	10° 11′ 11″,3	12ᵘ 33′ 26″ . .	11° 41′ 11″,3	12ᵘ 42′ 26″ . .	11° 46′ 11″,3
14 41 . . .	16 11,3	34 42 . . .	46 11,3	43 50 . . .	51 11,3
15 53 . . .	21 11,3	35 51 . . .	51 11,3	45 1 . . .	56 11,3
16 50 . . .	26 11,3	36 51 . . .	56 11,3	46 13 . .	12 1 11,3
17 59 . . .	31 11,3	38 5 . .	12 1 11,3	47 31 . . .	6 11,3
18 57 . . .	36 11,3	39 32 . . .	6 11,3	48 48 . . .	11 11,3
19 58 . . .	41 11,3	40 27 . . .	11 11,3	50 11 . . .	16 11,3

Son-

Sonnenhöhen, Nachmittag. (Therm. + 1°)

	Ober. R.
$16^{u}\ 52'\ 2''$ . . .	$10°\ 56'\ 11'',3$
53 4	31 11,3
54 7	26 11,3
55 6	21 11,3
56 16	16 11,3
57 12	11 11,3

Höhen des α Aquilae. (Therm. — 5°)

$22^{u}\ 3'\ 18''$ . . .	$25°\ 51'\ 11'',3$	$22^{u}\ 10'\ 18''$ . . .	$24°\ 51''\ 11'',3$
4 32	41 11,3	11 37	41 11,3
5 38	31 11,3	12 50	31 11,3
6 45	21 11,3	13 59	21 11,3
7 54	11 11,3	15 13	11 11,3
9 9	1 11,3	16 21	1 11,3

Höhen des α Tauri.

$23^{u}\ 31'\ 54''$ . . .	$35°\ 51'\ 11'',3$	$23^{u}\ 37'\ 54''$ . . .	$36°\ 21'\ 11'',3$
32 59	41 11,3	39 15	31 11,3
34 19	51 11,3	40 26	41 11,3
35 27 . . .	36 1 11,3	41 30	51 11,3
36 37	11 11,3		

Am 28. November heiterte es sich kurz vor Mittag ein wenig auf, allein es konnten keine, weder für die Bestimmung des Ganges der Uhr, noch für die der Polhöhe brauchbare Beobachtungen gemacht werden. Am Abend wurden die Instrumente wieder eingepackt.

Die zur Berichtigung der Uhr dienenden Beobachtungen wurden unter Annahme der Polhöhe von Culm $= 53°\ 20'\ 50'' + \Delta\varphi$, berechnet, wo $\Delta\varphi$ die Verbesserung der von Textor angegebenen Polhöhe bedeutet. Um die Uebersicht zu erleichtern, wurden die einzelnen, in den verschiedenen Reihen enthaltenen Beobachtungen sämmtlich auf die mittlere Höhe reducirt, woraus sich folgendes ergab:

	Uhr-Zeit.		Scheinb. Höhe.	
19. Nov.	12ᵘ 14′ 38″,36	. U. R. ⊙ .	13° 27′ 22″,5	. Mittel aus 5 Beobb.
	12 21 20,37	. — .	13 52 22,5	. — — 5 —
20. —	11 32 36,30	. — .	9 36 57,5	. — — 7 —
	11 50 8,44	. O. R. ⊙ .	11 36 57,5	. — — 9 —
	12 16 35,33	. — .	13 31 57,5	. — — 9 —
	16 39 40,88	. — .	10 11 57,5	. — — 5 —
	16 46 17,21	. — .	9 36 57,5	. — — 7 —
	16 52 57,02	. — .	9 1 57,5	. — — 5 —
	20 12 54,74	. α Aquilae .	38 16 49,7	. — — 6 —
	20 33 33,89	. — .	36 6 49,7	. — — 10 —
	21 17 39,39	. — .	30 51 49,7	. — — 7 —
	22 31 53,48	. α Tauri .	28 6 49,7	. — — 10 —
21. —	12 33 40,19	. U. R. ⊙ .	13 28 56,3	. — — 8 —
	15 50 41,23	. — .	13 28 56,3	. — — 8 —
25. —	12 16 50,65	. O. R. ⊙ .	10 26 11,3	. — — 7 —
	12 36 57,88	. — .	11 56 11,3	. — — 7 —
	12 46 15,52	. U. R. ⊙ .	12 1 11,3	. — — 7 —
	16 54 38,39	. O. R. ⊙ .	10 23 41,3	. — — 6 —
	22 9 48,85	. α Aquilae .	24 56 11,3	. — — 12 —
	23 36 41,35	. α Tauri .	36 11 11,3	. — — 9 —

Der ferneren Berechnung liegen meine Refractionstafeln, nach ihrer Reduction auf die jedesmalige Temperatur, die Sonnentafeln von Carlini und die neuesten Bestimmungen der Oerter der beiden Sterne α Aquilae und α Tauri, zum Grunde. Um die Resultate noch besser übersehen zu können, habe ich die aus den Sonnenbeobachtungen abgeleiteten Verbesserungen der Uhrzeit auf den Augenblick des wahren Mittags, und die aus den Sternbeobachtungen sich ergebenden auf 8ᵘ W. Z. reducirt; unter Annahme eines Ganges der Uhr = 1′ 36″ täglich gegen Sternenzeit, so wie ihn eine vorläufige Rechnung ergab. Auf diese Weise erhielt man folgende Verbesserungen der Uhrzeit gegen Sternenzeit:

		Uhrzeit.	Verbesserung der Uhrzeit.
19. Nov.	0^h W. Z. =	$14^h\ 0',9$	$+\ 1^h\ 38'\ 12'',89 + 0,2324\,\Delta\varphi$
			$12,37 + 0,2504\,\Delta\varphi$
20. —	0^h — . . .	$14\ \ 6,6$	$+\ 1\ \ 56\ \ 36,16 + 0,1518\,\Delta\varphi$
			$40,80 + 0,1759\,\Delta\varphi$
			$42,32 + 0,2252\,\Delta\varphi$
			$+\ 1\ \ 56\ \ 19,94 - 0,1533\,\Delta\varphi$
			$19,38 - 0,1454\,\Delta\varphi$
			$23,05 - 0,1383\,\Delta\varphi$
	8^h — . . .	$22\ \ 8,5$	$+\ 1\ \ 35\ \ 50,03 - 0,1255\,\Delta\varphi$
			$56,80 - 0,1025\,\Delta\varphi$
			$56,06 - 0,0675\,\Delta\varphi$
			$+\ 1\ \ 35\ \ 58,85 + 0,0215\,\Delta\varphi$
21. —	0^h — . . .	$14\ \ 12,4$	$+\ 1\ \ 35\ \ \ 3,87 + 0,2541\,\Delta\varphi$
			$+\ 1\ \ 34\ \ 45,04 - 0,2557\,\Delta\varphi$
25. —	0^h — . . .	$14\ \ 35,7$	$+\ 1\ \ 28\ \ 38,98 + 0,1748\,\Delta\varphi$
			$41,65 + 0,2094\,\Delta\varphi$
			$41,21 + 0,2295\,\Delta\varphi$
			$+\ 1\ \ 28\ \ 26,71 - 0,1732\,\Delta\varphi$
	8^h — . . .	$22\ \ 37,6$	$+\ 1\ \ 28\ \ \ 4,30 - 0,0423\,\Delta\varphi$
			$+\ 1\ \ 28\ \ \ 3,09 + 0,0496\,\Delta\varphi$

Um diese verschiedenen Bestimmungen, da vor und nach Mittag Sonnenhöhen beobachtet wurden, in Uebereinstimmung zu bringen, mufs man augenscheinlich die Polhöhe vermindern. Aus den Beobachtungen vom 20., 21. und 25. November hat man die drei Bedingungsgleichungen:

$$0 = 19'',25 + 0,3300\,\Delta\varphi;\quad \Delta\varphi = -\,58'',4.$$
$$0 = 18,83 + 0,5098\,\Delta\varphi;\quad \Delta\varphi = -\,36,9.$$
$$0 = 13,90 + 0,3768\,\Delta\varphi;\quad \Delta\varphi = -\,36,9.$$

Die beobachteten Circummeridianhöhen der Sonne ergeben folgende Mittagshöhen:

	20. Nov.	21. Nov.
	16° 41′ 54″,4	17° 0′ 14″,0
	40,7	2,1
	40,2	42,7
	48,1	44,1
	63,6	46,4
	55,1	41,9
	58,4	21,6
	52,8	38,6
	43,2	45,4
	52,3	54,9
	64,1	43,9
	36,7	34,7
	51,6	
Mittel	16° 41′ 50″,9 . . .	17° 0′ 41″,0
Refr. und Parallaxe	— 3 6,5 . . .	— 3 3,4
Halbmesser der ⊙	+ 16 13,7 . . .	— 16 13,9
Meridianhöhe des Mittelp.	16° 54′ 58″,1 . . .	16° 41′ 23″,7
Declination der ⊙ . . .	— 19° 44′ 45″,1 . . .	— 19° 58′ 7″,7
Polhöhe	53° 20′ 18″,8 . .	53° 20′ 28″,6

Diese Beobachtungen geben also gleichfalls eine von der Textorschen sehr verschiedene Polhöhe, und vereinigen sich mit den aus den vor- und nachmittägigen Sonnenhöhen gezogenen, so weit wie es die Umstände erwarten lassen. Das Mittel aus den 5 verschiedenen Bestimmungen ist $\Delta\varphi = -36',9$, oder

Polhöhe von Culm = 53° 20′ 13″,1.

Um sich dieses Resultats mehr zu versichern, wurde der Sextant, nach der Rückkehr, auf der Sternwarte geprüft, indem man einige durch ein Wiederholungsinstrument sehr genau bestimmte Horizontalwinkel von 25 bis 30° mit dem Sextanten maafs. Diese Prüfung zeigte keinen merklichen Theilungsfehler, indem die Uebereinstimmung beider Instrumente so grofs war, dafs die Unterschiede kaum 5″ betrugen, welches die Genauigkeit der Beobachtungen mit diesem Sextanten, dessen Fernrohr eine ungewöhnlich ge-

ringe

ringe Vergröfserung hat, übertrifft. Auch darf man die Gröfse des Fehlers nicht für unverträglich mit der Textorschen Vermessung ansehen, nachdem die Nachmessung einiger Winkel, die ich hier vorgenommen habe, äusserst grofse Irrthümer, die nicht etwa einzelne Secunden, sondern fast einen Viertelgrad betragen, gezeigt hat. — Bei einer anderen Gelegenheit werde ich dieses näher auseinander setzen.

Nimmt man die oben bestimmte Polhöhe von Culm an, oder setzt man in den Bedingungsgleichungen für die Verbesserung der Uhrzeit $\Delta\varphi = -30'',9$, so hat man folgendes Täfelchen dieser Verbesserungen:

19. Nov.	0^u W.Z.	=	14^u 0,9 Uhrz.	...	$+ 1^u\ 38'\ 5'',72$
20. —	0 —	=	14 6,6 —	...	+ 1 36 29,44
- —	8 —	=	22 8,5 —	...	+ 1 35 58,00
21. —	0 —	=	14 12,4 —	...	+ 1 34 54,48
25. —	0 —	=	14 35,7 —	...	+ 1 28 33,07
- —	8 —	=	14 37,6 —	...	+ 1 28 3,56

Diese 6 Bestimmungen deuten auf einen vollkommen regelmäfsigen Gang der Uhr, so wie sie ihn stets zu haben pflegt. Sie lassen sich zu der möglichst grofsen Uebereinstimmung bringen, wenn man für den 19. Nov. 0^u W. Z. die Verbesserung $+ 1^u\ 38'\ 4'',32$, und ihre Veränderung in einem wahren Tage $= - 1'\ 34'',90$, oder in 24 Stunden der Uhr $= - 1'\ 34'',52$ annimmt, womit die 6 Bestimmungen bis auf $+ 0'',60$; $- 0'',02$; $- 0'',21$; $+ 0'',04$; $- 1'',85$; $- 0'',06$ übereinstimmen.

Man hat demnach die Reduction der Uhrzeit für die beiden beobachteten Erscheinungen $= + 1^u\ 38'\ 9'',51$ und $1^u\ 38'\ 8'',53$ und hiermit:

Eintritt des ersten Randes des Kerns des grofsen Flecks

$= 14^u\ 19'\ 59'',51$ St. Z. = 18. Nov. $22^u\ 41'\ 16'',1$ W. Z.

Anfang der gänzlichen Verfinsterung

$= 14^u\ 34'\ 57'',53$ St. Z. = 18. Nov. $22^u\ 56'\ 11'',6$ W. Z.

Nach Textors Vermessung liegt Culm unter $36°\ 5'\ 46''$ der Länge; oder sein Meridianunterschied von Paris ist $1^u\ 4'\ 23''$. — Ich hoffe, dafs diese Nachrichten der Akademie d. W. hinreichend seyn werden, um danach zu beurtheilen, in wiefern aus dieser Unternehmung einiger Nutzen erwachsen kann.

Beobachtung der Sonnenfinsternifs vom 19. Nov. 1816 zu Berlin.

Von Herrn Tralles.

Da Berlin nicht bedeutend entfernt von der Zone, in welcher diese Finsternifs total beobachtet werden konnte, so war diese Erscheinung auch hier nicht unbeachtet zu lassen, besonders die Bestimmung beider Hauptmomente, Anfang und Ende derselben; und um so mehr, da die Akademie Beobachter der totalen Finsternifs ausgesandt hatte.

Am Morgen der eintretenden Sonnenfinsternifs hatte sich der bis dahin seit einigen Tagen trübe Himmel, welcher selten einen Sonnenblick für völlig genaue Zeitbestimmung durchliefs, ganz erheitert. Indessen war die Zeit der Uhr mehr als hinlänglich genau für den zu erwartenden Anfang bekannt. Ein paar Beobachter eingeladen, um die Finsternifs mit zu beobachten, blieben aus, und indem ich die ihnen bestimmten Fernröhre stets bereit hielt, um in jedem Augenblick benutzt werden zu können, fing die Finsternifs zur aus den Ephemeriden bekannten Zeit und ein paar Minuten später noch nicht an, welches einige Stöhrung veranlafste, durch den Glauben einer begangenen Verwechselung der wahren und mittlern Sonnenzeit. Aber beinahe 4 Zeitminuten nach der angekündigten sahe ich in meinem 5füfsigen Achromaten mit etwa 90maliger Vergröfserung den Rand der Sonne angegriffen, doch in der Ueberraschung mit einem in dem Moment sich noch regenden Zweifel, ob es wirklich der Finsternifs Anfang sey, die Pendeluhr aber in demselben Moment doch beobachtet, zeigte 9" 2′ 0″ genau, und nachdem dies bemerkt worden war, hob ein Blick ins Fernrohr allen Zwei-

fiel der wirklich angefangenen Finsternifs völlig auf, und gewifs hatte die erste Berührung der Ränder einige Sekunden früher schon statt gefunden.

Um 9ᵘ 57′ 19″ trat der Mond mit den Anfang des Kerns des grofsen Sonnenflecken in Berührung, und um 10ᵘ 1′ 6″ mit dem gröfsern der ihm folgenden kleinen (dem vorletzten).

Um 11ᵘ 12′ 9″ trat der Kern des grofsen Flecken ganz unterm Monde hervor, um 11ᵘ 15′ 59″ eben so gedachter kleinerer.

Das Ende der Finsternifs wurde von 4 Personen beobachtet. Ich sah das Ende der Finsternifs 2 Sekunden später als zwei Mitbeobachter an minder starken, obgleich guten, Fernröhren es durch ihren Ausruf angaben, demohnerachtet schätzten jene nach der Pendeluhr das Ende um 2″ später, wahrscheinlich aus Irrung in der Schätzung der verflossenen Sekunden bis zum Moment, wo sie den Zeiger der Pendeluhr beobachteten. Ich setzte das Ende der Finsternifs 11ᵘ 27′ 55″.

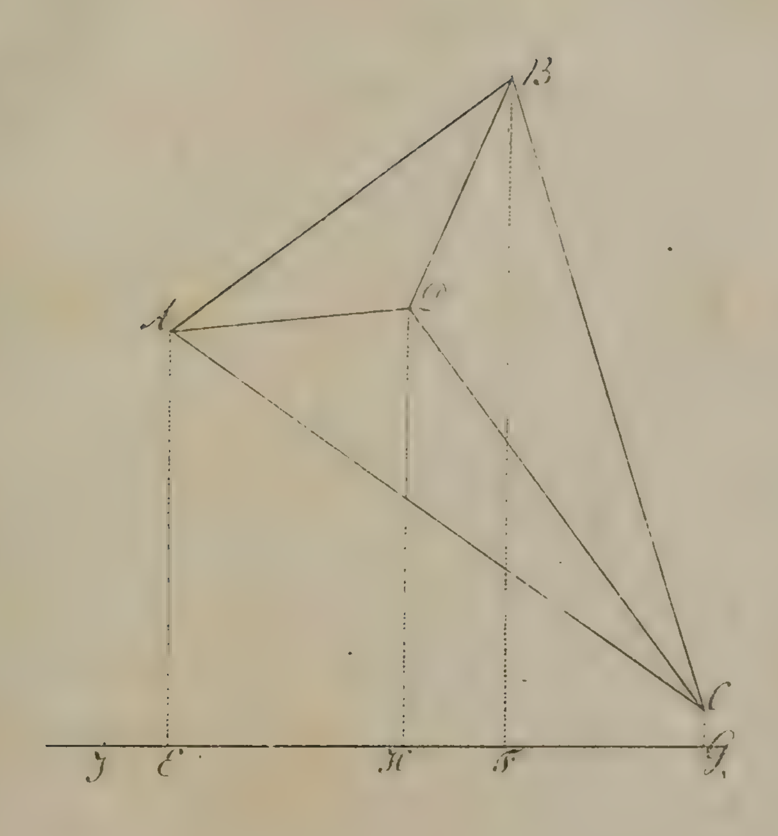
Der Herr Geh. Reg.-Rath Behrnauer, welcher mit einem 30zölligen sehr guten Frauenhoferischen Achromaten beobachtete, gab das Ende nach der Pendeluhr 11ᵘ 26′ 56″,4 an.

Bald Nachmittags nach der Finsternifs nahm ich mit einem, als Vertikal-Wiederholungskreis, aufgestellten Reichenbachischen 8zölligen Theodoliten eine zweifache Sonnenzenithdistanz, welche nach genauer Berechnung gab, dafs die Uhr 5′ 22″ gegen mittlere Zeit zurück war. Am Abend desselben Tages gaben Beobachtungen von α Orionis mit einem Lenoir'schen Vervielfältigungskreise, dafs die Uhr 5′ 21″,9 zu wenig gegen mittlere Zeit gewiesen hatte, nur 0″,1 von der Angabe des Theodoliten verschieden. An folgenden Tagen bestätigten übereinstimmende Sonnenhöhen, an einem Cary'schen Kreise beobachtet, dies Resultat vollkommen. Der Gang der Uhr 1″,6 täglich voreilend, war bekannt und ist sehr beständig.

Demnach wäre in der Universität in Berlin, 360 rheinl. Fufs östlicher und 280 Fufs südlicher als die Sternwarte, der Anfang der Finsternifs gesehen worden, 9ᵘ 5′ 42″ mittl. ⊙ Zeit, das Ende 11ᵘ 31′ 17 }
18,4 }

Das Ende verdient Zutrauen. Der Anfang aber darf wohl, wie bemerkt, höchstens zu 9ᵘ 5′ 40″ angenommen werden.

Die Lichtabnahme während der Finsternifs war sehr merklich. Das Thermometer, der Sonne ausgesetzt, sank während der Finsternifs 5 Grad Fahrenheit, von 26° auf 23° herab.



zu Hrn Grusons Aufgabe über Minima. Mathem: Klasse 1816–17.



